

# Elementos de Topología y Geometría Diferencial

Curso 2004, Responsable: José L. Vieitez

14 de octubre de 2008

## Resumen

Apuntes para el curso de Geometría Diferencial de la Licenciatura de Matemática de la Facultad de Ciencias, marzo de 2004.

*El universo es tan complejo que no hay  
ninguna razón para que pueda ser expresado.  
Sobre todo por algo tan casual como el lenguaje...*  
(Jorge Luis Borges)

Y sin embargo la Geometría Diferencial es un lenguaje que trata de algún modo de expresar "mundos" donde a veces las "leyes" de la geometría no son las que más comunes se nos aparecen.

## 1. Introducción.

Variedades diferenciables. Funciones diferenciables. Espacio tangente, fibrado tangente. Valores regulares y Teorema de Sard. Definición de valor regular y valor crítico. Demostración del Teorema de Sard.

La Topología estudia el concepto de límite - o de función continua- en su más amplia acepción. Para definir el concepto de continuidad es preciso poseer la noción de subconjunto abierto o de subconjunto cerrado; o equivalentemente, dar el concepto de una base de entornos del espacio. Estas nociones se estudian en los cursos de Introducción a la Topología y nosotros las admitiremos.

La Topología Diferencial se ocupa de espacios topológicos que poseen además estructuras adicionales (espacios en donde se pueden definir funciones diferenciables y el concepto de plano o espacio tangente tiene sentido) lo que hace que los métodos de estudio de los mismos estén influidos grandemente por los del Cálculo

Diferencial e Integral. En definitiva, muchos de los resultados y conceptos con los que trabajaremos se obtendrán aplicando herramientas del Cálculo. Un ejemplo de tales herramientas son el Teorema de la Función Inversa y, su equivalente, el Teorema de la Función Implícita, cuya importancia es tan grande que serán recordados al final de esta introducción.

Pero la Topología Diferencial permite obtener resultados no solo para funciones diferenciables sino que muchos pueden extenderse al caso de funciones continuas, aproximando para ello las funciones continuas por una diferenciable. Así, las técnicas de la Topología Diferencial se aplican más allá del ámbito de las funciones diferenciables.

## 1.1. Variedades diferenciales

Introducimos ahora las definiciones básicas que vamos a necesitar.

**Definición 1.1.1.** Sea  $U \subset \mathbb{R}^d$  un conjunto abierto y  $f : U \subset \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ . Decimos que  $f$  es diferenciable de clase  $C^k$  en  $U$ ,  $k \in \mathbb{N}^+$ , si existen las derivadas parciales de  $f$  hasta el orden  $k$  y son continuas.

Si  $f = (f_1, f_2, \dots, f_m) : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ , es una función vectorial,  $f$  se dice diferenciable de clase  $C^k$  en  $U$  si lo es cada componente  $f_j$ ,  $j = 1, \dots, m$ .

Diremos que  $f$  es de clase  $C^0$  en  $U$  si  $f$  es continua en  $U$ .

**Definición 1.1.2.** Sean  $X, Y$  dos espacios topológicos. Decimos que  $f : X \rightarrow Y$ , una función biyectiva entre  $X$  e  $Y$ , es un homeomorfismo si tanto  $f : X \rightarrow Y$  como  $f^{-1} : Y \rightarrow X$  son funciones continuas. En caso de existir tal  $f$  diremos que  $X$  y  $Y$  son homeomorfos.

**Definición 1.1.3.** Un espacio topológico  $X$  se dice Hausdorff si dado  $x, y \in X$   $x \neq y$ , existen abiertos  $U, V \subset X$ ,  $x \in U$ ,  $y \in V$  tales que  $U \cap V = \emptyset$ . O sea, dados dos puntos distintos del espacio  $X$  hay abiertos disjuntos conteniendo cada uno de ellos.

Un espacio topológico  $X$  se dice que tiene una base numerable si existe una base numerable de entornos de  $X$ .

Todo espacio métrico  $E$  es Hausdorff. Si además  $E$  es separable (i.e.: posee un subconjunto numerable denso) entonces tiene una base numerable (ejercicio).

**Definición 1.1.4.** Decimos que  $M$  es una variedad topológica de dimensión  $n$  si  $M$  es un espacio topológico de Hausdorff con base numerable y tal que para cada uno de sus puntos  $x$  existe un entorno  $V$  homeomorfo a un subconjunto abierto  $U \subset \mathbb{R}^n$ .

