Homeomorfismos y difeomorfismos en dinámica unidimensional.

Heber Enrich

Segundo semestre de 2006.
Material tomado de la bibliografía, entre otros y muy en particular, del Palis-de Melo y del Nitecki.

1 Introducción: la familia cuadrática.

Charles Sparrow, 1988, An introduction to the dynamical of unimodal maps. Summer school on dynamical systems ICTP.

2 Algunas definiciones previas necesarias.

Veremos aquí algunas definiciones que serán constantemente usadas durante el curso; puede ser una sección un poco árida, pero es necesario formalizar el lenguaje. También es posible que dé cierto trabajo su comprensión cabal en esta instancia, de cualquier manera su utilización en el resto del curso permitirá afianzar estos conceptos. Si bien trabajaremos con la dinámica definida por una función $f : S^1 \to S^1$ o bien $f : I \to I$, donde I es un intervalo real, muchas de las definiciones y conceptos que siguen admiten generalizaciones. Comenzaremos formalizando algunos conceptos vistos en los ejemplos introductorios, trabajando con la topología usual en I o en S^1, que para unificar definiciones, denotaremos con N a cualquiera de esos conjuntos. Nos interesa especialmente referir dichas definiciones al contexto en que el sistema dinámico está dado por una transformación en N, no obstante, con modificaciones mínimas, la casi totalidad de estas definiciones pueden ser dadas para flujos y para sistemas dinámicos definidos en variedades de dimensión mayor que 1.

2.1 Dinámica topológica.

Definición 2.1. Sea $f : N \to N$; $p_0 \in N$. La **semiórbita positiva** de p_0 es el conjunto $o_f^+(p_0) = \{f^n(p_0); n \in \mathbb{N}\}$ (en $\mathbb{N}$ incluimos el 0).

Definición 2.2. Sea $f : N \to N$ un homeomorfismo; $p_0 \in N$. La **órbita** de p_0 es el conjunto $o_f(p_0) = \{f^n(p_0); n \in \mathbb{Z}\}$.

Definición 2.3. Sea $f : N \to N$; $p_0 \in N$. Diremos que p_0 es un **punto fijo** de f si $f(p_0) = p_0$.

Definición 2.4. Sea $f : N \to N$; $p_0 \in N$. Diremos que p_0 es un **punto periódico de período** $k > 0$ de f si $f^k(p_0) = p_0$ y $f^i(p_0) \neq p_0$ $\forall i = 1, \ldots k-1$.

Definición 2.5. Sea $f : N \to N$. El **conjunto estable de la órbita periódica por f de un punto** p_0 es el conjunto de puntos $y \in N$ tales que $\lim_{j\to\infty} \operatorname{dist}(f^j(y), o(p_0)) = 0$. Se denota $W^s(o(p_0))$. Más en general, El **conjunto estable de un conjunto** A es el conjunto de puntos $y \in N$ tales que $\lim_{j\to\infty} \operatorname{dist}(f^j(y), f^j(A)) = 0$. Se denota $W^s(A)$.

Definición 2.6. Sea $f : N \to N$; $p_0 \in N$. Diremos que p_0 es un **punto preperiódico** de f si no es periódico pero existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $f^k(p_0)$ es periódico.

Ejercicio: encontrar un ejemplo de f con algún punto preperiódico.

Definición 2.7. Sea $f : N \to N$; $p_0 \in N$. El **ω-límite** de p_0 es el conjunto $\omega(p_0) = \{p \in N;\ \exists n_i \to +\infty,\ f^{n_i}(p_0) \to p\}$. (Si f es invertible, se define análogamente pero con f^{-1} en lugar de f el conjunto α-límite.)

Definición 2.8. Sea $f : N \to N$. El conjunto **ω-límite** de f es el conjunto de puntos que son ω-límite de algún punto de N.

Definición 2.9. Decimos que I es un **intervalo errante** de la transformación f si:

a. Los intervalos $I, f(I), \dots, f^j(I), \dots$ son disjuntos dos a dos.

b. El ω-límite de los puntos de I no es igual a una única órbita periódica.

Observación 2.10. No confundir la definición de **"intervalo errante"** con la de **"conjunto errante"**. Es más común en sistema dinámicos encontrar el concepto de conjunto errante (o conjunto no errante) (para la definición de conjunto no errante ver por ejemplo Eleonora Catsigeras, Introducción a la teoría cualitativa de las ecuaciones diferenciales), pero al menos inicialmente encontraremos en este curso el concepto de intervalo errante sin perjuicio que oportunamente definamos conjunto no errante.

Definición 2.11. Sea $f : N \to N$. Se dice que el conjunto $A \in N$ es **invariante** si $f^{-1}(A) = A$.

Ejemplo 2.12. Probemos la siguiente afirmación: Sea $f : I \to I$ una transformación continua y biyectiva; si f preserva el orden, entonces toda órbita es asintótica a un punto fijo; si f invierte el orden, entonces cualquier órbita de f es asintótica o bien a un punto fijo o bien a un punto periódico de período dos. En el caso del círculo, la afirmación puede no ser cierta (es lo que sucede con una rotación de ángulo irracional). Pero si $f : S^1 \to S^1$ conserva la orientación y tiene un punto fijo, entonces la afirmación es cierta. También se extiende al caso en que f invierte la orientación.

Demostración. □

2.2 Homeomorfismos y difeomorfismos de $\mathbf{S}^1$.

Vayamos al círculo que consideraremos en el plano complejo representado por $z = e^{2\pi i t}$ con $t \in \mathbb{R}$.

Definición 2.13. Dada cualquier transformación continua $f : S^1 \to S^1$ un **levantamiento** de f es una transformación continua $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que si $\Pi : \mathbb{R} \to S^1$ se define como $\Pi(t) = e^{2\pi i t}$, entonces

$$\begin{array}{ccccc} & \mathbb{R} & \xrightarrow{F} & \mathbb{R} & \\ \Pi & \downarrow & & \downarrow & \Pi \\ & S^1 & \xrightarrow{f} & S^1 & \end{array}$$

conmuta (es decir, $\Pi \circ F = f \circ \Pi$ o equivalentemente, $e^{2\pi i F(t)} = f(e^{2\pi i t})$).

En general, indicaremos con letras mayúsculas correspondientes a levantamientos de transformaciones continuas en el círculo, que serán indicados con las correspondientes minúsculas.

Teorema 2.14. *Dado un homeomorfismo $f : S^1 \to S^1$, tiene un levantamiento $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Dos levantamientos de un mismo homeomorfismo difieren en una traslación. (Es decir, si F y G son levantamientos de f, entonces $F(t) - G(t)$ es constante entera.)*

Demostración. Para la existencia, importa visualizar cómo podría ser la gráfica de F. Para una demostración formal, supongamos primero que f preserva la orientación. Definamos $F(t) = \arg(f(e^{2\pi i t}))/(2\pi) + \mathrm{E}(t)$, donde arg es el único argumento en el intervalo $\mathrm{Arg}(f(1)) + [0, 2\pi)$ y E es la parte entera. El resto queda como ejercicio. $\square$

Diremos que f es C^r si y sólo si un levantamiento es C^r.

Teorema 2.15. *Un homeomorfismo $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es un levantamiento de algún homeomorfismo $f : S^1 \to S^1$ si y sólo si o bien $F(x + n) = F(x) + n$ o bien $F(x + n) = F(x) - n$.*

2.3 Clasificación de transformaciones.

Nos gustaría definir alguna relación de equivalencia entre transformaciones, por la que de alguna manera, pudiéramos decir que dos transformaciones "son la misma". Vamos a inspirarnos en álgebra lineal, una relación de equivalencia común entre dos matrices cuadradas consiste en la siguiente: A y B son equivalentes si existe una matriz cuadrada invertible T ("matriz de cambio de coordenadas" cuando miramos las matrices como correspondientes a transformaciones lineales) tal que $AT = TB$. De la misma forma, diremos que dos transformaciones f y g definidas en un espacio topológico son la misma, si existe un "cambio de coordenadas" h tal que $g \circ h = h \circ f$. Los "cambios de coordenadas" en espacios topológicos se materializan por homeomorfismos. Estas ideas conducen a la siguiente definición por la que diremos que dos transformaciones representan "el mismo sistema dinámico" si son conjugadas:

Definición 2.16. Dos transformaciones $f : N \to N$ y $g : N \to N$ en un espacio topológico N son **conjugadas** si existe un homeomorfismo $h : N \to N$ tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccccc} & N & \xrightarrow{f} & N & \\ h & \downarrow & & \downarrow & h \\ & N & \xrightarrow{g} & N & \end{array}$$

es decir, $g \circ h = h \circ f$.

Usando las propiedades de los homeomorfismos, no es difícil probar que una conjugación lleva puntos fijos de una transformación en puntos fijos de la otra, puntos periódicos en puntos periódicos, etc.

Hay otras posibles relaciones de equivalencia además de la conjugación, con algunas de ellas trabajaremos más adelante. Sin embargo, la conjugación de transformaciones es sin duda la más importante.

Para el caso de flujos también se pueden definir similares conceptos; pero en lugar de la conjugación (que es posible definirla), resulta más adecuada (por alguna de cuyas razones veremos luego) la equivalencia topológica que la conjugación. Sea $\mathcal{X}^r(S^1)$ el conjunto de campos vectoriales C^r en S^1. Dos campos vectoriales X e Y con flujos correspondientes $X_t(p)$ e $Y_t(p)$ con $t \in \mathbb{R}$ y $p \in S^1$ son topológicamente equivalentes si existe un homeomorfismo $h : S^1 \to S^1$ que lleva órbitas de X en órbitas de Y conservando la orientación, esto significa que dado $p \in S^1$ y $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que para $0 < t < \delta$, $h(X_t(p)) = Y_{t'}(h(p))$ para algún $0 < t' < \varepsilon$.

Ejemplo 2.17. Sean las contracciones en $\mathbb{R}$: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; $f(x) = x/2$; $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; $g(x) = x/3$. Probaremos que son conjugadas, para ello fijemos $a > 0$, $b < 0$, y consideremos los intervalos $[f(a), a]$, $[b, f(b)]$, $[g(a), a]$ y $[b, g(b)]$. Vamos a definir un homeomorfismo $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que los conjugue. Definamos de manera arbitraria $h|_{[b,f(b)]\cup[f(a),a]}$ homeomorfismo tal que $h|_{[b,f(b)]\cup[f(a),a]} : [b, f(b)] \cup [f(a), a] \to [b, g(b)] \cup [g(a), a]$ tal que $h(a) = a$, $h(b) = b$, $h(f(a)) = g(a)$ y $h(f(b)) = g(b)$ (hacer dibujo). Para todo $0 \neq t \in \mathbb{R}$, existe un entero n tal que $f^n(x) \in [b, f(b)] \cup [f(a), a]$. Definamos $f(x) = g^{-n}(h(f^n(x)))$ si $x \neq 0$; $h(0) = 0$. No es difícil ver que h está bien definida y es una conjugación entre f y g.

