



UN MÉTODO DE ELEMENTOS DE CONTORNO PARA PROBLEMAS DE VISCOELASTICIDAD ARMÓNICOS

Alfredo Canelas y Berardi Sensale

Instituto de Estructuras y Transporte, Facultad de Ingeniería, UdelaR

XXXIV Jornadas Sudamericanas de Ingeniería Estructural | San Juan | Argentina

27 de septiembre a 1 de octubre de 2010



Contenido

■ Preliminares

- Objetivo
- Ecuación de campo para problemas de viscoelasticidad armónicos

■ Boundary Knot Method

- Función radial de Trefftz

■ Resultados

- Ejemplos
- Conclusiones



Contenido

■ Preliminares

- Objetivo
- Ecuación de campo para problemas de viscoelasticidad armónicos

■ Boundary Knot Method

- Función radial de Trefftz

■ Resultados

- Ejemplos
- Conclusiones



Objetivo

- Definir un método numérico, basado en el Boundary Knot method, que sirva para el análisis de estructuras de material elástico o viscoelástico en el caso de sollicitaciones armónicas.



Contenido

■ Preliminares

- Objetivo
- Ecuación de campo para problemas de viscoelasticidad armónicos

■ Boundary Knot Method

- Función radial de Trefftz

■ Resultados

- Ejemplos
- Conclusiones

Ecuación de campo en viscoelasticidad armónica

$$c_P^2(t, \cdot) * \nabla \nabla \cdot \mathbf{u}(x, \cdot) - c_S^2(t, \cdot) * \nabla \times \nabla \times \mathbf{u}(x, \cdot) + \mathbf{b}(x, t) = \ddot{\mathbf{u}}(x, t) \quad (1)$$

Donde '*' representa el operador viscoelástico:

$$f(t, \cdot) * g(\cdot) = \int_{\tau_0}^t f(t, \tau) \frac{\partial g}{\partial \tau}(\tau) d\tau \quad (2)$$

$$c_P^2(t, \cdot) * = \frac{1-\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)\rho} R_E(t, \cdot) * \quad c_S^2(t, \cdot) * = \frac{1}{2(1+\nu)\rho} R_E(t, \cdot) * \quad (3)$$

R_E : Función de relajación del material.

Ecuación de campo en viscoelasticidad armónica

Aplicando la transformada de Fourier a la ecuación general llegamos a la ecuación para problemas armónicos, que para $\mathbf{b}=0$ es:

$$\bar{c}_p^2(\omega)\nabla\nabla\cdot\bar{\mathbf{u}}(x,\omega) - \bar{c}_s^2(\omega)\nabla\times\nabla\times\bar{\mathbf{u}}(x,\omega) + \omega^2\bar{\mathbf{u}}(x,\omega) = 0 \quad (1)$$

$$\bar{c}_p^2(\omega) = \frac{1-\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)\rho} E^*(\omega) \quad \bar{c}_s^2(\omega) = \frac{1}{2(1+\nu)\rho} E^*(\omega) \quad (2)$$

$E^*(\omega)$: Módulo complejo.

Para $E^*(\omega)$ se pueden considerar modelos fraccionales de Kelvin o Boltzmann. En este trabajo consideramos:

$$E^*(\omega) = (1 + 2i\beta)\omega E \quad (3)$$



Contenido

■ Preliminares

- Objetivo
- Ecuación de campo para problemas de viscoelasticidad armónicos

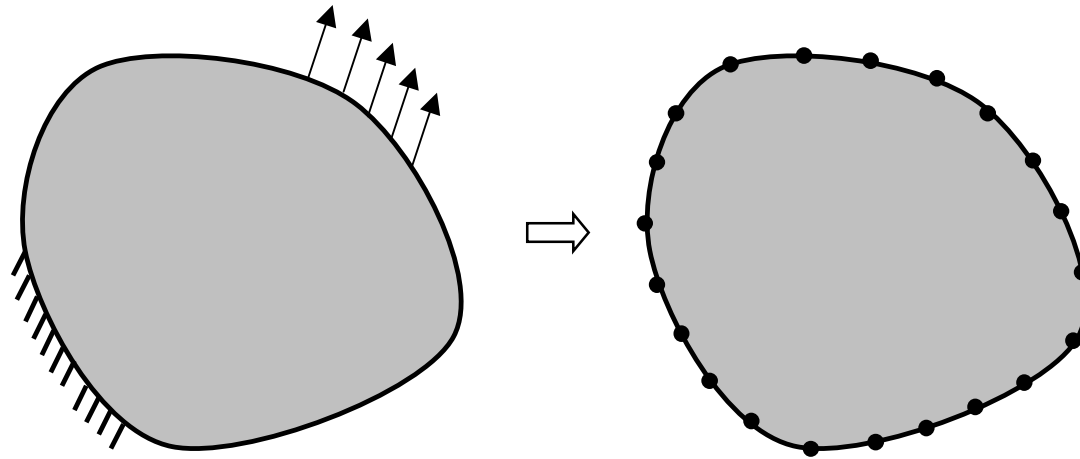
■ Boundary Knot Method

- Función radial de Trefftz

■ Resultados

- Ejemplos
- Conclusiones

Boundary Knot Method



Por cada nodo del contorno definimos una función radial: $\hat{\mathbf{u}}(x, x_j, \omega)$

La aproximación de la solución para N nodos en el contorno es:

$$\mathbf{u}_N(x, \omega) = \sum_{j=1}^N \hat{\mathbf{u}}(x, x_j, \omega) \mathbf{a}_j$$

La función radial es regular y satisface la ecuación de campo

Boundary Knot Method

Ejemplo: Ecuación de Helmholtz

$$c^2 \Delta u + \omega^2 u = 0 \quad (1)$$

Solución radial de Trefftz:

$$\hat{u}(x, x_j, \omega) = J_0(kr_j) \quad \text{con} \quad k = \sqrt{c/\omega}, \quad \text{y} \quad r_j = \|x - x_j\| \quad (2)$$

$$u_N(x, \omega) = \sum_{j=1}^N J_0(kr_j) \alpha_j$$

Condiciones de contorno por colocación:

$$\left. \begin{array}{l} u_N(x_i, \omega) = \bar{u}(x_i, \omega), \quad \forall x_i \in \partial\Omega_u \\ p_N(x_i, \omega) = \bar{p}(x_i, \omega), \quad \forall x_i \in \partial\Omega_p \end{array} \right\} \sum_{j=1}^N \mathbf{K}_{ij} \alpha_j = \mathbf{b}_i \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{K}\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{b} \quad (3)$$



Contenido

■ Preliminares

- Objetivo
- Ecuación de campo para problemas de viscoelasticidad armónicos

■ Boundary Knot Method

- Función radial de Trefftz

■ Resultados

- Ejemplos
- Conclusiones

Función radial de Trefftz

$$\hat{\mathbf{u}} = \nabla\nabla\cdot\mathbf{a} - \nabla\times\nabla\times\mathbf{b} \quad (1)$$

$$\bar{c}_p^2\nabla\nabla\cdot[\nabla\nabla\cdot\mathbf{a} - \nabla\times\nabla\times\mathbf{b}] - \bar{c}_s^2\nabla\times\nabla\times[\nabla\nabla\cdot\mathbf{a} - \nabla\times\nabla\times\mathbf{b}] + \omega^2[\nabla\nabla\cdot\mathbf{a} - \nabla\times\nabla\times\mathbf{b}] = 0 \quad (2)$$

$$\nabla\nabla\cdot[\bar{c}_p^2\nabla\nabla\cdot\mathbf{a} - \bar{c}_p^2\nabla\times\nabla\times\mathbf{a} + \omega^2\mathbf{a}] - \nabla\times\nabla\times[\bar{c}_s^2\nabla\nabla\cdot\mathbf{b} - \bar{c}_s^2\nabla\times\nabla\times\mathbf{b} + \omega^2\mathbf{b}] = 0 \quad (3)$$

