Ejercicios de dinámica unidimensional.

Heber Enrich

Segundo semestre de 2006.

Ejercicio 1. Probar que si $f : N \mapsto N$ es un biunívoca, entonces $A \subset N$ es invariante si y solo sí $f(A) = A$.

Ejercicio 2. Probar que el conjunto de los puntos periódicos está incluido en el conjunto de los puntos ω-límite.

Ejercicio 3. Probar que el conjunto ω-límite es cerrado.

Ejercicio 4. Probar que el conjunto de los puntos fijos de un homeomorfismo $f : N \mapsto N$ es invariantes. Ídem el conjunto de los puntos periódicos. Ídem el conjunto de los puntos preperiódicos. Probar que toda preimagen conexa de un intervalo no errante de f es invariante.

Ejercicio 5. Sean f, g y $h : I \mapsto I$ un difeomorfismos C^r con $r \geq 1$ tales que $f = h^{-1} \circ g \circ h$. Sea t_0 un punto fijo de f (y por lo tanto $h(t_0)$ es un punto fijo de g). Probar que $f'(t_0) = g'(t_0)$.

Ejercicio 6. Sea $f : I \mapsto I$ un difeomorfismo C^1, sea t_0 un punto fijo. Probar que si $|f'(t_0)| < 1$ entonces hay un entorno de t_0 contenido en $W^s(t_0)$. Probar que si $|f'(t_0)| > 1$ entonces hay un entorno de t_0 tales que los puntos en ese entorno reducido lo dejan al iterar por f. Dar ejemplos en que $|f'(t_0)| = 1$, pero se pueden dar la primera situación; ídem la segunda situación; ídem los puntos a la derecha de t_0 se aproximan a t_0, los puntos a la izquierda se alejan.

Ejercicio 7. Sea $f : I \mapsto I$ una función C^1 y t_0 un punto fijo. Probar que si $f'(t_0) < 0$, existe un abierto U conteniendo a t_0 tal que si $t \in U$, entonces t y $f(t)$ están a distintos lados de t_0. Probar que si $f'(t_0) > 0$, existe un abierto U conteniendo a t_0 tal que si $t \in U$, entonces t y $f(t)$ están del mismo lado de t_0.

Ejercicio 8. Sea $f : S^1 \mapsto S^1$ un homeomorfismo. Probar que tiene un levantamiento $F : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$. Probar que dos levantamientos de un mismo homeomorfismo difieren en una traslación. (Es decir, si F y G son levantamientos de f, entonces $F(t) - G(t)$ es constante entera.)

Ejercicio 9. $F : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ es un levantamiento de algún homeomorfismo $f : S^1 \mapsto S^1$ si y solo si o bien $F(x + n) = F(x) + n$ o bien $F(x + n) = F(x) - n$. ¿En qué caso vale el signo $+$ y en qué caso el signo $-$?

Ejercicio 10. Sea $f : S^1 \mapsto S^1$ un homeomorfismo que preserva la orientación. Probar:

a. Cualquier levantamiento es estrictamente creciente.

b. Si F es un levantamiento, entonces $F-\mathrm{id}$ es periódico con período 1.

Ejercicio 11. a. Probar que las contracciones $f(x) = x/2$ y $g(x) = x/3$ son conjugadas.

b. Probar que las contracciones $f(x) = x/2$ y $g(x) = -x/2$ no pueden ser conjugadas.

Ejercicio 12. Sea dada $f(x) = Ax^2 + Bx + C$. Probar que existe una función $h(x) = mx + n$ y un real c tal que $h(x)$ conjuga a f y $q_c(x) = x^2 + c$.

Ejercicio 13. Sea $T : [0, 1] \mapsto [0, 1]$ (el "tent-map") definida por:

$$T(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x \in [0, \frac{1}{2}] \\ 2(1-x) & \text{si } x \in (\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

Probar que $h(x) = \cos^2(\frac{\pi}{2}(1 - x))$ conjuga $\varphi : [0, 1] \mapsto [0, 1]$ dada por $\varphi(x) = 4x(1 - x)$ y el "tent-map".

Ejercicio 14. Sea $f(x) = |x-1|$. Hallar sus puntos fijos, y sus puntos finalmente (a veces llamados "eventualmente" por una mala traducción de "eventually") fijos. Hallar el conjunto estable de todos los puntos fijos.