Por otro lado, las contracciones $f(x) = x/2$ y $g(x) = -x/2$ no pueden ser conjugadas.

Más en general, resulta que dos contracciones de $\mathbb{R}$ son conjugadas si y sólo si ambas preservan o invierten la orientación de $\mathbb{R}$.

3 Teoría clásica de homeomorfismos y difeomorfismos en S^1.

3.1 Homeomorfismos en S^1: resultados de Poincaré.

En esta subsección y en la siguiente supondremos que nuestras transformaciones conservan la orientación. Comenzaremos con algunos resultados de Poincaré en 1881; para obtener los mismo previamente definió número de rotación. Apuntando a esa definición comenzaremos con el siguiente lema:

Lemma 3.1. *Sean $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dos funciones monótonas tales que $F(x+1) = F(x)+1$ y $G(x + 1) = G(x) + 1$. Entonces:*

a. $\rho(F) = \lim_{n\to\infty} F^n(0)/n$ *existe y* $|(F^n(0)/n) - \rho(f)| \leq 1/n$.

b. $\lim_{n\to\infty}(F^n(x) - x)/n$ *existe y es igual a* $\rho(F)$.

c. $\rho(f) = m/n$ *con* $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{Z}^+$ *si y sólo si existe* $x \in \mathbb{R}$ *tal que* $F^n(x) = x + m$.

d. Dado $\varepsilon > 0$, *existe* $\delta > 0$ *tal que si* $||F-G||_0 = \sup |F(x)-G(x)| < \delta$ *entonces* $|\rho(F)-\rho(G)| < \varepsilon$.

e. $\rho(F+n) = \rho(F) + n$ *para todo entero* n.

Demostración. a. Empezamos con un par de afirmaciones:

Afirmación 3.2. *Sea* $M_k = \max_{x\in\mathbb{R}}(F^k(x) - x)$ *y* $m_k = \max_{x\in\mathbb{R}}(F^k(x) - x)$. *Entonces* $M_k - m_k < 1$.

Demostración. (de la afirmación) De hecho, como $F(x+1) = F(x)+1$, entonces $F^k(x+1) = F^k(x) + 1$, de donde $\varphi = F^k - id$ es periódica de período 1. En consecuencia, existen x_k e $X_k \in \mathbb{R}$ con $0 \leq x_K - X_k < 1$ tales que $\varphi(x_k) = m_k$ y $\varphi(X_k) = M_k$. Como F^k es monótona no decreciente, resulta $F^k(X_k) \leq F^k(x_k)$. Luego, $F^k(X_k) - X_k - F^k(x_k) + x_k < 1$, lo que prueba la afirmación. □

Afirmación 3.3. $\forall x, y \in \mathbb{R}$, $F^k(y) - y - 1 \leq F^k(x) - x \leq F^k(y) - y + 1$.

Demostración. (de la afirmación) $F^k(y) - y - 1 \leq M_k - 1 \leq m_k \leq F^k(x) - x \leq M_k \leq m_k + 1 \leq F^k(y) - y + 1$. □

Para probar el primer ítem del lema, hagamos $y = 0$; $x = F^{k(j-1)}(0)$ en (3.3), para obtener $F^k(0) - 1 \leq F^{kj}(0) - F^{k(j-1)}(0) \leq F^k(0) + 1$. Sumando las desigualdades desde $j = 1$ hasta n se tiene

$$n(F^k(0)-1) = \sum_{j=1}^{n}(F^k(0)-1) \leq \sum_{j=1}^{n}(F^{kj}(0) - F^{k(j-1)}(0)) \leq \sum_{j=1}^{n}(F^k(0)+1) = n(F^k(0)+1)$$

o bien

$$n(F^k(0)-1) \leq F^{kn}(0) \leq n(F^k(0)+1)$$

Dividiendo entre kn resulta

$$\frac{F^k(0)}{k} - \frac{1}{k} \leq \frac{F^{kn}(0)}{kn} \leq \frac{F^k(0)}{k} + \frac{1}{k}$$

o equivalentemente

$$\left|\frac{F^{kn}(0)}{kn} - \frac{F^k(0)}{k}\right| \leq \frac{1}{n} \tag{1}$$

Intercambiando k y n, se prueba análogamente:

$$\left|\frac{F^{kn}(0)}{kn} - \frac{F^n(0)}{n}\right| \leq \frac{1}{k} \tag{2}$$

Por lo tanto,

$$\left|\frac{F^n(0)}{n} - \frac{F^k(0)}{k}\right| \leq \frac{1}{n} + \frac{1}{k} \tag{3}$$

Luego, $F^k(0)/k$ es una sucesión de Cauchy, y converge a un número que denotaremos $\rho(F)$. Haciendo k tender a infinito en (3), se prueba a.

b. Haciendo $y = 0$ en la afirmación 3.3, resulta $F^k(0) - 1 \leq F^k(x) - x \leq F^k(0) + 1$. Dividiendo estas desigualdades entre k y haciendo k tender a infinito, se prueba b.

c. Supontamos que existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $F^n(x) = x + m$ con $m, n \in \mathbb{Z}$, $n > 0$. Resulta por inducción que $F^{nk}(x) = x + km$. Luego, $\rho(F) = \lim_{k\to\infty}(F^{kn}(x) - x)/(kn) = \lim_{k\to\infty} km/(kn) = m/n$.

   Sea ahora $\rho(F) = m/n$ y supongamos por absurdo que $F^n(x) \neq x + m$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Para fijar ideas, supongamos que $F^n(x) > x + m$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Como $F^n -$ id es periódico, existe $a > 0$ tal que $F^n(x) - x \geq m + a \; \forall x \in \mathbb{R}$. Por lo tanto, $F^{kn}(x) - x \geq km + ka$, y por lo tanto, $\rho(F) \geq (m + a)/n$, que es una contradicción.

d. Observemos que

$$|\rho(F) - \rho(G)| \leq \left|\rho(G) - \frac{G^k(0)}{k}\right| + \left|\frac{G^k(0)}{k} - \frac{F^k(0)}{k}\right| + \left|\frac{F^k(0)}{k} - \rho(F)\right| \leq$$

$$\leq \frac{1}{k} + \frac{1}{k}\left|G^k(0) - F^k(0)\right| + \frac{1}{k}$$

   Fijemos $k > 4/\varepsilon$ y sea $\delta > 0$ tal que $|G^k(0) - F^k(0)| < k\varepsilon/2$ si $||G - F||_0 < \delta$. Luego, $|\rho(F) - \rho(G) < \varepsilon$ si $||F - G||_0 < \delta$.

e. Por inducción, $(F + n)^k(x) = F^k(x) + kn$. Luego,

$$\rho(F + n) = \lim_{k\to\infty} \frac{(F + n)^k(0)}{k} = \lim_{k\to\infty} \frac{F^k(0) + kn}{k} = \rho(F) + n$$

□

El lema 3.1e nos dice que el número de rotación no depende del levantamiento de f que consideremos, y por lo tanto, que la siguiente definición es coherente:

Definición 3.4. Se define número de rotación de un homeomofismo $f : S^1 \to S^1$ como $\rho(f) = \rho(F)$ (mód $\mathbb{Z}$).

La importancia de definir número de rotación está en su invariancia por conjugaciones:

Teorema 3.5. *Si $f : S^1 \to S^1$, $g : S^1 \to S^1$ y $h : S^1 \to S^1$ son tres homeomorfismos tales que h* ***preserva el orden*** *y $g = h^{-1} \circ f \circ h$, entonces $\rho(f) = \rho(g)$*

Nos importa ver las implicaciones dinámicas de la definición de número de rotación, pero previamente nos dirigimos a demostrar un teorema (teorema 3.9) que será de utilidad más adelante (4.16). Primero veremos un par de observaciones y un lema.

Observación 3.6. Resulta de la demostración del lema 3.1 que si

$$x + l_1 < F^q(x) < x + l_2, \; \forall x \in \mathbb{R},$$

para algún $q \in \mathbb{N}$ y $l_1.l_2 \in \mathbb{R}$ fijos, entonces

$$\frac{l_1}{q} \leq \rho(F) \leq \frac{l_2}{q}$$

Observación 3.7. Para todo irracional α y para todo natural positivo n existe un entero p_n tal que $n\alpha + p_n \in (0,1)$.

Lemma 3.8. *Sea α un número irracional, sea C el conjunto $\{n\alpha+p_n;\ n \in \mathbb{N}^+, p_n \in \mathbb{Z}, n\alpha+p_n \in (0,1)\}$. Entonces, C es denso en $(0,1)$.*

Demostración. El resultado es clásico en álgebra, daremos una demostración independiente. Primero, probaremos que existe una sucesión e_n de elementos de C que converge a 0. El conjunto C es un conjunto de números todos diferentes porque α es irracional; como C está en el compacto $[0,1]$, tiene un punto de acumulación. Por lo tanto dado k natural positivo, existen dos números $a_k > b_k$ en C, $a_k = n_k\alpha + p_{n_k}$, $b_k = m_k\alpha + p_{m_k}$ tales que $0 < c_k = a_k - b_k < 1/k$, y por lo tanto, c_k tiende a 0. Si existe una subsucesión $c_{k_l} = e_l$ de c_k tal que $n_{k_l} > m_{k_l}$, entonces $e_l = (n_{k_l} - m_{k_l})\alpha + (p_{n_{k_l}} - p_{m_{k_l}}) \in C$, y la afirmación está probada considerando e_l. En cambio, si $n_k < m_k$ para todo k mayor que un cierto K, la sucesión $d_k = 1 - c_k = (m_k - n_k)\alpha + p_{m_k} - p_{m_k} + 1$ está en C, y converge monótonamente a 1^-. La sucesión $e_k = d_{k+1} - d_k$ está en C, y tiende a 0, terminando de probar la afirmación

Para probar que C es denso en (0,1), tomemos un intervalo $I \subset (0,1)$. Existe r natural tal que la longitud de I es mayor que $1/r$. Sabemos que $0 < e_r < 1/r$, la sucesión $e_r, 2e_r, \dots, je_r, \dots$ tiene un elemento en I que también está en C. $\square$

Teorema 3.9. *Sea $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua monótona con $F(x+1) = F(x) + 1$ para todo $x \in \mathbb{R}$ y tal que verifica $\rho(F) = \alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Entonces $\rho(F - \varepsilon) < \rho(F)$ para todo $\varepsilon > 0$.*

Demostración. Del lema 3.1 c resulta que la gráfica de F^n no corta la gráfica de ninguna diagonal trasladada $x + p$. Luego, para cada $n \in \mathbb{N}$ existe p_n tal que

$$x + p_n < F^n(x) < x + p_0 + 1 \; \forall x \in \mathbb{R}$$

De la observación 3.6 resulta que para cada n, p_n también cumple $p_n < n\alpha < p_n + 1$. Sea $\varepsilon > 0$ arbitrario. Como α es irracional, el conjunto $\{n\alpha - p_n; n \in \mathbb{N}\}$ es denso en $(0,1)$ y por lo tanto existe n_0, que puede tomarse tan grande como se quiera, tal que $n_0\alpha < p_{n_0} + \varepsilon$. Como $\lim_{n\to\infty} F^n(0)/n = \alpha$, es posible tomar n_0 tal que además cumpla $F^{n_0}(0)/n_0 < (p_{n_0} + \varepsilon)/n_0$ y por lo tanto, existe n_0 tal que $F^{n_0}(0) < p_{n_0} + \varepsilon$. Definamos $F_\varepsilon = F - \varepsilon$. Admitamos (se probará a continuación) que existe $x_0 \geq 0$ tal que $F_\varepsilon^{n_0}(x_0) = F^{n_0}(0) - \varepsilon$. Entonces, $F_\varepsilon^{n_0}(x_0) = F^{n_0}(0) - \varepsilon < p_{n_0} \leq x_0 + p_{n_0}$. Aplicando la observación 3.6 resulta $\rho(F_\varepsilon) \leq p_{n_0}/n_0 < \alpha = \rho(F)$.