Basta tener:

$$\left. \begin{aligned} \bar{c}_p^2\nabla^2\mathbf{a} + \omega^2\mathbf{a} &= 0 \\ \bar{c}_s^2\nabla^2\mathbf{b} + \omega^2\mathbf{b} &= 0 \end{aligned} \right\} \rightarrow \begin{aligned} \mathbf{a}_i(r) &= C_i r^{-1} \sin(k_p r) \\ \mathbf{b}_i(r) &= C_i r^{-1} \sin(k_s r) \end{aligned} \quad (4)$$

Función radial de Trefftz

$$\hat{\mathbf{u}}_{\ell k} = \frac{1}{4\pi\rho\bar{c}_S^2} \left[\psi\delta_{\ell k} - \chi \frac{\partial r}{\partial x_\ell} \frac{\partial r}{\partial x_k} \right] \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{p}}_{\ell k} = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{\partial \psi}{\partial r} - \frac{\chi}{r} \right) \left(\delta_{\ell k} \frac{\partial r}{\partial \mathbf{n}} + \mathbf{n}_\ell \frac{\partial r}{\partial x_k} \right) - \frac{2\chi}{r} \frac{\partial r}{\partial x_\ell} \left(\mathbf{n}_k - 2 \frac{\partial r}{\partial x_k} \frac{\partial r}{\partial \mathbf{n}} \right) \\ - 2 \frac{\partial \chi}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x_\ell} \frac{\partial r}{\partial x_k} \frac{\partial r}{\partial \mathbf{n}} + \mathbf{n}_k \left(\frac{\bar{c}_P^2}{\bar{c}_S^2} - 2 \right) \left(\frac{\partial \psi}{\partial r} - \frac{\partial \chi}{\partial r} - \frac{2\chi}{r} \right) \frac{\partial r}{\partial x_\ell} \end{aligned} \quad (2)$$

$$\psi(r) = r^{-3} \left[k_P r \cos(k_P r) - \sin(k_P r) - k_S r \cos(k_S r) + \sin(k_S r) - k_S^2 r^2 \sin(k_S r) \right] \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \chi(r) = r^{-3} \left[3k_P r \cos(k_P r) - 3 \sin(k_P r) + k_P^2 r^2 \sin(k_P r) \right. \\ \left. - 3k_S r \cos(k_S r) + 3 \sin(k_S r) - k_S^2 r^2 \sin(k_S r) \right] \end{aligned} \quad (4)$$