Dado  $p \in M$  y un entorno  $V = V(p)$  se llama un mapa coordenado local (o simplemente un mapa coordenado) al homeomorfismo  $x : V \rightarrow U = x(V) \subset \mathbb{R}^n$

dado en la definición 1.1.4. Si  $q \in V$  y  $x(q) = (x^1, \dots, x^n) \in \mathbb{R}^n$ , los números  $x^j = x^j(q)$  se llaman las coordenadas locales del punto  $q$  relativo al mapa coordenado  $x$ .

La inversa  $x^{-1} : x(V) \subset \mathbb{R}^n \rightarrow V$  del abierto  $x(V)$  de  $\mathbb{R}^n$  en  $V \subset M$  se llama una parametrización local de  $M$ .

Un atlas de dimensión  $n$  para la variedad topológica  $M$  es una colección  $\mathcal{A}$  de mapas coordenados locales  $x : V \rightarrow \mathbb{R}^n$  tales que los abiertos  $V$  cubren  $M$ .

Notación: Para decir que la variedad  $M$  tiene dimensión  $n$ ,  $\dim(M) = n$ , a veces escribiremos  $M = M^n$  o simplemente  $M^n$ .

**Observación 1.1.1.** *Obsérvese que la definición 1.1.4 necesita, para no ser inconsistente o trivial, que si  $n \neq m$  no ocurra que exista a la vez un homeomorfismo  $x : V \rightarrow U = x(V)$ , abierto en  $\mathbb{R}^n$ , y otro homeomorfismo  $x' : V' \rightarrow U' = x'(V')$  abierto en  $\mathbb{R}^m$ . Si así fuera existiría un homeomorfismo entre un abierto de  $\mathbb{R}^n$  y otro de  $\mathbb{R}^m$ . Esto no ocurre, como prueba el así llamado Teorema de Invariancia del Dominio. Nosotros daremos en esta sección una demostración de ello para el caso diferenciable que resulta como consecuencia del Teorema de la Función Inversa.*

Dados dos mapas locales  $x : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  y  $y : V \rightarrow \mathbb{R}^n$  en la variedad topológica  $M$  con  $U \cap V \neq \emptyset$ , todo punto  $p \in U \cap V$  tiene coordenadas locales  $x(p) = (x^1(p), \dots, x^n(p))$  y  $y(p) = (y^1(p), \dots, y^n(p))$ .

La correspondencia  $(x^1(p), \dots, x^n(p)) \mapsto (y^1(p), \dots, y^n(p))$  establece un homeomorfismo entre los abiertos de  $\mathbb{R}^n$   $x(U \cap V)$  e  $y(U \cap V)$ :

$$\varphi_{xy} = y \cdot x^{-1} : x(U \cap V) \rightarrow Y(U \cap V),$$

llamado cambio o mudanza de coordenadas.

Si  $z : W \rightarrow \mathbb{R}^n$  es otro mapa coordenado local tal que  $U \cap V \cap W \neq \emptyset$  entonces se cumple en  $x(U \cap V \cap W)$  que

$$\varphi_{xz} = z \cdot x^{-1} = z \cdot y^{-1} \cdot y \cdot x^{-1} = \varphi_{yz} \cdot \varphi_{xy}.$$

Además  $\varphi_{xx} = id : x(U) \rightarrow x(U)$  y  $\varphi_{yx} = \varphi_{xy}^{-1}$ .

**Definición 1.1.5.** *Un atlas  $\mathcal{A}$  para la variedad topológica  $M$  se dice diferenciable de clase  $C^k$  si todos los cambios de coordenadas  $\varphi_{xy}$  relativas a los mapas locales  $x, y \in \mathcal{A}$  son homeomorfismos diferenciables de clase  $C^k$ .*

Decimos en este caso que  $M$  es una variedad diferenciable (o variedad diferencial) de clase  $C^k$ .

Un homeomorfismo diferenciable  $\varphi_{xy} : X(U \cap V) \rightarrow Y(U \cap V)$  tiene un inverso  $\varphi_{yx} : Y(U \cap V) \rightarrow X(U \cap V)$  también diferenciable de clase  $C^k$ . Si  $\varphi_{xy}$  manda

$$(x^1, \dots, x^n) \xrightarrow{\varphi_{xy}} (y^1, \dots, y^n)$$

resulta que el jacobiano  $\det\left(\frac{\partial y^i}{\partial x^j}\right)$  es distinto de cero en todo punto de  $X(U \cap V)$ .