Resta probar que para todo $n \in \mathbb{N}^+$ existe $x_0 \geq 0$ tal que $F_\varepsilon^{n_0}(x_0) = F^{n_0}(0) - \varepsilon$. De hecho, como $x < y$ implica $F(x) < F(y)$, de $F_\varepsilon(0) = F(0) - \varepsilon$ se deduce que $F_\varepsilon^2(0) = F(F(0)-\varepsilon) - \varepsilon < F^2(0) - \varepsilon$, y por inducción resulta que para todo $j \in \mathbb{N}^+$, $F_\varepsilon^j(0) < F^j(0) - \varepsilon$, la igualdad vale solo para $j = 1$. Como para todo j, $\lim_{x\to\infty} F^j(x) = \infty$, por continuidad existe x_0 tal que $F_\varepsilon^j(x_0) = F^j(0) - \varepsilon$. $\square$

Examinemos ahora las implicaciones dinámicas de la definición de número de rotación. Ya sabemos que es racional si y sólo si hay puntos periódicos, nos va a interesar ver qué pasa si el número de rotación es irracional, es decir, cuando no existen puntos periódicos. Recordemos que para $x \in S^1$, $\omega(x)$ era el conjunto de puntos límite de la sucesión $\{f^n(x);\ n \in \mathbb{N}\}$.

Teorema 3.10. *Supongamos que $\rho(f)$ es irracional. Entonces:*

a. $\omega(x)$ no depende de x.

b. Si $E = \omega(x)$ (por la afirmación anterior, E no depende de x) entonces o bien E es perfecto (contiene a sus puntos de acumulación) y nunca denso (la intersección con cualquier intervalo no es densa en dicho intervalo), o es todo el círculo.

Demostración. Para probar a empezamos con una afirmación:

Afirmación 3.11. *Dado $x \in S^1$ y $m < n$ enteros distintos, sea $I = [f^m(x), f^n(x)]$. Entonces, para todo $y \in S^1$, existe $k > 0$ tal que $f^k(y) \in I$.*

Demostración. (de la afirmación) Al darle a k distintos valores ($k = 0, 1, \ldots$), los intervalos $f^{k(m-n)}(I)$ se tocan sólo en los extremos por lo que o bien después de una cantidad finita de intervalos llenan a S^1, o sus extremos convergen monótonamente a un punto fijo de f^{m-n}. La última posibilidad contradice la irracionalidad del número de rotación, por lo tanto, $y \in f^{k(m-n)}(I)$ para algún k, o equivalentemente, $f^{k(n-m)}(y) \in I$. $\square$

Continuamos con la prueba de a. Para ver que $\omega(x)$ es independiente de x, observemos que si tenemos una sucesión $f^{a_n}(x)$ de iterados de x que converge a $x_0 \in \omega(x)$ con $a_n \to \infty$, entonces por la afirmación existe $b_n \to \infty$ con $f^{b_n}(y) \in [f^{a_{n-1}}(x), f^{a_n}(x)]$, por lo que $f^{b_n}(y) \to x_0$, probando que $\omega(x) \subset \omega(y)$. Intercambiando x e y, resulta $\omega(x) = \omega(y)$.

Para probar b, sea $z \in E$, hay que probar que es de acumulación de E. Pero si $z \in E = \omega(z)$ (por la parte anterior) de donde existe una sucesión a_n tal que $z = \lim f^{a_n}(z)$, con $f^{a_n}(z)$ en E por la invariancia de E, y todos distintos porque no hay puntos periódicos.

Por definición, E es compacto invariante y no contiene ningún subconjunto compacto invariante no vacío. Pero por otro lado, la frontera de E es un subconjunto cerrado invariante, por lo que o bien la frontera es vacía y $E = S^1$, o coincide con E, y E es nunca denso. $\square$

El teorema anterior muestra que hay dos casos posibles para estudiar homeomorfismos con número de rotación irracional: diremos que el homeomorfismo es **transitivo** si $E = S^1$, **intransitivo** en caso contrario. Queremos seguir estudiando qué sucede en cada uno de esos casos con la dinámica del homeomorfismo, necesitaremos previamente una definición que debilita el concepto de conjugación:

Definición 3.12. Una **semiconjugación** de $f : N \to N$ a $g : N \to N$ donde N es un espacio topológico es una transformación continua $h : N \to N$ tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} N & \xrightarrow{f} & N \\ h \downarrow & & \downarrow h \\ N & \xrightarrow{g} & N \end{array}$$

Observar que no se requiere que h sea homeomorfismo, ni siquiera que sea sobreyectiva. Abundan casos de semiconjugaciones triviales, por ejemplo si $g =$id y h una transformación constante, entonces f puede ser cualquier función. No obstante, si h no es tan trivial, entonces puede trasmitir algunas propiedades de g a f o viceversa, como veremos.

Un teorema importante es el teorema de Poincaré, cuyo enunciado dividiremos en dos partes (A y B) para mejor comprensión. El teorema A, que se refiere a homeomorfismos que preservan la orientación con número de rotación racional y que veremos con más detalle a continuación, permite concluir que el homeomorfismo esencialmente (es decir, a menos de un cambio de coordenadas) se puede pensar de la siguiente manera: se presentan un conjunto de puntos periódicos todos del mismo período, y los que no lo son se pueden pensar de la siguiente manera: con $\rho = m/n$ racional, dado cualquier conjunto cerrado en el arco de circunferencia $[1, e^{2\pi i\rho})$ (topología relativa), lo iteramos por la rotación de ángulo ρ una cantidad finita de veces hasta que se superponga $[1, e^{2\pi i\rho})$. Resulta un conjunto cerrado C. En C, pensamos el difeomorfismo como R_ρ. El complemento de C consiste de intervalos abiertos, cada uno de los cuales se transforma en sí mismo por f^n, en los que impondremos que no hayan puntos periódicos, por lo que en esos intervalos se cumple que o bien $f^n(x) > x$ o bien $f^n(x) < x$ para todos los x. Es decir en cada uno de estos intervalos cada uno de los puntos se mueve un poco o bien en el sentido positivo o en sentido negativo al aplicar f^n.

Teorema 3.13. ***A*** *Sea $f : C^1 \to C^1$ homeomorfismo que preserva la orientación con número de rotación racional. Entonces f restringido al conjunto de puntos periódicos es conjugado a un subconjunto invariante de $R_{\rho(f)}$.*

Demostración. Supongamos que $\rho(f) = m/n$, m y n primos entre sí. Sea p_0 punto periódico, tiene período n. Definamos $p_j = f^j(p_0)$, $i = 0, \ldots, n-1$. Estos puntos están en un cierto orden alrededor del círculo, sea p_i el siguiente de p_0 en dicho orden. Vamos a probar la siguiente afirmación:

Afirmación 3.14. *a.* $\rho(f^i) = 1/n$

b. f^{mi} y f coinciden sobre el conjunto de puntos periódicos.

Demostración. (de la afirmación) No hay restricción en suponer que $p_0 = (1, 0)$. Para probar a., observemos que el punto que sigue en el orden sobre S^1 a p_i debe ser p_{2i} y así sucesivamente, por lo que los iterados de p_0 bajo f^i son sucesivos. Luego, si tomamos el levantamiento $\widetilde{F}$ de f^i tal que $\widetilde{F}(0) = 0$ (recordemos que estamos tomando $\Pi(0) = p_0$) entonces $\widetilde{F}^n(0) = 1$ (f^i recorre todos los iterados de p_0 que son en total n por el lema 3.1c). Luego, $\rho(\widetilde{F}) = \lim_{k\to\infty} \frac{\widetilde{F}^{nk}(0)}{nk} = \lim_{k\to\infty} \frac{k}{nk} = \frac{1}{n}$.

Para probar b., observemos que siendo p_0 periódico de f, también lo será de cualquier múltiplo f^{mi}. Además, por a, f y f^{mi} tienen el mismo número de rotación (m/n), por lo que deben recorrer los puntos periódicos que tengan en común en el mismo orden, con lo que $p_{mi} = f^{mi}(p_0) = f(p_0) = p_1$. Finalmente, f^i preserva el orden, por lo que si q es otro punto periódico de f que está entre p_0 y p_i, entonces $f^{ki}(q)$ está entre p_{ki} y $p_{(k+1)i}$. En particular, para $k = m$, resulta que $f^{mi}(q)$ es el único iterado de q que está entre p_1 ($=p_{mi}$) y p_{i+1} ($=p_{mi+1}$), por lo que coincide con $f(q)$. □

Para construir la conjugación, por la afirmación anterior es suficiente considerar $m = 1$ (es decir, alcanza ver que f^i es conjugado con $R_{1/n}$ porque si esto es cierto, $(f^i)^m = f^{mi} = f$ sobre los puntos periódicos es conjugado a $R_{1/n}^m = R_{m/n}$.) Pero en este caso los intervalos $[p_{ki}, p_{(k+1)i}]$ están encadenados intersecándose solo en los extremos, por lo que tomando un homeomorfismo

h del arco $[p_0, p_i]$ con el arco $[1, e^{2i\pi/n}]$ sobre el círculo, resulta que la restricción de h a los puntos periódicos de $[p_0, p_i]$ se extiende a una conjugación de los puntos periódicos de f con un subconjunto invariante de $R_{1/n}$. □

Antes de probar el teorema B, tratemos de entender su significado. Para número de rotación irracional hay dos casos a considerar, el transitivo y el intransitivo. En el caso transitivo, f es, a menos de un cambio de coordenadas, la rotación de ángulo R_ρ. El caso intransitivo puede pensarse como que se toman todos los puntos de órbitas de la rotación R_ρ que se "abren"en intervalos (intervalos errantes), y en cada uno de estos intervalos se define un homeomorfismo que lleva a cada uno de ellos en el correspondiente siguiente por la rotación. Esta es la base de un ejemplo de Denjoy que veremos en la próxima subsección, que veremos es posible en el caso f homeomorfismo (que consideramos ahora) y difeomorfismo C^1 (que veremos después) pero que no es posible si f es difeomorfismo C^r con r mayor que 1.