Contenido

■ Preliminares

- Objetivo
- Ecuación de campo para problemas de viscoelasticidad armónicos

■ Boundary Knot Method

- Función radial de Trefftz

■ Resultados

- Ejemplos
- Conclusiones



Contenido

■ Preliminares

- Objetivo
- Ecuación de campo para problemas de viscoelasticidad armónicos

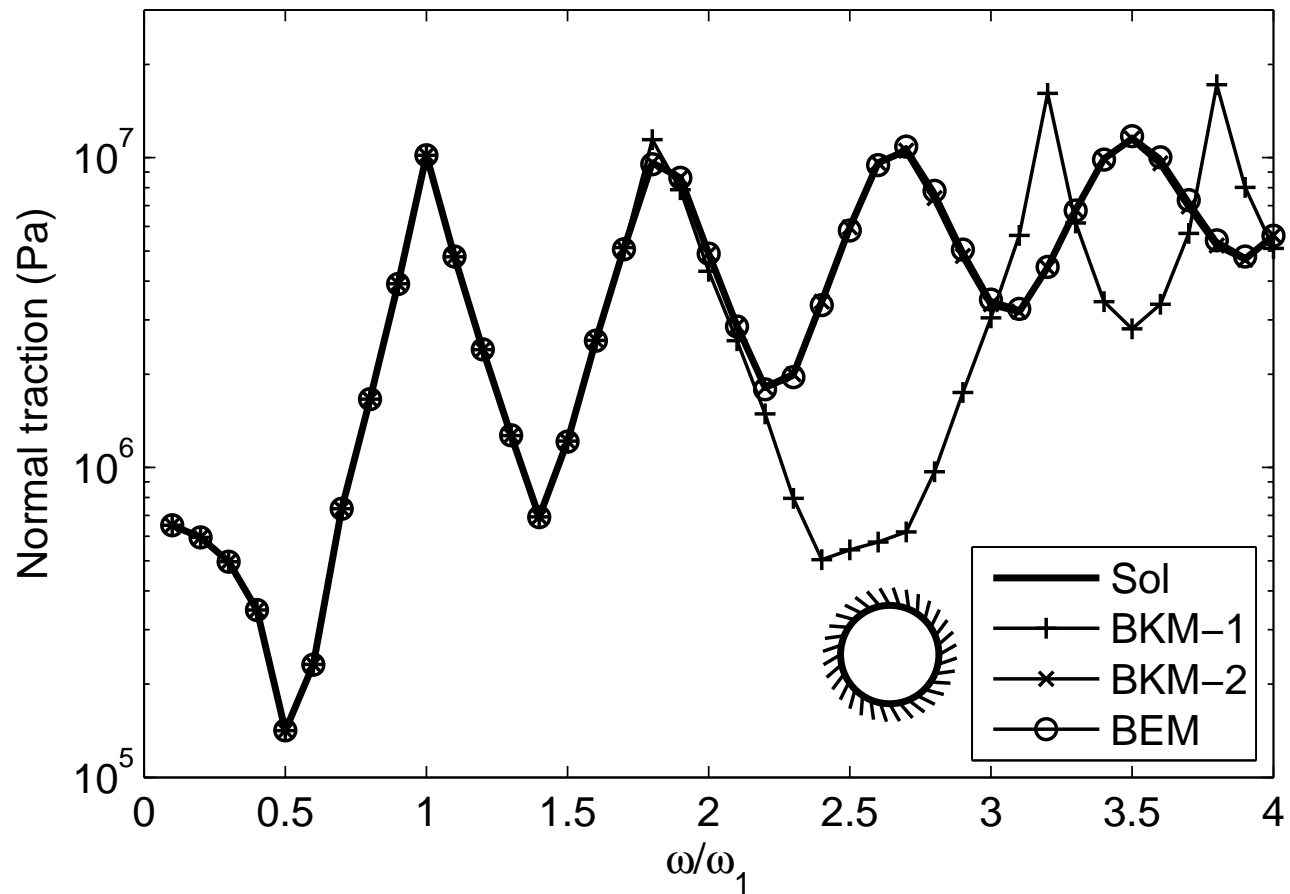
■ Boundary Knot Method

- Función radial de Trefftz

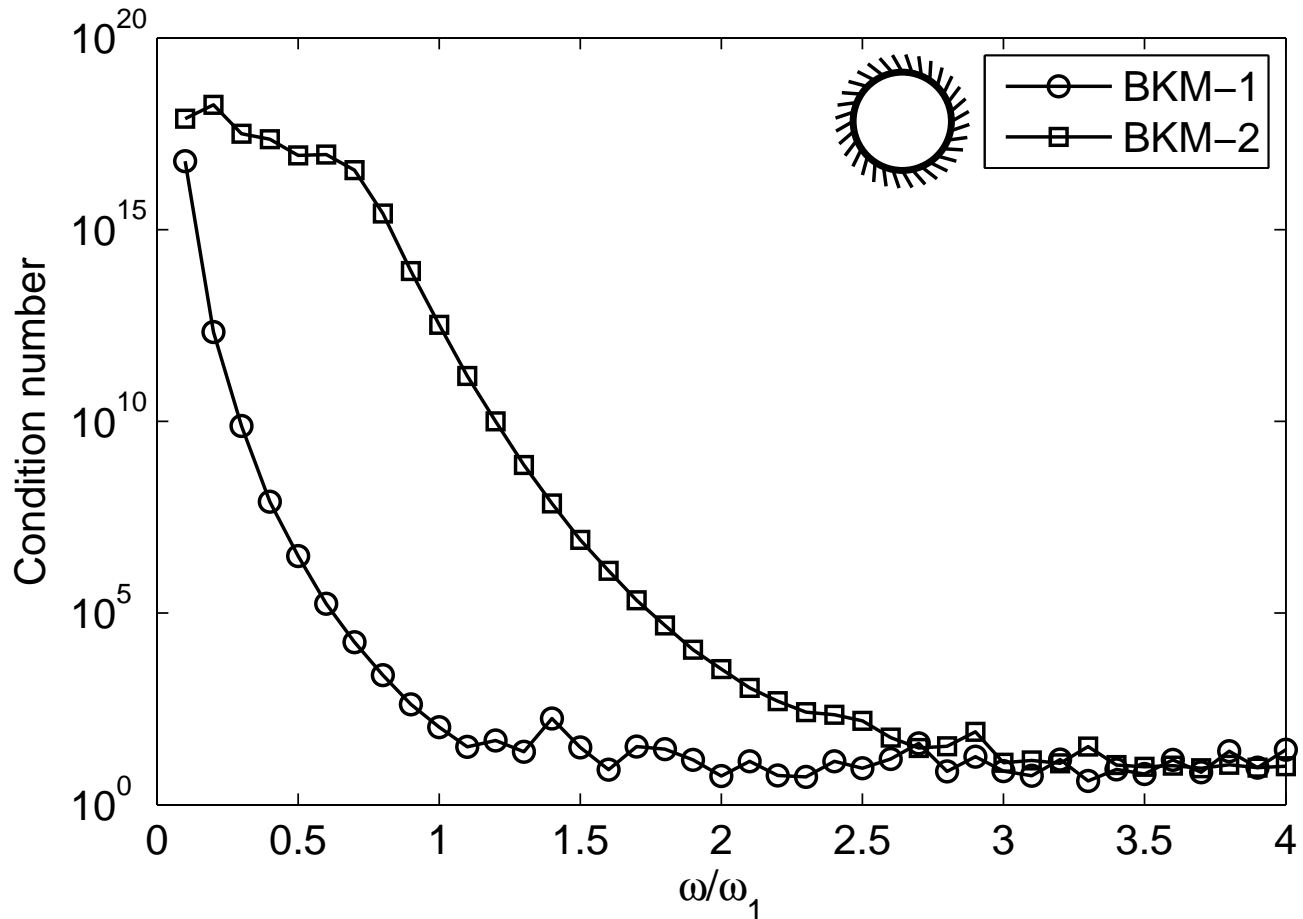
■ Resultados

- Ejemplos
- Conclusiones

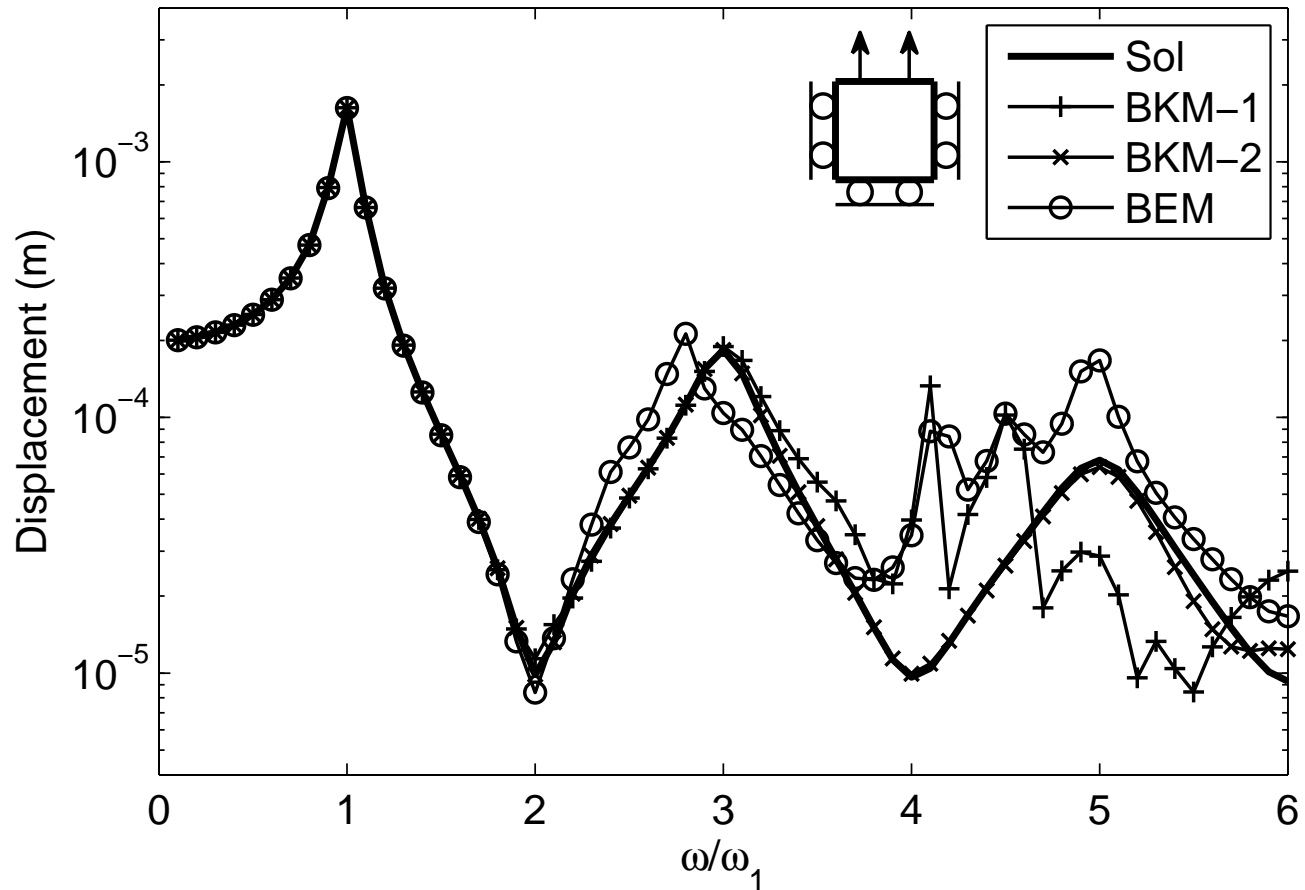
Círculo



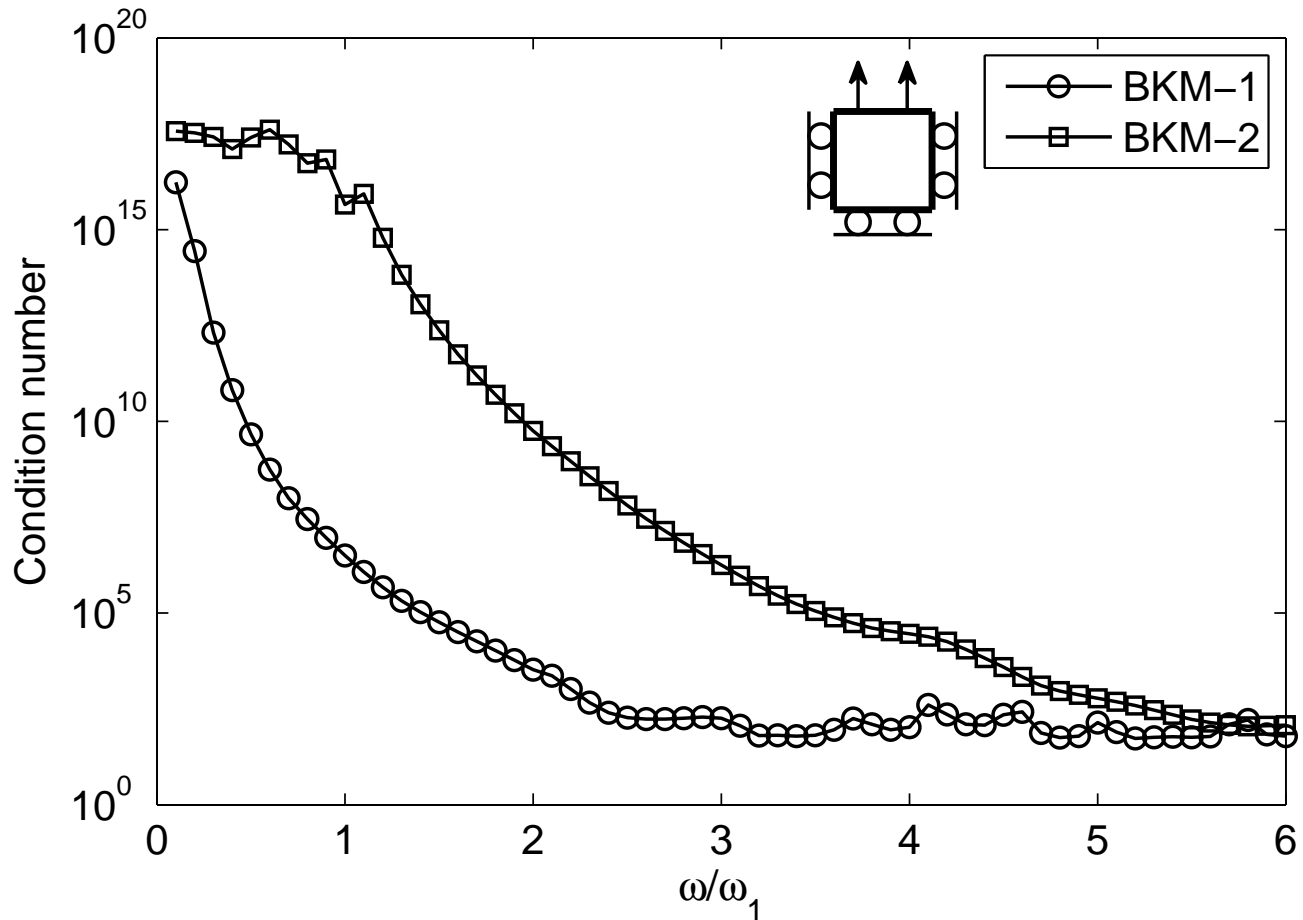
Círculo – Número de condición



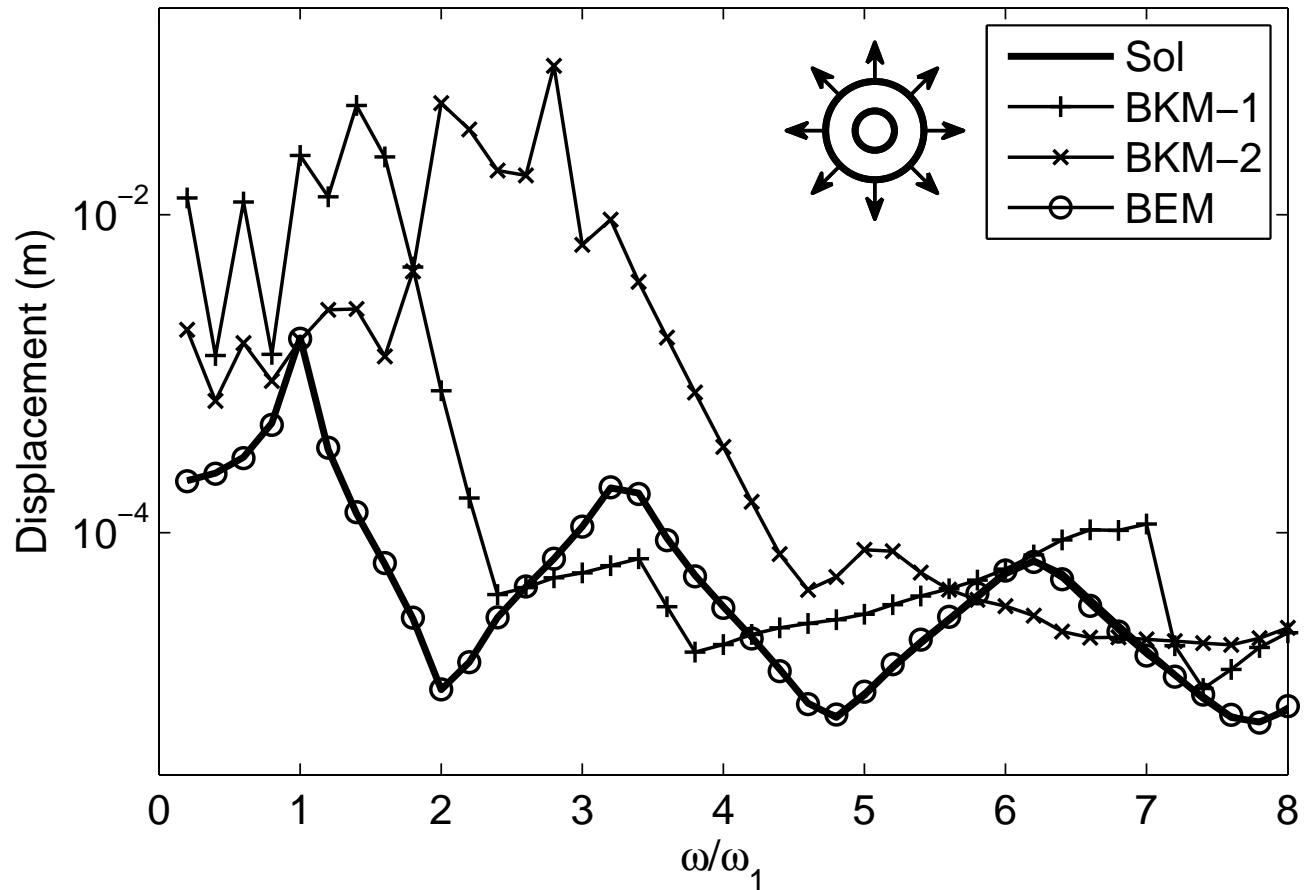