Ejercicio 15. Hallar todos los puntos que son finalmente fijos a 0 después de exactamente tres iterados de $f(x) = 4x(1 - x)$.

Ejercicio 16. Sea la función "tent-map" definida en el ejercicio 13.

a. Probar que T tiene 2^n puntos repulsores.

b. Probar que el conjunto de puntos periódicos de T es denso en $[0, 1]$.

c. Mostrar que si $c < \frac{1}{4}$, entonces $q(x) = x^2 + c$ es conjugado a $f(x) = vx(1 - x)$ para algún v. (Sugerencia: recordar 12.) Probar que $q(x)$ tiene un único punto fijo atractor si $-\frac{3}{4} < c < \frac{1}{4}$. ¿Qué sucede si $c < -\frac{3}{4}$? ¿Cómo es la dinámica de $q(x)$ si $c > \frac{1}{4}$?

Ejercicio 17. Probar que toda función lispchitziana en un intervalo es de variación acotada.

Ejercicio 18. Probar que una función tiene distorsión 0 en un intervalo si y solo si es afín.

Ejercicio 19. Dibujar el gráfico de una función continua $f : I\!R \mapsto I\!R$ con un punto periódico de período tres. ¿Qué otros puntos periódicos tiene la función? (Sugerencia: elegir la órbita periódica primero y luego graficar la función).

Ejercicio 20. Sean $a < b < c$ tres reales y una función continua $f : I\!R \mapsto I\!R$ tales que $f(a) = b$; $f(b) = c$; $f(c) = a$; sea $I_0 = [a, b]$; $I_1 = [b, c]$. Probar que $I_1 \subset f(I_0)$, que $I_1 \subset f(I_1)$ y que $I_0 \subset f(I_1)$

Ejercicio 21. Sea $f : S^1 \to S^1$ una transformación continua con una órbita periódica de período 3. Muestre que si un levantamiento $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de f también tiene una órbita periódica de período 3, entonces f tiene órbitas periódicas de todos los períodos. Dar un ejemplo mostrando que la afirmación puede no ser cierta si se elimina la condición de que $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tenga una órbita periódica de período 3.

Ejercicio 22. Mostrar que la transformación $Q_\mu : [0,1] \to [0,1]$ definida por $Q_\mu(x) = \mu(1-x)x$ tiene órbitas periódicas de todos los períodos para μ suficientemente cerca de 4.

Ejercicio 23. Mostrar que si una transformación continua $f : [0,1] \to [0,1]$ tiene una órbita periódica p de período 4 tal que $p < f(p) < f^2(p) < f^3(p)$, entonces tiene órbitas periódicas de todos los períodos.

Ejercicio 24. Mostrar que existen parámetros $\mu \in [0,4]$ tales que $Q_\mu : [0,1] \to [0,1]$ definida por $Q_\mu(x) = \mu(1-x)x$ tiene órbitas periódicas de período 1, 2, 4, y no tiene otras órbitas periódicas.

Ejercicio 25. Notación: sea $D^i f$ la derivada i-ésima de f.

a. Sean $f : I \to I$, $g : I \to I$, $f, g \in C^2$. Suponiendo que $Df(x)$ es distinto de 0, se define $\mathcal{N}(f)(x) = D \log |Df(x)|$. Probar que

$$\mathcal{N}(f \circ g)(x) = \mathcal{N}(f)(g(x))Dg(x) + \mathcal{N}(g)(x)$$

Concluir que

$$\mathcal{N}(f^n)(x) = \sum_{i=0}^{n-1} \mathcal{N}(f)(f^i(x))Df^i(x)$$

b. Sean $f : I \to I$, $g : I \to I$, $f, g \in C^3$. Suponiendo que $Df(x)$ es distinto de 0, se define $\mathcal{S}(f) = D\mathcal{N}(f) - \frac{1}{2}\mathcal{N}(f)$. Probar que

$$\mathcal{S}(f \circ g)(x) = \mathcal{S}(f)(g(x))(Dg(x))^2 + \mathcal{S}(g)(x)$$

Concluir que

$$\mathcal{S}(f^n)(x) = \sum_{i=0}^{n-1} \mathcal{S}(f)(f^i(x))(Df^i(x))^2$$