Teorema 3.15. ***B*** *Sea $f : C^1 \to C^1$ homeomorfismo que preserva la orientación con número de rotación irracional. Entonces:*

a. f restringido al conjunto de puntos que no forman parte de intervalos abiertos errantes es semiconjugado a un subconjunto invariante de $R_{\rho(f)}$. La semiconjugación es a lo sumo 2:1 y preserva la orientación.

b. La semiconjugación anterior puede extenderse a una semiconjugación definida ***en todo*** *S^1 que colapsa en la adherecia de los intervalos errantes.*

c. Si además f es transitivo, entonces f es conjugado a $R_{\rho(f)}$.

Demostración. Comenzamos con una afirmación:

Afirmación 3.16. *Supongamos $\rho(f)$ irracional, $x \in \mathbb{R}$, F levantamiento de f, n_1, n_2, m_1, m_2 enteros. Entonces, $n_1\rho(f) + m_1 < n_2\rho(f) + m_2$ si y solo si $F^{n_1}(x) + m_1 < F^{n_2}(x) + m_2$.*

(En otras palabras, la transformación $n\rho(f)+m \longleftrightarrow F^n(x)+m$ es una transformación inyectiva que preserva el orden).

Demostración. (de la afirmación) Observemos que el orden de $F^n(x) + m$ es independiente de x; en otras palabras, si $x_1 \neq x_2$, entonces $F^{n_1}(x_1) + m_1 < F^{n_2}(x_1) + m_2$ si y solo si $F^{n_1}(x_2) + m_1 < F^{n_2}(x_2) + m_2$. Esta observación es cierta porque $F^{n_1}(x_1) + m_1 < F^{n_2}(x_1) + m_2$ si y solo si $F^{n_1}(x_1) - F^{n_2}(x_1) < m_2 - m1$; como f no tiene puntos periódicos, $F^{n_1}(x_2) - F^{n_2}(x_2)$ (que varía con continuidad) no es entero si $n_1 \neq n_2$. Luego, $F^{n_1}(x_1) - F^{n_2}(x_1) < m_2 - m1$ si y solo si $F^{n_1}(x_2) - F^{n_2}(x_2) < m_2 - m1$ y esto pasa si y solo si $F^{n_1}(x_2) + m_1 < F^{n_2}(x_2) + m_2$. Luego, la afirmación está probada si probamos que $n_1\rho(f) + m_1 < n_2\rho(f) + m_2$ si y solo si $F^{n_1}(0) + m_1 < F^{n_2}(0) + m_2$. También se cumple que si m y n son enteros, y si $a - b < m$, entonces $F^n(a) - F^n(b) < m$ (si están separados menos que m entero, continúan separados menos que ese entero) Por lo tanto, $F^{n_1}(0) + m_1 < F^{n_2}(0) + m_2$ si y solo si $F^{n_1}(0) - F^{n_2}(0) < m_2 - m_1$ si y solo si $F^{n_1-n_2}(0) - 0 < m_2 - m_1$ si y solo si (por inducción, ya que $F(x + 1) = F(x) + 1$) $F^{(n_1-n_2)k}(0) < k(m_2 - m_1)$ si y solo si $F^{(n_1-n_2)k}(0)/((n_1 - n_2)k) < k(m_2 - m_1)/((n_1 - n_2)k)$ si y solo si $\rho(f) = \lim F^{(n_1-n_2)k}(0)/((n_1 - n_2)k) < (m_2 - m_1)/(n_1 - n_2)$ (observar que el igual no puede valer en el límite, porque estamos suponiendo que ρ es irracional). □

Ya estamos listos para continuar con el teorema, la idea es construir una función (semiconjugación) $h : S^1 \to S^1$ continua tal que $h \circ f = R_\rho(f) \circ h$. Para conseguirla, la trabajaremos con los respectivos levantamientos, $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de f, y $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $T(x) = x + \rho(f)$. Tomemos p_0 que no pertenezca a ningún intervalo errante y sea y_0 tal que $\Pi(y_0) = p_0$. Definamos $y_n = F^n(y_0)$. Sean $A = \{y_n + m; n, m \in \mathbb{Z}\}$, $B = \{n\rho(f) + m; n, m \in \mathbb{Z}\}$. Sabemos que B es denso en $\mathbb{R}$ (demostración como en el lema 3.8) y consideremos la transformación $H : A \to B$ definida por $H(y_n + m) = n\rho(f) + m$. Por la afirmación, es una transformación monótona; como el recorrido es denso, se puede extender a una única transformación $H : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Esa transformación (extendida) cumple que $H^{-1}(B) = A$. También cumple que $H(y_n + m + 1) = H(y_n + m) + 1$, y por la densidad, se extiende a $H(x + 1) = H(x) + 1$ por lo que puede ser bajada a una transformación $h : S^1 \to S^1$. Finalmente, $H(F(y_n + m)) = H(y_{n+1} + m) = (n+1)\rho(f) + m = H(y_n + m) + \rho(f) = T(H(y_n + m))$, o, otra vez por la densidad, $H \circ F = T \circ H$, o bien, $h \circ f \circ \Pi = \Pi \circ H \circ F = h \circ \Pi \circ F = \Pi \circ H \circ F = \Pi \circ T \circ H = R_{\rho(f)} \circ \Pi \circ H = R_{\rho(f)} \circ h \circ \Pi$ como transformaciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$, o bien, como transformaciones de S^1 en S^1, $h \circ f = R_{\rho(f)} \circ h$, lo que prueba b. Para probar a., observemos que H deja de ser inyectiva solo en intervalos $I = [a, b]$ que tienen la propiedad que a es límite por abajo de la órbita positiva de y_0 y b es límite por arriba de la órbita de y_0; de hecho, se puede mirar solamente órbitas positivas (porque tanto las órbitas positivas como las negativas tienen imagen densa en la transformación H, ver el lema 3.8); y la intersección de la órbita positiva de y_0 con el interior de I es vacía. En este último caso, H colapsa a I en un punto, pero los extremos de I (que no forman parte de intervalos **abiertos** errantes) tienen la misma imagen por H, eso implica que h es a lo sumo 2:1 de la parte a. Finalmente, si f es transitivo, no hay intervalos como el I, y esto implica que h es inyectiva, por lo tanto homeomorfismo. $\square$

3.2 Difeomorfismos en S^1: resultados de Denjoy.

En esta subsección seguimos trabajando con transformaciones que preservan la orientación. El número de rotación de homeomorfismos en el círculo fue introducido por Poincaré, consideró fundamentalmente homeomorfismos con número de rotación irracional y estudió como difiere su dinámica de la correspondiente a la rotación de ángulo el número de rotación: R_ρ, $\rho \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Halló que, a menos de la existencia de intervalos errantes para el homeomorfismo, las dinámicas eran exactamente las mismas. En otras palabras, vimos que si el homeomorfismo f tiene número de rotación irracional, entonces existe una transformación continua $h : S^1 \to S^1$ con preimagen de cada punto igual a un punto o un intervalo de S^1 tal que $h \circ f = R_\rho \circ h$. Resulta que los arcos colapsados a un punto por h se comportan por f de la misma forma que su imagen por R_ρ. Poincaré se preguntó si los intervalos errantes podían existir para difeomorfismos. En 1931, Denjoy probó que no pueden existir intervalos errantes para difeomorfismos C^2 del círculo; también dio ejemplos de difeomorfismos C^1 con intervalos errantes. A este aspecto de la teoría es que nos dirigimos. Recordemos primero algunas definiciones:

Definición 3.17. Sea una función $f : [a, b] \to \mathbb{R}$; sea $\{a = x_0, x_1, x_2, \dots x_{n-1}, b = x_n\}$ una partición, y sea $y_i = f(x_i)$, $i = 0, \dots n$. La **variación total** de f en $[a, b]$ es el supremo de $\sum_{i=1}^{n} |y_i - y_{i-1}|$ al considerar todas las particiones finitas posibles del intervalo $[a, b]$.

Definición 3.18. Diremos que $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es de **variación acotada** cuando su variación total es finita.

Teorema 3.19. *Toda función Lipschitziana (y por lo tanto, toda función C^1) es de variación acotada.*

Un concepto importante en dinámica unidimensional es el de distorsión:

Definición 3.20. Sea $f : N \to N$ una transformación C^1; sea T un intervalo compacto en N tal que $\frac{df}{dx}(x) \neq 0$ para todo $x \in T$. Se define la **distorsión** de f en T como

$$\mathrm{Dist}(f, T) = \sup_{y_1, y_2 \in T} \log \frac{|\frac{df}{dx}(y_1)|}{|\frac{df}{dx}(y_2)|}$$

Un lema importante es el siguiente:

Lemma 3.21. *Sea $f : N \to N$ y $T \subset N$ intervalo compacto tal que la restricción de f^n a T es un difeomorfismo C^1. Entonces*

$$Dist(f^n, T) \leq \sum_{i=0}^{n-1} Dist(f, f^i(T))$$

Demostración. Por la regla de la cadena

$$\log \frac{|\frac{df^n}{dx}(y_1)|}{|\frac{df}{dx}(y_2)|} = \sum_{i=0}^{n-1} \log \frac{|\frac{df}{dx}(f^i(y_1))|}{|\frac{df}{dx}(f^i(y_2))|} \leq \sum_{i=0}^{n-1} \mathrm{Dist}(f, f^i(T))$$

El resultado es inmediato. □

Indicaremos con $|I|$ la longitud del intervalo I.

Corollary 3.22. *Sea $f : N \to N$ una transformación C^1 tal que $f'(x) \neq 0$ para todo $x \in N$ y tal que la transformación $x \mapsto \log |f'(x)|$ tiene constante de Lipschitz C. Entonces para todo intervalo $I \in N$*

$$Dist(f^n, T) \leq C \sum_{i=0}^{n-1} |f^i(I)|$$

En particular, si los intervalos $I, f(I), \ldots, f^{n-1}(I)$ son disjuntos, entonces

$$Dist(f^n, T) \leq C\, diam N$$

Corollary 3.23. *Sea $f.N \to N$ una transformación C^1 tal que la transformación $x \mapsto \log |f'(x)|$ tiene variación acotada por C. Entonces*

$$Dist(f^n, T) \leq C\, diam N$$

El teorema que nos importa en esta sección es el siguiente:

Teorema 3.24. *(Denjoy) Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ un difeomorfismo de S^1 con derivada continua y de variación acotada, y con número de rotación racional. Entonces f es transitiva.*

Demostración. Ver bibliografía. □

Si se elimina la hipótesis de variación acotada de la derivada, la tesis del teorema de Denjoy no se cumple necesariamente:

Teorema 3.25. *Dado cualquier número irracional α, existe un difeomorfismo C^1 con número de rotación α y con un intervalo errante.*

Demostración. Aquí haremos un bosquejo que se puede completar con la bibliografía, la idea básica es construir una semiconjugación como en el teorema 3.15 y rellenar los "agujeros" con un difeomorfismo adecuado.