Cuadrado



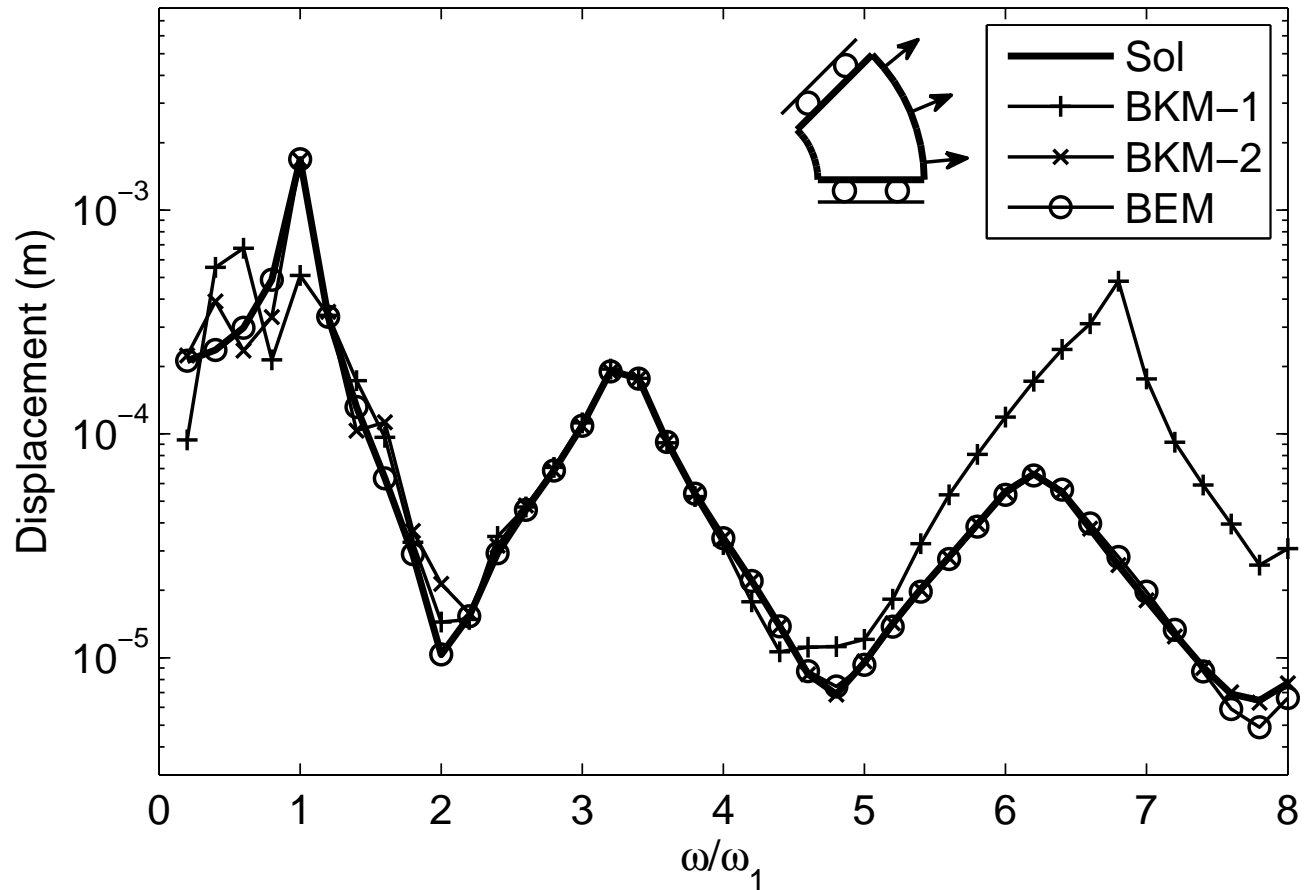
Cuadrado – número de condición



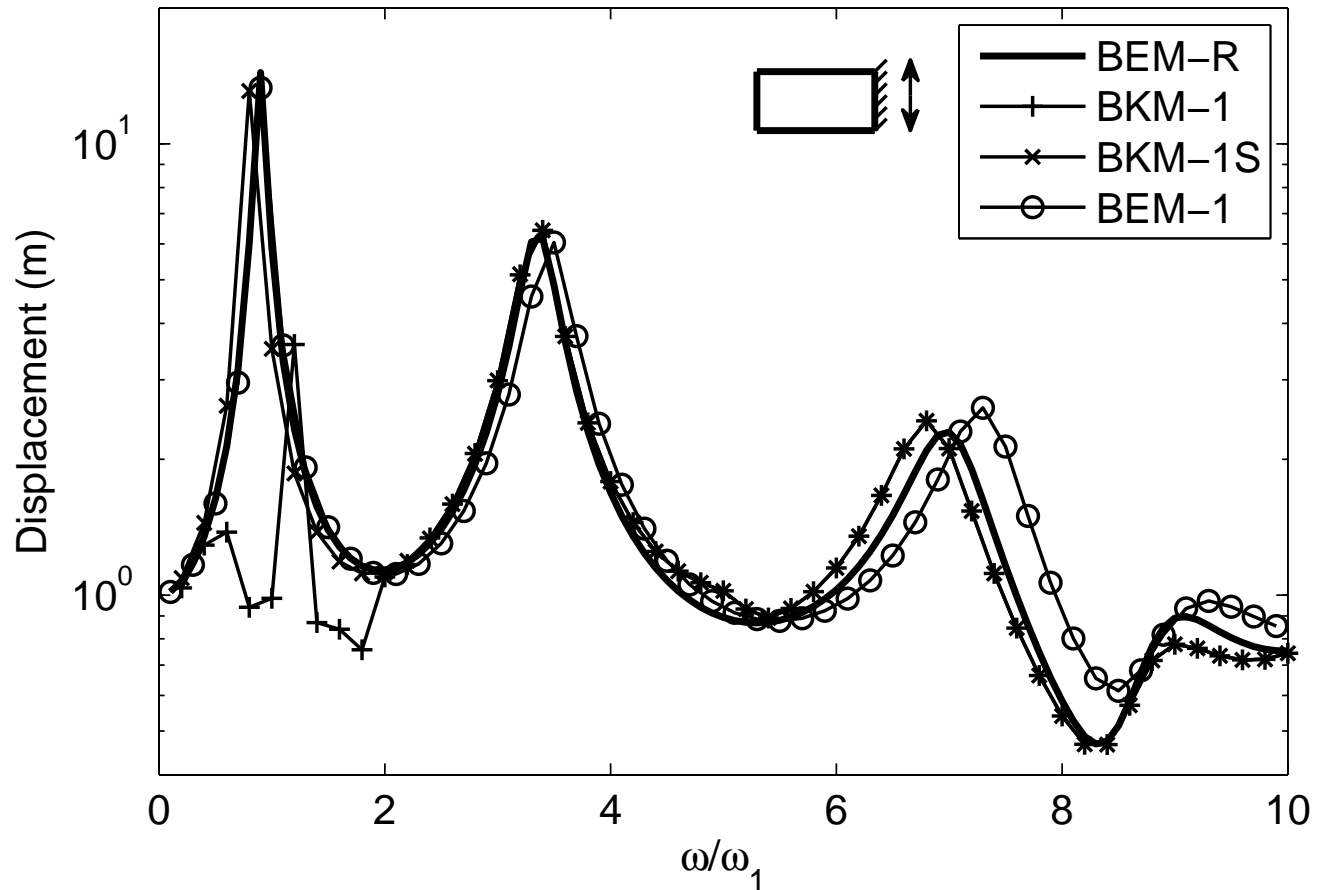
Anillo



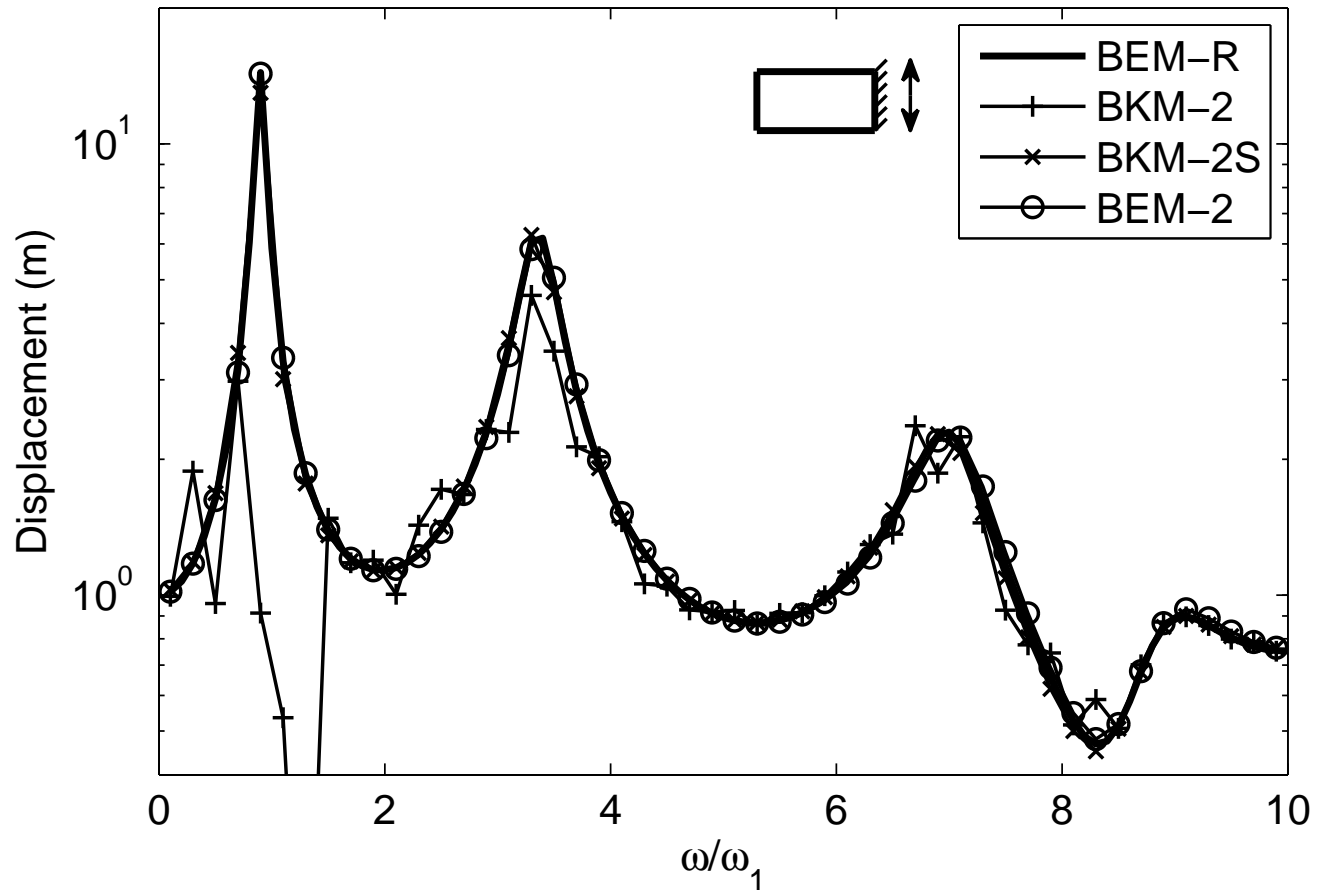
Anillo



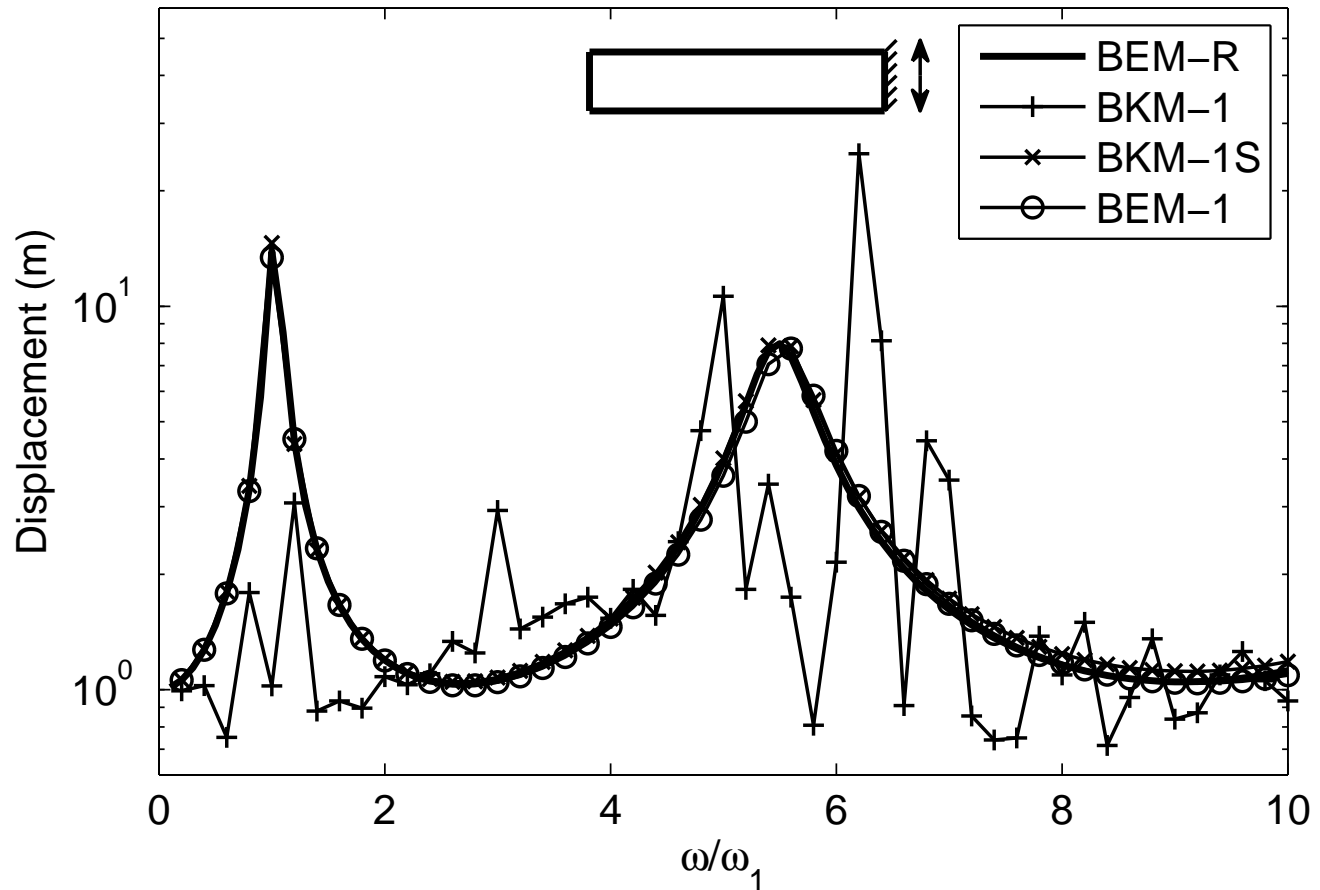
Viga corta



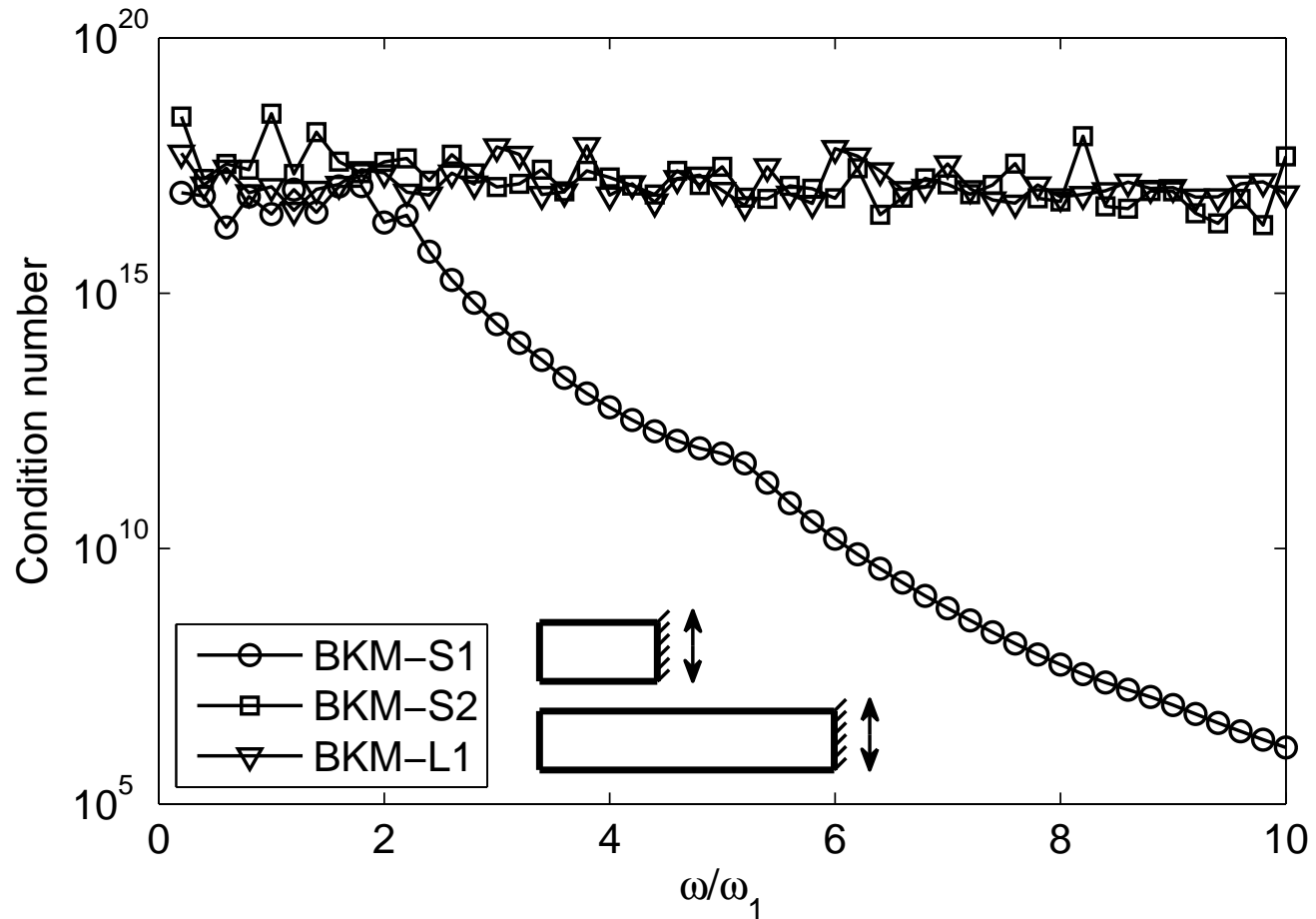
Viga corta