Sea $x \in S^1$ y sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ su órbita en la rotación R_α. Vamos a construir la semiconjugación especificando la preimagen de cada punto de S^1. La preimagen de cualquier punto x_n será un solo punto. La preimagen de x_n será un intervalo I_n. Vamos a pedir que $|I_n|$ satisfaga dos condiciones:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |I_n| = L \leq 1 \tag{4}$$

$$\lim_{|n|\to\infty} \frac{|I_n|}{|I_{n+1}|} \tag{5}$$

La primera condición se necesita para que los intervalos errantes "entren" en el centro, el segundo se necesita para que se cumpla la condición de f de ser C^1. Ambas condiciones se cumplen si por ejemplo $|I_n| = \dfrac{L}{(n+1)(n+2)}$. Vamos a definir f a través del levantado F, o mejor, de su derivada F', y posteriormente integraremos para obtener F. Primero, distribuimos los intervalos I_n en el círculo de forma tal que sus longitudes sean las requeridas, estén ordenados de igual forma que x_n en el mismo orden de I_n y tal que la unión de los I_n sea denso en el círculo. (Esto es posible por un procedimiento diagonal, ver Wellington.) Construiremos el levantado de la transformación de la tesis, para ello consideremos los intervalos I_n^j levantados de I_n. Si $I_n^j = [b_n, a_n]$, buscamos que

$$\int_{I_n^j} F'(x)\, dx = |I_{n+1}| \tag{6}$$

y que $F'(x) = 1$ para x en la frontera de I_n^j. Para $x \in I_n^j$ tomemos

$$F'(x) = 1 + \frac{k_n(a_n - x)(x - b_n)}{|I_n|^2} \tag{7}$$

donde k_n es una constante que se determina de la condición 6, resultando

$$k_n = \frac{6}{|I_n|}(|I_{n+1}| - |I_n|) \tag{8}$$

Para determinar F integrando su derivada, aparece una constante de integración c_n^j en cada intervalo que se determina imponiendo de (7), que $F(a_n^j)$ sea el punto del levantado correspondiente de I_{n+1}. Por ser F creciente restringida a la unión de los intervalos unión de los I_n^j, y por la densidad de ellos, F se extiende a un homeomorfismo de $\mathbb{R}$ y que se puede bajar obteniendo f tal que $f(I_n) = I_{n+1}$. Además f' es continua por serlo F', que lo es por la condición 5 de la que resulta, observando 8, que $\lim_{|n|\to\infty} k_n = 0$. □

3.3 Transformaciones que invierten la orientación

Cualquier homeomorfismo de S^1 que invierte la orientación tiene exactamente dos puntos fijos, con dos arcos en el complemento de esos puntos fijos intercambiados. Para ver esto: el teorema del punto fijo de Lefschetz (que admitiremos) permite probar que hay un punto fijo, supongamos que tiene coordenadas en el plano complejo $(1, 0)$ y consideremos un levantamiento tal que $F(0) = 0$. Como se invierte la orientación, $F(1) = -1$, por lo que $F(x) - x$ tiene valor 0 en 0 y -2 en 1, por lo que debe tomar el valor -1 en algún punto intermedio, y esto es el segundo punto fijo; por la monotonía de F no hay más puntos fijos. El intercambio de arcos aparece por la inversión de orientación. Como cualquier iterado impar invierte la orientación, los dos puntos fijos son los únicos puntos periódicos de período impar. Como f^2 mantiene la orientación, y tiene dos puntos fijos, el número de rotación de f^2 es 1, por lo que solamente puede tener (eventualmente) otros puntos fijos, que serán de período dos de f.

El número de rotación es invariante solo con conjugaciones que preservan la orientación: R_ρ es conjugado con $R_{-\rho}$ con el homeomorfismo (que no preserva la orientación) $\varphi : S^1 \to S^1$ dado por $\varphi(e^{2\pi it}) = e^{-2\pi it}$. Finalmente observemos que una conjugación h que invierte la orientación puede cambiar solo el signo del número de rotación: el resultado es un cálculo directo para la transformación φ definida más arriba, y entonces por un lado $\rho(\varphi \circ h \circ f \circ h^{-1} \circ \varphi^{-1}) = -\rho(h \circ f \circ h^{-1})$; por el otro, $\varphi \circ h$ preserva la orientación, por lo que $\rho(\varphi \circ h \circ f \circ h^{-1} \circ \varphi^{-1}) = \rho(f)$.

4 Genericidad.

4.1 Topología en el espacio de transformaciones.

Se necesita tener una topología en el espacio de las transformaciones. Sean I intervalo compacto y $f : I \to I$ y $g : I \to I$ dos funciones C^r con $r \geq 0$. Podemos definir una distancia entre esas dos funciones como $\operatorname{dist}_r(f, g) = \max_{x \in I}\{|f(x) - g(x)|, \ldots |f^{(r)}(x) - g^{(r)}(x)\}$. Esa métrica nos permite definir una topología. Esta definición se puede extender al caso S^1: tomemos F y G levantamientos de f y g respectivamente definidos por $F(t) = \arg(f(e^{2\pi it}))/(2\pi) + \mathrm{E}(t)$, donde arg es el único argumento en el intervalo $\operatorname{Arg}(f(1)) + [0, 2\pi)$ y $G(t) = \arg(g(e^{2\pi it}))/(2\pi) + \mathrm{E}(t)$, donde arg es el único argumento en el intervalo $\operatorname{Arg}(g(1)) + [0, 2\pi)$. Entonces $\operatorname{dist}_r(f, g) = \max_{x \in \mathbb{R}}\{|F(x) - G(x)|, \ldots |F^{(r)}(x) - G^{(r)}(x)\}$ es una métrica. Si $r > s$, y $f : N \to N$ es una función C^r, es claro que toda función que está en el C^r entorno de f de radio ε está en el C^s entorno del mismo radio. No es tan claro, pero no menos cierto, que dados una función $f : N \to N$ de clase C^s, un natural r (o $+\infty$) mayor que s, y un real $\varepsilon > 0$, existe una función $g : N \to N$ de clase C^r tal que $\operatorname{dist}_s(f, g) < \varepsilon$ (admitiremos este resultado.)

4.2 Estabilidad estructural y transversalidad.

La idea tras la definición es la siguiente: diremos que una transformación f es estable si podemos encontrar un entorno en que continua siendo "la misma", es decir, en un entorno todas las transformaciones son conjugadas a f. Desde este punto de vista, las transformaciones estructuralmente estables son las "físicamente" observables. Más formalmente:

Definición 4.1. Sea $f : N \to N$ un difeomorfismo C^r con $r \geq 0$ (el caso $r = 0$ corresponde en realidad a homeomorfismos). Diremos que f es **estructuralmente estable** si existe un entorno de f en la topología C^r tal que toda transformación g en ese entorno es conjugada a f.

En otras palabras, existe un *homeomorfismo* $h : N \to N$ tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccccc} & N & \xrightarrow{f} & N & \\ h & \downarrow & & \downarrow & h \\ & N & \xrightarrow{g} & N & \end{array}$$

¿Por qué no se pide a h que sea C^r, es decir, tan diferenciable como f? Responderemos la pregunta de aquí a poco.

Ejemplo 4.2. $f =$id claramente no es estable.

Similar definición vale para flujos:

Definición 4.3. Sea X un campo vectorial C^r definido en N, diremos que es **estructuralmente estable** si existe un entorno de X tal que todo campo vectorial Y en ese entorno es topológicamente equivalente a X.

Muy relacionada con la estabilidad estructural (y con la genericidad, que veremos más adelante), está el concepto de **transversalidad**. Admitiremos algunas definiciones y resultados sobre este concepto, conceptos más precisos pueden verse por ejemplo en Differential topology de Guillemin-Polack. Hablando un poco laxamente, el concepto de transversalidad se contrapone al de tangencia. Diremos que dos curvas diferenciables $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$ en el plano son **transversales en un punto P de la intersección** si los respectivos espacios tangentes en dicho punto generan $\mathbb{R}^2$. Dos curvas diferenciables $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$ en el plano son **transversales** si para todo punto de intersección la intersección es transversal. En particular, dos curvas que no se intersecan son transversales. La noción de transversalidad está relacionada con la de estabilidad, de allí su importancia. Por ejemplo, el hecho que $y = x^2$ interseque al eje de las x no es estable, pequeñas perturbaciones de la curva hacen que dejen de intersecarse. Pero la propiedad de una curva de intersecar transversalmente el eje de las x sí es estable, se mantiene para pequeñas perturbaciones. Un teorema importante, relacionado, es el teorema de Sard, que dice que el conjunto de valores $x \in \mathbb{R}$ de una función C^∞ $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tales que $f'(x) \neq 0$ es denso en R. Precisando definiciones:

Definición 4.4. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función C^1. Un punto $x \in \mathbb{R}$ es **un punto regular de f** si $f'(x) \neq 0$; un valor $c \in \mathbb{R}$ es **un valor regular de f** si cada punto en $f^{-1}(c)$ es un punto regular de f.

Enunciaremos sin demostración el siguiente teorema:

Teorema 4.5. *(Sard) El conjunto de valores regulares de una transformación C^∞, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es denso en $\mathbb{R}$.*

4.3 Entendamos mejor la estabilidad estructural.

Para comenzar a "aterrizar" las definiciones anteriores, veamos las siguientes ideas. Sea X^0 uno de los dos campos vectoriales unitarios en S^1. Cualquier campo vectorial $X \in \mathcal{X}^r(S^1)$ se escribe de manera única como $X(p) = f(p)X^0(p)$, $p \in S^1$; $f \in C^r(S^1, \mathbb{R})$. "Enderezando" S^1 no es restricción suponer que f está definida en $[0,1]$.

Veremos una definición muy importante en sistemas dinámicos: la de hiperbolicidad (la veremos restringida al caso particular de sistemas unidimensionales).

Definición 4.6. Una singularidad de un campo vectorial X es un punto p_0 que anula dicho campo.

Definición 4.7. Sea p_0 una singularidad de $X = fX^0 \in \mathcal{X}^r(S^1)$. Diremos que la singularidad es **hiperbólica** si $f'(p_0) \neq 0$. Si $f'(p_0) < 0$, entonces p es **atractora o pozo**, si $f'(p_0) > 0$, entonces p es **repulsora o fuente**.

Sea $G \in \mathcal{X}^r(S^1)$ el conjunto de los campos vectoriales cuyas singularidades son todas hiperbólicas; queremos ver que cualquier campo vectorial en G es estructuralmente estable. Por la propia definición, las singularidades de los campos vectoriales en G son aisladas, por lo que cada campo vectorial en G tiene una cantidad finita (quizá ninguna) de singularidades.

Si $X \in G$ y $X = fX^0$, vemos de la gráfica de f que los pozos y fuentes de X se deben alternar; en particular, la cantidad de singularidades es par. Queremos ver que dos campos vectoriales X e Y en G son topológicamente equivalentes si y sólo si tienen igual cantidad de singularidades. Es claro que si son topológicamente equivalentes, como las equivalencia topológica llevan singularidades en singularidades, entonces la cantidad de singularidades debe ser la misma. Recíprocamente, supongamos primero que la cantidad de singularidades no es 0. Sean $a_1, b_1, \ldots a_s, b_s$ las fuentes y pozos de X ordenados con el orden en S_1, y sean $a'_1, b'_1, \ldots a'_s, b'_s$ las fuentes y pozos de X ordenados con el orden en S_1. Si existe algún homeomorfismo h que realice la equivalencia topológica, debe llevar puntos singulares en puntos singulares, por lo tanto, definamos $h(a_i) = a'_i$ y $h(b_i) = b'_i$. Fijemos puntos arbitarios, $p_i \in (a_i, b_i)$, $q_i \in (b_i, a_{i+1})$, $p'_i \in (a'_i, b'_i)$, $q'_i \in (b'_i, a'_{i+1})$. Si $p \in (a_i, b_i)$, entonces existe un único $t \in \mathbb{R}$ tal que $X_t(p_i) = p$. Definamos $h(p) = Y_{-t}(p'_i)$, y análogamente para puntos en (b_i, a_{i+1}). Es fácil ver que h es un homeomorfismo que verifica lo que deseamos.

Si X e Y no tienen singularidades, la única órbita de X es todo S^1. Observemos primero que si $X = fX^0$, entonces o bien $f > 0$, o bien $f < 0$. Si $f > 0$, la identidad es una equivalencia topológica entre X y X^0. Si $f < 0$ tomemos un homeomorfismo que invierta la orientación (por ejemplo una simetría axial que deje S^1 fijo) como la equivalencia topológica entre X y X^0. Razonando de la misma manera con Y, y usando que la composición de equivalencias topológicas es una equivalencia topológica, se obtiene el resultado.

Ya estamos listos para probar que cualquier campo vectorial en G es estructuralmente estable. Sea $X = fX^0 \in G$. Definimos $\widehat{F} : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ como $\widehat{F}(p) = (p, f(\Pi(p)))$. Por definición, $X \in G$ si y sólo si $\widehat{F}$ es transversal a $[0,1] \times \{0\}$. Luego, todo Y suficientemente cercano a X tiene la misma propiedad, por lo tanto está en G y tiene igual cantidad de singularidades que X. Por los resultados anteriores, la estabilidad estructural está probada.

Es un ejercicio de topología probar que dado cualquier compacto K en S^1 (o equivalentemente, en $\mathbb{R}$), existe una función f en $C^r(S^1, \mathbb{R})$ que se anula exactamente en K. Luego, fX^0 es un campo vectorial que se anula exactamente en K. Como la equivalencia topológica preserva las singularidades, tenemos por lo menos tantas clases de equivalencia como compactos en S^1; esto muestra que es imposible describir y clasificar las estructuras de todos los campos vectoriales en S^1. Es por eso que de aquí a poco vamos a introducir el concepto de genericidad.

Ejemplo 4.8. Tomemos un campo vectorial en G que sí tenga singularidades. Como hemos visto, se alternan fuentes y pozos. Elijamos puntos $p_i \in (a_i, b_i)$ (notación como en 4.3), $q_i \in (b_i, a_{i+1})$. Ahora consideremos el difeomorfismo determinado por el tiempo 1, inducido por el campo vectorial. La idea es probar que f es estructuralmente estable. Sabemos que f es una contracción en $[q_{i-1}, p_i]$ con punto fijo a_i, y f es una expansión en $[p_i, q_i]$ con punto fijo b_i. Si g está C^r cerca de f, entonces g es una contracción en $[q_{i-1}, p_i]$ con punto fijo a'_i cercano a a_i y es una expansión en $[p_i, q_i]$ con punto fijo b'_i cercano a b_i. Definamos $h(a_i) = a'_i$, $h(b_i) = b'_i$. Definimos un homeomorfismo del intervalo $[p_i, f(p_i)]$ a $[p_i, g(p_i)]$ y de $[q_i, f(q_i)]$ a $[q_i, g(q_i)]$ y como en el ejemplo 2.17 lo extendemos a $[a_i, b_i]$ y $[b_{i-1}, a_i]$, mostrando que f es estructuralmente estable.

Ejemplo 4.9. El razonamiento anterior no funciona si X en G no tiene puntos fijos. Para mostrarlo, tomemos $f(p)$ constante en el círculo, tal que el flujo de fX^0 sea una órbita cerrada de período irracional. El difeomorfismo de tiempo 1 es una rotación de ángulo irracional, que tiene órbitas densas en el círculo. Pero con pequeñas perturbaciones, se obtienen rotaciones de ángulo racional, con órbitas periódicas y por lo tanto no conjugadas al difeomorfismo original.

Estamos listos para contestar por qué en la conjugación consideramos homeomorfismos y no difeomorfismos. Sea el difeomorfismo del ejemplo 4.8, que sabemos es estructuralmente estable: si g está C^r cercano a f, existe h homeomorfismo tal que $h \circ f = g \circ f$. Para construir la conjugación, tomamos $h(a_i) = a'_i$. Es fácil ver que podemos tomar g cercana a f tal que $a`_i = a_i$, pero que $f'(a_i) \neq g'(a_i)$. Supongamos que h fuera un difeomorfismo. Tenemos $h(a_i) = a_i$ y $h'(a_i)f'(a_i) = g'(a_i)h'(a_i)$, lo que contradice $f'(a_i) \neq g'(a_i)$. Así, si exigimos que h sea un difeomorfismo, entonces f no sería estable en el conjunto C^r. De forma similar, se obtendría que ningún difeomorfismo que tuviera un punto fijo o periódico, podría ser estructuralmente estable, lo que es excesivamente exigente. La misma idea se aplica a la equivalencia topológica entre campos vectoriales.

4.4 Propiedades genéricas.

Es impensable intentar comprender el comportamiento de la dinámica dada por todas las funciones o flujos arbitrarios. Incluso, en el caso simple de dinámicas en el círculo, vimos que la teoría clásica implica considerar números de rotación racionales e irracionales por un lado, casos transitivos e intransitivos por el otro. Sin embargo, uno podría alcanzar a entender el comportamiento de “la mayoría” de las dinámicas. Planteando bien este punto de vista, veremos que “la mayoría” de los difeomorfismos que preservan la orientación consta de un conjunto de difeomorfismos con una cantidad finita de puntos periódicos todos del mismo período con pozos y fuentes alternándose[1].

[1] Esto no significa que no sea importante el punto de vista clásico. Por ejemplo, si se consideran familias monoparamétricas de transformaciones, en forma parecida a las que consideramos en la primera clase, para pasar de difeomorfismos con número de rotación racional a otro con número de rotación racional, se debe pasar por difeomorfismos con número de rotación irracional. Y resulta que la medida de los valores de los parámetros que corresponden a número de rotación irracional es positiva.

¿Cómo formalizamos el concepto de "la mayoría" de las transformaciones? Inicialmente a uno se le puede ocurrir que es una propiedad que se cumple para un conjunto denso de elementos. Pero esto no es adecuado: en un intervalo de los reales los números racionales son densos, pero también lo son los irracionales. Es más adecuada la definición de conjunto residual.

Definición 4.10. Un conjunto que es intersección numerable de abiertos y densos se llama **residual**.

Definición 4.11. Una propiedad que se mantiene válida para un conjunto residual de funciones se llama **genérica**.

Ejemplo 4.12. La propiedad de un flujo de tener singularidades hiperbólicas es una propiedad genérica, de hecho, G es un conjunto abierto y denso en C^r, con $r \geq 1$. Ya hemos visto que es abierto. Es también denso como consecuencia del teorema de Sard (esencialmente, el conjunto de reales a tales que $\widehat{F} + (0, a)$ es transversal al eje de las x es denso), luego con perturbaciones tan pequeñas como se desee, se consigue un campo en G. Ya vimos que es perfectamente posible clasificar (módulo equivalencias topológicas, teniendo en cuenta cantidad de singularidades) todos los flujos que están en G. Volveremos más adelante sobre la afirmación en el caso de difeomorfismos.

4.5 Difeomorfismos en S^1.

Definición 4.13. Sea $f : I \to I$ una transformación (no necesariamente difeomorfismo) C^1, sea p_0 un punto periódico de período m. Si $0 < |(f^m)'(p_0)| \neq 1$ se dice que el punto p_0 es **hiperbólico**. Si $0 < |(f^m)'(p_0)| < 1$ se dice que el punto es **hiperbólico atractor**; si $|(f^m)'(p_0)| > 1$ se dice que el punto es **hiperbólico repulsor**; si $|(f^m)'(p_0)| = 0$ se dice que el punto es **super-atractor**.

Estableceremos un teorema que es local, por lo que resulta válido también para endomorfismos. Es aplicable también a sistemas dinámicos en el círculo.

Teorema 4.14. *Sea $f : I \to I$ un difeomorfismo C^1, sea p_0 un punto fijo. Si $|f'(p_0)| < 1$ entonces hay un entorno de p_0 contenido en $W^s(p_0)$; si $|f'(p_0)| > 1$ entonces hay un entorno de p_0 tales que los puntos en ese entorno reducido lo dejan al iterar por f.*

Demostración. Supongamos que $|f'(p_0)| < 1$. Sea $\varepsilon = \frac{1}{2}(1 - |f'(p_0)|)$ y elegido δ tal que si $t \in (p_0 - \delta, p_0 + \delta)$ entonces $|f'(p) - f'(p_0)| < \varepsilon$. Se deduce que $|f'(p)| < 1 - \varepsilon$ para todo $t \in (p_0 - \delta, p_0 + \delta)$. Probemos que $(p_0 - \delta, p_0 + \delta) \in W^s(p_0)$. De hecho, $|f(p) - f(p_0)| \leq (1 - \varepsilon)|p - p_0|$, de donde resulta fácilmente la tesis. Se deja como ejercicio probar el teorema para $|f'(p_0)| > 1$.

Definición 4.15. Decimos que un difeomorfismo$f \in C^r$ del círculo es **Morse-Smale** si f tiene un número finito de órbitas periódicas y todas ellas son hiperbólicas.