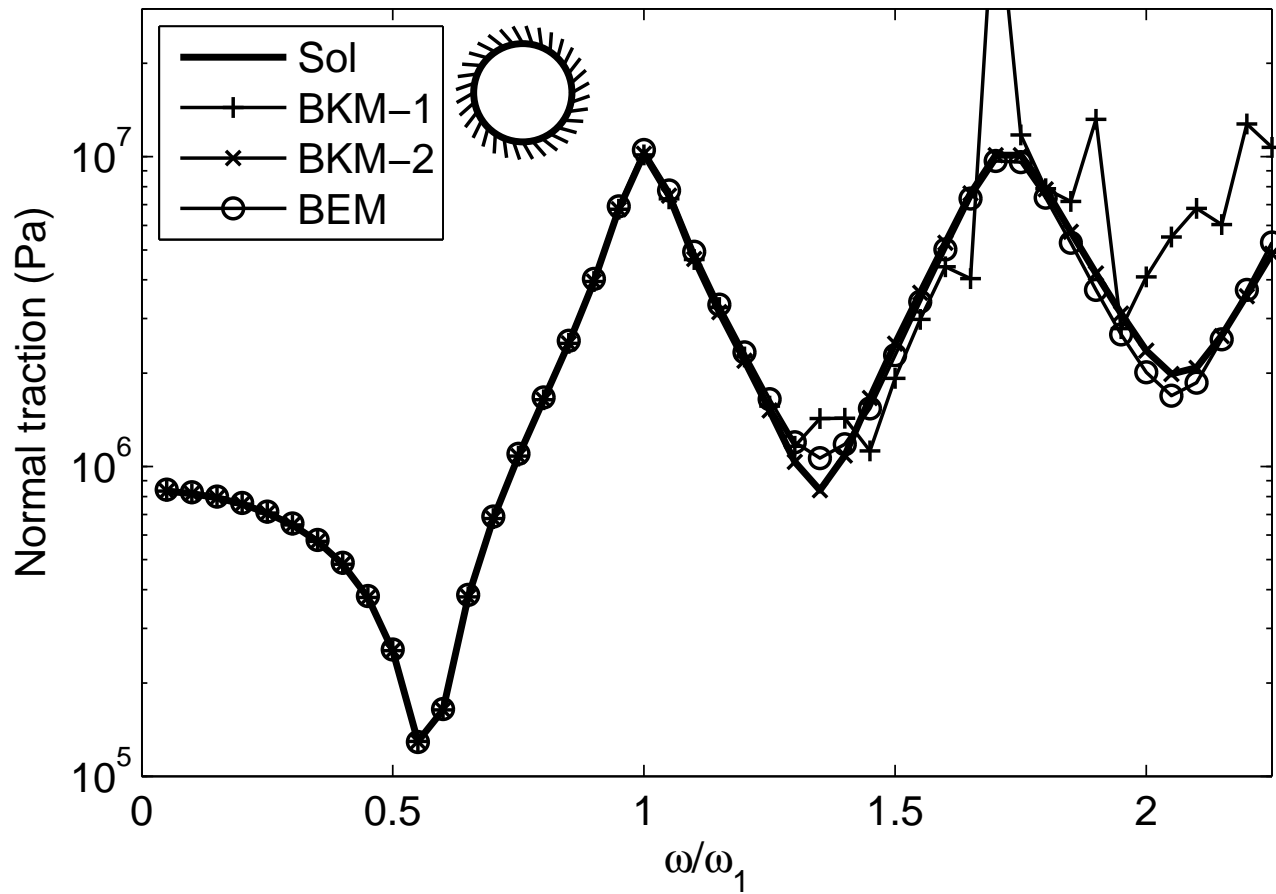
Viga larga



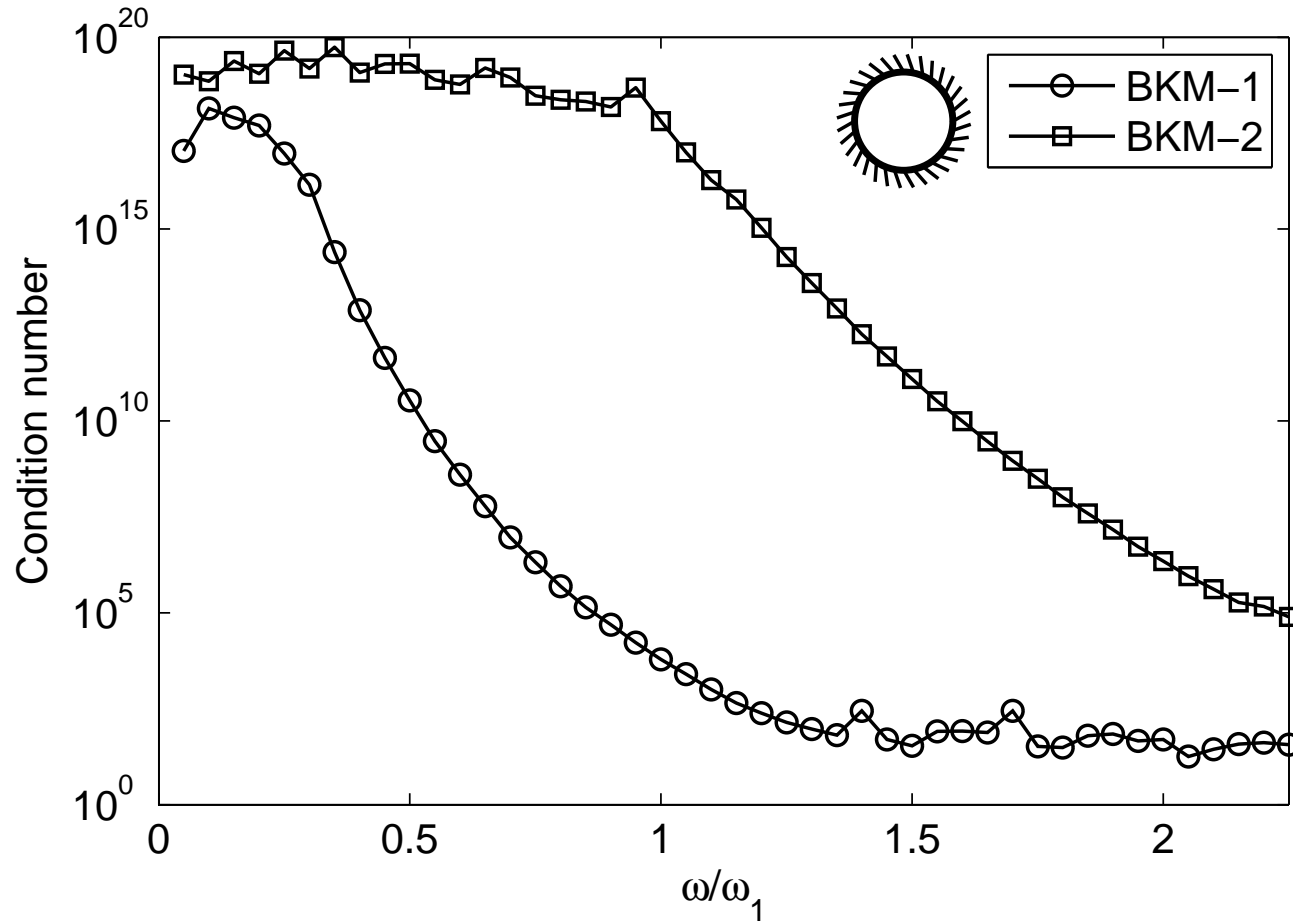
Vigas – número de condición



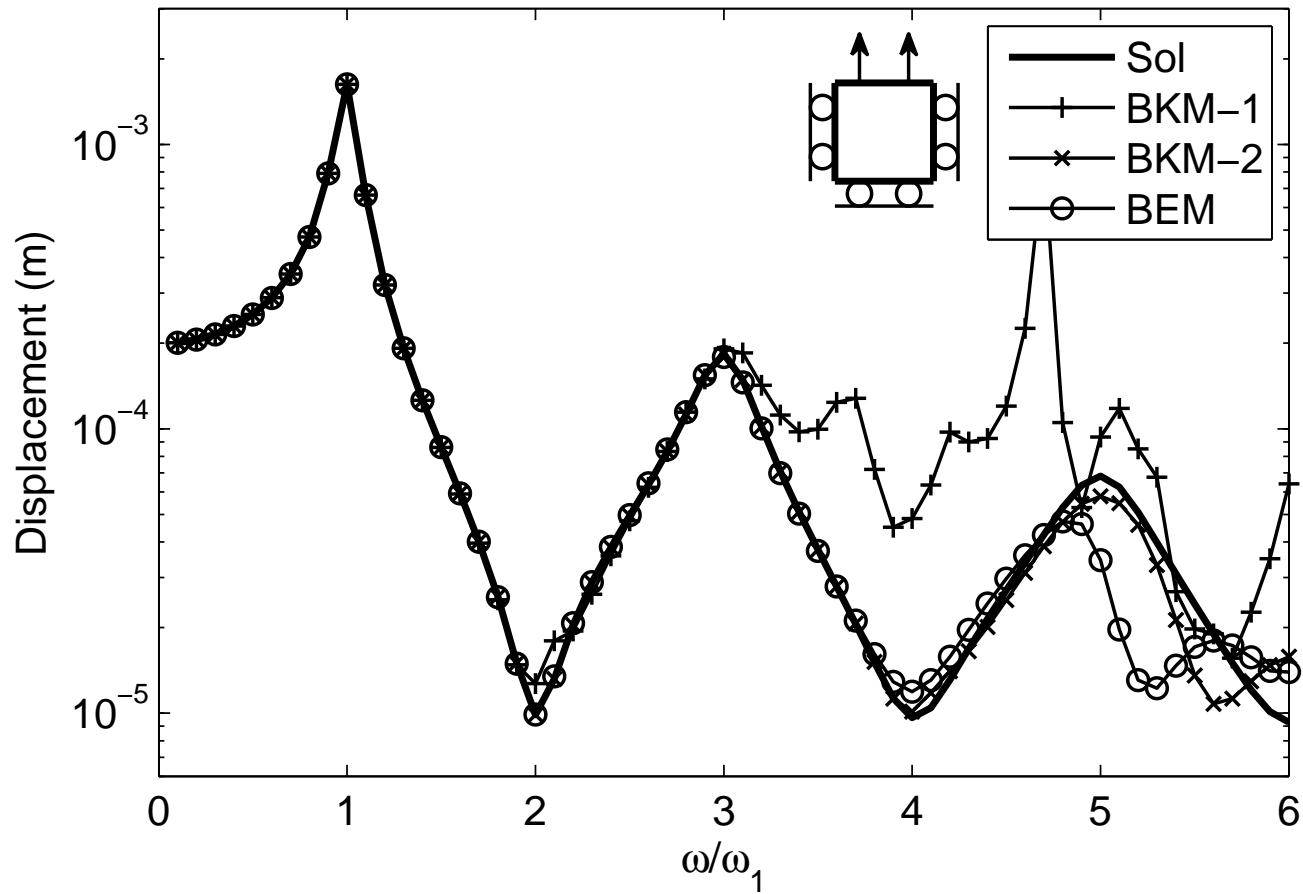
Esfera



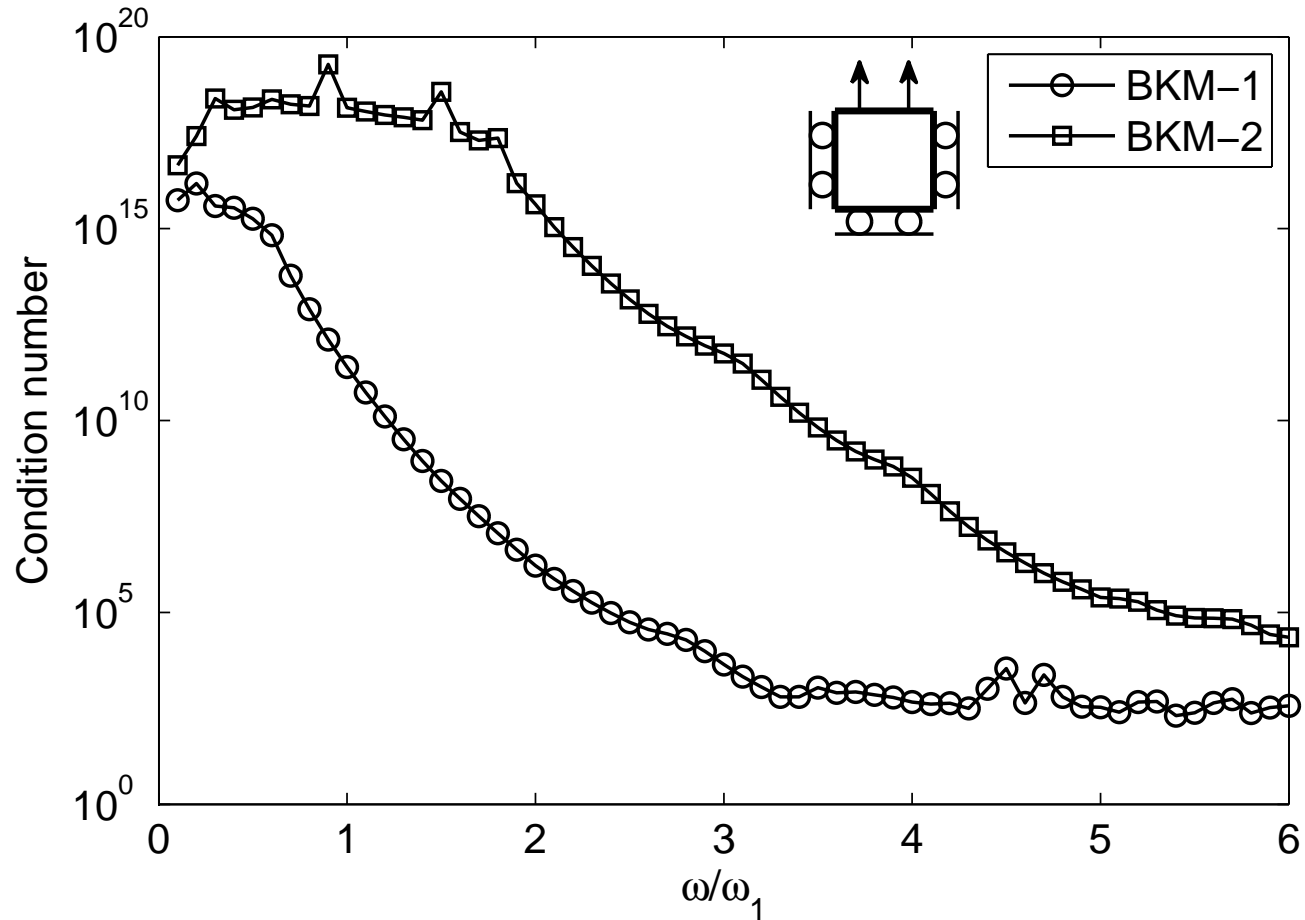
Esfera – número de condición



Cubo



Cubo – número de condición





Contenido

■ Preliminares

- Objetivo
- Ecuación de campo para problemas de viscoelasticidad armónicos

■ Boundary Knot Method

- Función radial de Trefftz

■ Resultados

- Ejemplos
- Conclusiones



Conclusiones

- Fue mostrado como obtener la función radial de Trefftz para la implementación del Boundary Knot Method en problemas de viscoelasticidad.
- Para algunos problemas sencillos se obtuvieron buenos resultados.
- El número de condición de los sistemas lineales es muy alto. Para los problemas de vigas no fue posible obtener buenos resultados.
- Soluciones posibles:
 - Trabajar con precisión extendida.
 - Utilizar técnicas de regularización.