Un difeomorfismo de Morse-Smale tiene un número par de órbitas periódicas, todas con el mismo período; la mitad son atractoras y la otra mitad repulsoras. Es fácil ver que el conjunto de los difeomorfismos de Morse-Smale forma un conjunto abierto en el conjunto de los difeomorfismos C^r. Como en el ejemplo 4.8, se puede construir una conjugación entre dos difeomorfismos cercanos, probando que son estructuralmente estables. ¿Serán genéricos? Probaremos el siguiente teorema:

Teorema 4.16. *(Peixoto) El conjunto de difeomorfismos Morse-Smale C^r $(r > 0)$, del círculo es denso en el conjunto de los difeomorfismos C^r del círculo.*

A partir de esta afirmación es inmediato el siguiente

Corollary 4.17. *Un difeomorfismo C^r del círculo es estructuralmente estable si y sólo si es Morse-Smale.*

Demostración. (del teorema 4.16)

Paso 1 Sea f un difeomorfismo del circulo que mantiene la orientación tal que $\rho(F) \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Arbitrariamente cerca de f existen un difeomorfismos g tales que $\rho(G) \in \mathbb{Q}$. También, por el teorema 3.9, $\rho(F-\varepsilon) < \rho(F)$ para todo $\varepsilon > 0$. Como por el lema 3.1d el número de rotación varía continuamente con F, existe $\varepsilon > 0$ arbitrariamente pequeño tal que $\rho(F - \varepsilon) \in \mathbb{Q}$. Tomemos g tales que $G = F - \varepsilon$. Tomando ε pequeño, g está tan cerca como queramos de f.

Paso 2 Sea f difeomorfismo del círculo que mantiene la orientación tal que $\rho(F) = p/q \in \mathbb{Q}$ con p, q primos entre sí y $q > 0$. Por el lema 3.1c, existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $F^q(x) = x + p$. Hay tres situaciones a considerar.

a) $F^q(x) \equiv x + p\,\forall x \in \mathbb{R}$. En este caso $f = R_{p/q}$, la rotación de ángulo p/q.

b) $f \neq R_{p/q}$ y $F^q(x) \geq x + p\,\forall x \in \mathbb{R}$ o $F^q(x) \leq x + p\,\forall x \in \mathbb{R}$.

c) Hay puntos x para los que $F^q(x) \geq x + p$ y otros para los que $F^q(x) \leq x + p$.

Veamos estos casos por separado.

a) Sean dos puntos x_1, x_2 en S^1 pertenecientes a órbitas periódicas diferentes. Entonces estas órbitas $\theta_i = \{x_i, f(x_1), \ldots, f^{q-1}(x_i)\}$ alternan sus puntos alrededor del círculo. Tomemos $\varphi : S^1 \to \mathbb{R}$ de clase C^∞ tal que

a. $\varphi^{-1}(0) = \theta_1 \cup \theta_2$.

b. $\varphi'(x) > 0\,\forall x \in \theta_1$ y $\varphi'(x) < 0\,\forall x \in \theta_2$.

Sea $\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $\Phi = \varphi \circ \Pi$. Entonces para todo $\varepsilon \neq 0$ de valor absoluto pequeño, f_ε tal que $F_\varepsilon = F + \varepsilon\Phi$ es un difeomorfismo de Morse-Smale en S^1.

b) Si $f \neq R_{p/q}$ y $F^q(x) \geq x + p\,\forall x \in \mathbb{R}$, entonces g tal que $G = F - \varepsilon$ verifica las hipótesis del caso c) para todo ε suficientemente pequeño. De la misma manera, si $F^q(x) \leq x + p\,\forall x \in \mathbb{R}$, entonces g tal que $G = F + \varepsilon$ verifica las hipótesis del caso c) para todo ε suficientemente pequeño.

c) El conjunto $K = \{x \in S^1; f^q(x) = x\}$ es un conjunto compacto diferente de S^1. Para cada $x \in K$, sean U_x y V_x entornos de x en S^1 tales que $\overline{V}_x, f(\overline{V}_x), \ldots, f^{q-1}(\overline{V}_x)$ son disjuntos a pares y $\overline{U}_x \subset V_x$. Sea $\{U_{x_i}\}_{i=1,\ldots n}$ un subcubrimiento finito del compacto K. Denotaremos $U_i = U_{x_i}$ y $V_i = V_{x_i}$, $i = 1, \ldots, n$. Sea $U = \cup_{i=1}^n U_i$. Sea $\mathcal{U}$ un entorno de f en el conjunto de los difeomorfismos que mantienen la orientación tal que para todo $g \in \mathcal{U}$ se cumple:

a. $V_i, g(V_i), \dots f^{q-1}(V_i)$ son disjuntos dos a dos, $i = 1, \dots n$.

b. El conjunto $K_g = \{x \in S^1;\ g^q(x) = x\}$ es no vacío y contenido en U.

Primero veremos la idea de lo que vamos a hacer. Tomaremos f_0 de clase C^∞ arbitrariamente C^r-cercano a f. Luego perturbaremos f_0 solamente en $f_0^{q-1}(V_1)$ de manera que el difeomorfismo perturbado f_1 solo tenga puntos hiperbólicos en $\overline{U}_1$. Como esta propiedad es abierta, podemos perturbar f_1 en $f^{q-1}(V_2)$ de forma tal que el difeomorfismo resultante F_2 solamente tenga puntos hiperbólicos en $\overline{U}_1\ cup \overline{U}_2$. Inductivamente, se encuentra un difeomorfismo f_n tal que todo punto periódico en $\cup_{i=1}^n U_i$ es hiperbólico; resulta que es Morse-Smale. Las perturbaciones que obtendremos se obtendrán de perturbaciones de los levantamientos en la forma que formalizamos a continuación.

Sea f_0 un difeomorfismo C^∞ en S^1 que sea C^r cercano a f. Sea F_0 el levantamiento de f_0 que interseca a $x+p$. Sean W_i $i = 1, \dots n$ abiertos en S^1 tales que $\overline{U}_i \subset W_i \subset \overline{W}_i \subset V_i$. Sean $\widehat{U}_i = \Pi^{-1}(U_i)$, $\widehat{V}_i = \Pi^{-1}(V_i)$ y $\widehat{W}_i = \Pi^{-1}(W_i)$ los levantamientos de U_i, V_i y W_i, $i = 1, \dots n$. Es claro que si $A \subset S^1$ y $\widehat{A} = \Pi^{-1}(A)$, para todo levantamiento G de un difeomrfismo g de S^1 se cumple que $G(\widehat{A}) = \widehat{g(A)}$.

Antes de proseguir, veamos qué relación hay entre valores regulares (4.4) y difeomorfismos de Morse-Smale. Si F es un levantamiento de un difeomorfismo C^r de S^1. Entonces f tiene órbitas periódicas de período q si y solo si $F^q(x)$ interseca una diagonal trasladada $y = x + p$. Además un punto $x \in \mathbb{R}$ tal que $F^q(x) = x + p$ cumple $(F^q)'(x) \neq 1$ si y solo si x es un valor regular de $F^q(x) - x$. Luego, f es de Morse-Smale si y solo si existe $q \in \mathbb{N}^+$, $p \in \mathbb{Z}$ y un levantamiento F tal que $F^q(x)$ corta a $x + p$ con p valor regular de $F^q - \mathrm{id}$.

Entonces, si p es un valor regular de $(F_0^q - \mathrm{id})|_{\overline{\widehat{U}_1}}$, tomamos $f_1 \equiv f_0$. Si otra vez p es un valor regular de $(F_1^q - \mathrm{id})|_{\overline{\widehat{U}_2}}$, tomamos $f_2 \equiv f_1 \equiv f_0$ y continuamos de esta manera hasta encontrar que p no es valor regular de $(F_j^q - \mathrm{id})|_{\overline{\widehat{U}_{j+1}}}$ para algún $j = 1, 2, \dots, n-1$. Si no existe j que cumpla esa condición, entonces $f_n \equiv f_{n-1} \equiv \dots \equiv f_0$ es tal que p es valor regular de $F_n^q - \mathrm{id}$ y por lo tanto f_n es un difeomorfismo de Morse-Smale C^r cercano a f. En este caso, $(F_n^q - \mathrm{id})^{-1}(0) = \widehat{K}_{f_n} \subset \cup_{i=1}^n \widehat{U}_i$.

Supongamos entonces que existe $1 \leq j < n$ tal que p es un valor regular de $(F_j^q - \mathrm{id})|_{\cup_{i=1}^j \overline{\widehat{U}_i}}$ pero no es valor regular de $(F_j^q - \mathrm{id})|_{\overline{\widehat{U}_{j+1}}}$. Hallaremos f_{j+1} tal que p es valor regular de $(F_{j+1}^q - \mathrm{id})|_{\cup_{i=1}^{j+1} \overline{\widehat{U}_i}}$. La condición de que $(F_j^q - \mathrm{id})|_{\cup_{i=1}^j \overline{\widehat{U}_i}}$ tenga a p como valor regular es abierta, es decir, cualquier difeomorfismo C^r cercano a f seguirá cumpliendo esa condición. Ahora, sea $\alpha : \mathbb{R} \to [0,1]$ una transformación C^∞ tal que $\alpha(x+1) = \alpha(x)\ \forall x \in \mathbb{R}$; $\alpha(x) = 1\ \forall x \in F_j^{q-1}(\widehat{W}_{j+1})$ y tal que $\alpha(x) = 0\ \forall x \in \mathbb{R} \backslash F_j^{q-1}(V_{j+1})$. Definamos $F_\varepsilon(x) = F_j(x) + \varepsilon\alpha(x)$. Como $V_{j+1}, f_j(V_{j+1}), \dots, f_j^{q-1}(V_{j+1})$ son disjuntos dos a dos, tenemos que $\alpha(x) = 0\ \forall x \in V_{j+1}, f_j(V_{j+1}), \dots, f_j^{q-2}(V_{j+1})$. Luego, $F_\varepsilon^{q-1}(x) = F_j^{q-1}(x)$ para todo $x \in \widehat{V}_{j+1}$ y $F_\varepsilon^q(x) = F_j^q(x) + \varepsilon$ para todo $x \in \overline{\widehat{W}}_{j+1}$. Como por el teorema de Sard, el conjunto de valores regulares de $F_j^q - \mathrm{id}$ (y por lo tanto, el de $(F_j^q - \mathrm{id})|_{\overline{\widehat{U}_{j+1}}}$) es denso en $\mathbb{R}$, hay valores de $\varepsilon > 0$ arbitrariamente cercanos a 0 tales que $p - \varepsilon$ es valor regular de $(F_j^q - \mathrm{id})|_{\overline{\widehat{U}_{j+1}}}$, luego p es un valor regular de $F_\varepsilon^q|_{\overline{\widehat{U}_{j+1}}}$. Definamos f_{j+1} tal que $F_{j+1} = F_\varepsilon$. Si ε es suficientemente pequeño, p es un valor regular de $(F_j^q - \mathrm{id})|_{\cup_{i=0}^{j+1}\overline{\widehat{U}_i}}$.

Luego de una cantidad finita de pasos como el anterior, se encuentra un difeomorfismo de Morse-Smale C^r-cercano a f.

$\square$

Como los difeomorfismos de Morse-Smale son abiertos y densos en el conjunto de difeomorfismos C^r del círculo, en algún sentido, "la mayoría" de los difeomorfismos son estructuralmente estables y tienen número de rotación racional.

4.6 Transformaciones expansoras.

Muchas de las nociones dinámicas que definimos hasta ahora no dependen de la invertibilidad de los difeomorfismos involucrados. En lo sucesivo, confundiremos la f de la transformación en S^1 con su "enderezamiento" en el segmento $[0, 1]$.

Definición 4.18. Diremos que una transformación C^r $f : S^1 \to S^1$ es **expansora** si $|f'(x)| > 1$ para todo $x \in C^1$.

El prototipo de estas transformaciones es el endomorfismo dado por $f : S^1 \to S^1$; $f(e^{2\pi it}) = e^{2\pi int}$, $n > 1$. Como antes, la restricción de mantener el orden no es importante. Queremos probar la estabilidad estructural de las transformaciones expansoras; comenzamos con algunas propiedades básicas. Sea λ el mínimo de la derivada de f, entonces $\lambda > 1$, y en el caso de preservar la orientación, $\lambda = \min_{x\in S^1} f'(x)$.

Lemma 4.19. *Para cualquier arco I en S^1, la longitud$(f^n(I)) \geq \lambda^n$longitud(I).*

Demostración. Queda como ejercicio. $\square$

Lemma 4.20. *S^1 tiene un conjunto residual de puntos con órbita densa.*

Demostración. Sea $\{U_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ una base numerable de la topología de S^1, por ejemplo, las bolas abiertas de centro en racionales de [0,1] con radio racional. Sea V_i el conjunto de puntos que tienen algún iterado en U_i: $V_i = \{x \in S^1; \exists n > 0, f^n(x) \in U_i\}$. Claramente, V_i es abierto. También es denso por el lema anterior: no hay ningún intervalo en $S_i \setminus V_i$ porque cualquier intervalo de longitud positiva finalmente cubre todo el círculo. Luego, $V_\infty = \bigcap_{i\in\mathbb{Z}^+}$ es residual. Además cualquier punto de V_∞ tiene órbita densa, porque la órbita interseca cualquier elemento de una base de abiertos. $\square$

Lemma 4.21. *Los puntos periódicos de f son densos en S^1.*

Demostración. Sea I un intervalo no trivial de S^1, queremos ver que contiene puntos periódicos. No hay restricción en suponer que I es cerrado. Por el lema 4.19 existe $n \in \mathbb{Z}^+$ tal que $F^n(I) = S^1$; la idea es probar que I contiene un punto periódico de período $2n$. Como $f^n(I) = S^1$, entonces cada punto de S^1 tiene al menos dos preimágenes en I. En particular, alguna componente de $F^{-2n}(I)$ está en I, sea I_1 tal componente. Por inducción, se encuentra un intervalo I_k contenido en I_{k-1} tal que su imagen por F^{2n} es I_{k-1}. Esa sucesión de intervalos forma un encaje, que define un punto fijo. $\square$

Corollary 4.22. *No hay intervalos errantes en S^1.*

Así como se probó que todo homeomorfismo de S^1 tiene un levantamiento, el resultado es cierto para transformaciones continuas. Pero cambia el siguiente resultado:

Lemma 4.23. *Si F es un levantamiento de una transformación expansora f, entonces $\frac{1}{n}(F(x+n)-F(x))$ es un entero que sólo depende de f.*

Demostración.

a. $e^{2\pi i(F(x+n)-F(x))} = f(e^{2\pi i(x+n)}) - f(e^{2\pi ix}) = 0$, por lo que $F(x+n)-F(x)$ es entero.

b. Por continuidad, $F(x+n)-F(x)$ no depende de x.

c. F y $\widetilde{F}$ son dos levantamientos de f, $e^{2\pi i(F(x)-\widetilde{F}(x))} = f(e^{2\pi ix}) - f(e^{2\pi ix}) = 0$, de donde existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $F(x) = \widetilde{F}(x) + k$. Como antes, por continuidad, k no depende de x.

d. Finalmente,

$$\frac{F(x+n)-F(x)}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(F(x+i)-F(x+i-1))}{n} \overset{\text{por } b}{=} \frac{\sum_{i=1}^{n}(F(x+1)-F(x))}{n} = F(x+1)-F(x)$$

Por a, es entero. Por c, no depende del levantamiento. Por b, no depende de x.

$\square$

El lema anterior permite definir:

Definición 4.24. Para cualquier transformación *continua* $f : S^1 \to S^1$, el **grado** de f es $\mathrm{gr}(f) = \frac{1}{n}(F(x+n)-F(x))$.

Cualquier homeomorfismo del círculo tiene grado 1. Necesitaremos el siguiente lema.

Lemma 4.25. *Sea f expansora, sea g una transformación continua de S^1, del mismo grado que f. Si F y G son levantamientos respectivos de f y g, entonces existe una única transformación $H : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que levanta una transformación continua $h : S^1 \to S^1$ (no necesariamente homeomorfismo) tal que los siguientes diagramas conmutan:*

$$\begin{array}{ccccc} & \mathbb{R} & \xrightarrow{G} & \mathbb{R} & \\ H & \downarrow & & \downarrow & H \\ & \mathbb{R} & \xrightarrow{F} & \mathbb{R} & \end{array} \qquad \begin{array}{ccccc} & S^1 & \xrightarrow{g} & S^1 & \\ h & \downarrow & & \downarrow & h \\ & S^1 & \xrightarrow{f} & S^1 & \end{array}$$

(Es decir, H semiconjuga G a F, y h semiconjuga a g a f.)

Demostración. Sea V el espacio de los levantamiento de transformaciones continuas de grado 1 con la métrica $dist_0(H_1, H_2) = \max_{x\in\mathbb{R}} |H_1(x) - H_2(x)|$. Que existe el máximo finito se debe a que los levantamientos de transformaciones de grado 1 difieren de la identidad en una función continua periódica de período 1, por lo que resulta $dist_0(H_1, H_2) = \max_{x\in[0,1]} |H_1(x) - H_2(x)|$. V es completo porque la convergencia es la de la convergencia uniforme y porque el límite uniforme de levantamientos de grado 1 es también un levantamiento: si $H_j \to H$, entonces existe el límite uniforme de h_j, y resulta $e^{2\pi i H(x)} = \lim e^{2\pi i H_j(x)} = \lim h_j(e^{2\pi i x}) = h(e^{2\pi i x})$

Definamos el operador $T : V \to C^0(\mathbb{R})$; $T(H) = F^{-1} \circ H \circ G$. De hecho, el recorrido de T está en V porque $F \circ T \circ H(x+n) = F \circ F^{-1} \circ H \circ G(x+n) = H(G(x))+n \ \mathrm{gr}(g) = H(G(x))+n \ \mathrm{gr}(g) = F \circ T \circ H(x) + n \ \mathrm{gr}(f)$, de donde $T(H)(x + n) - T(H)(x) = n$, de donde $T(H) \in V$.

También, T es una contracción en V: $\mathrm{dist}_0(T(H_1), T(H_2)) = \sup_{x\in\mathbb{R}} |F^{-1} \circ H_1 \circ G(x) - F^{-1} \circ H_2 \circ G(x)| = \sup_{y=G(x)\in\mathbb{R}} |F^{-1} \circ H_1(y) - F^{-1} \circ H_2(y)| \le \sup_{y\in\mathbb{R}} \lambda^{-n}|H_1(y) - H_2(y)| = \lambda^{-n}\,\mathrm{dist}_0(H_1, H_2)$. De esto se deduce que T tiene un único punto fijo H en V, o sea, $F^{-1} \circ H \circ G = H$. Esto prueba que el primer diagrama conmuta, y proyectando a S^1, resulta la conmutatividad del segundo diagrama. □

Ya podemos probar el principal teorema en relación con las transformaciones expansoras:

Teorema 4.26. *(Shub) Si f y g son transformaciones expansoras del mismo grado, entonces son conjugadas.*

Demostración. Si f y g son ambas expansoras del mismo grado, y si F y G son los respectivos levantamientos, por el teorema anterior, existen H_1 que semiconjuga a G a F, y H_2 que semiconjuga a F a G, resultando el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{cccc} & \mathbb{R} & \xrightarrow{F} & \mathbb{R} & \\ H_2 & \downarrow & & \downarrow & H_2 \\ & \mathbb{R} & \xrightarrow{G} & \mathbb{R} & \\ H_1 & \downarrow & & \downarrow & H_1 \\ & \mathbb{R} & \xrightarrow{F} & \mathbb{R} & \end{array}$$

Pero también se cumple que

$$\begin{array}{ccccc} & \mathbb{R} & \xrightarrow{F} & \mathbb{R} & \\ \mathrm{id} & \downarrow & & \downarrow & \mathrm{id} \\ & \mathbb{R} & \xrightarrow{F} & \mathbb{R} & \end{array}$$

y el teorema anterior asegura la unicidad, de donde $H_2 \circ H_1 =$id. De la misma forma, $H_1 \circ H_2 =$id, por lo que $H_1 = H_2^{-1}$ y por lo tanto H_1 es un homeomorfismo, y por lo tanto, también h_1. □

Corollary 4.27. *Las transformaciones expansoras son estructuralmente estables.*

Demostración. Como dos transformaciones expansoras C^0 cercanas son del mismo grado, y cualquier transformación C^1 cercana a una transformación expansora es expansora, el teorema de Shub se aplica. □

5 Bibliografía

Anatole Katok, Boris Hasselblatt, 1999, Introduction to the modern theory of dynamical systems, Cambridge University Press

Charles Sparrow, 1988, An introduction to the dynamical of unimodal maps. Summer school on dynamical systems, ICTP.

Eleonora Catsigeras, Introducción a la teoría cualitativa de las ecuaciones diferenciales, notas en http://www.fing.edu.uy/∼eleonora/#Árticulos

Jacob Palis, Wellington de Melo, 1988, Introduction to dynamical systems Geometric theory

Richard Holmgren, 1994, A first course in discrete dynamical systems, Springer-Verlag

Victor Guillemin, Alan Pollack, 1974, Differential Topology, Prentice-Hall, Inc.

Wellington de Melo, Sebastian van Strien, 1993, One-dimensional dynamics. Springer-Verlag

Wellington de Melo, 1988, Lectures on one-dimensional dynamics. IMPA, CNPq.

Zbigniew Nitecki, 1974, Differentiable dynamics, an introduction to the orbit structure of diffeomorphisms, The MIT Press, Cambridge, Massachusetts, and London, England.