Un homeomorfismo diferenciable de clase  $C^k$  con inversa diferenciable de clase  $C^k$  sera llamado un *difeomorfismo* de clase  $C^k$ . Si  $M$  y  $N$  son dos espacios topológicos tales que existe un difeomorfismo  $f : M \rightarrow N$  entre ellos diremos que  $M$  y  $N$  son difeomorfos.

Sea  $\mathcal{A}$  un atlas de clase  $C^k$  para la variedad  $M$ . Un mapa coordenado local  $y : V \rightarrow \mathbb{R}^n$  se dice compatible con el atlas si para todo mapa coordenado local  $x : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  perteneciente a  $\mathcal{A}$  con  $U \cap V \neq \emptyset$  los cambios de coordenadas  $\varphi_{yx}$  y  $\varphi_{xy}$  son homeomorfismos diferenciables de clase  $C^k$ .

Un atlas diferenciable de clase  $C^k$  se dice maximal si contiene todos los mapas coordenados locales que son compatibles con el atlas  $\mathcal{A}$ .

Todo atlas diferenciable de clase  $C^k$  de una variedad topológica  $M$  de dimensión  $n$  puede ser completado a un atlas de clase  $C^k$  maximal.

Nosotros nos restringiremos, en general, a variedades que admiten atlas de clase  $C^\infty$ , admitiendo entonces que existen todas las derivadas parciales de todos los órdenes y son todas continuas para los mapas coordenados locales. Para ellas diremos simplemente que se trata de una variedad diferenciable omitiendo escribir o decir "de clase  $C^\infty$ ". Obsérvese que para dar un mapa coordenado debemos especificar los dominios  $U$  del atlas y los homeomorfismos  $x : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Deben cumplir todas las condiciones impuestas en la definición, por ejemplo  $\cup U = M$ .

Ejemplos de variedades diferenciables.

1.  $\mathcal{A} = \{U = \mathbb{R}^n, x = id\}$ . Más en general: cualquier subconjunto abierto  $U$  de  $\mathbb{R}^n$  con la inclusión  $i : U \hookrightarrow \mathbb{R}^n$  como mapa coordenado local da un atlas diferenciable para  $U$ . En particular todo intervalo abierto en  $\mathbb{R}$  es una variedad diferenciable.
2.  $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$  la esfera unidad centrada en el origen de  $\mathbb{R}^3$ . Tomamos como atlas  $\mathcal{A}$  el formado por:
  - A)  $U = S^2 \setminus \{(0, 0, 1)\}$  y la proyección estereográfica  $x : U \rightarrow \mathbb{R}^2$  desde el "polo norte"  $N = (0, 0, 1)$  sobre el "plano ecuatorial"  $xOy$  de ecuación  $z = 0$  que se identifica con  $\mathbb{R}^2$  mediante  $(x, y, 0) \mapsto (x, y)$ .
  - B)  $U = S^2 \setminus \{(0, 0, -1)\}$  y la proyección estereográfica  $x : U \rightarrow \mathbb{R}^2$  desde el "polo sur"  $N = (0, 0, -1)$  también sobre el "plano ecuatorial"  $xOy$ .

La prueba de que este es un atlas queda como ejercicio.
3. Toda superficie  $S \subset \mathbb{R}^3$  es una variedad diferenciable. Dar mapas coordenados para el toro  $\mathbf{T}^2$  (ejercicio).

4. En general la esfera unitaria  $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ ,

$$S^n = \{(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} / x_1^2 + \dots + x_n^2 + x_{n+1}^2 = 1\}$$

es una variedad diferenciable. Un atlas diferenciable puede ser dado otra vez por medio de la proyección estereográfica (ejercicio) desde los polos norte  $N = (0, \dots, 0, 1)$  y sur  $S = (0, \dots, 0, -1)$ . En lugar de ello damos los siguientes mapas coordenados locales. Definimos para cada  $j = 1, \dots, n+1$ , los abiertos

$$U_j^+ = \{(x_1, \dots, x_j, \dots, x_n, x_{n+1}) \in S^n / x_j > 0,$$

$$U_j^- = \{(x_1, \dots, x_j, \dots, x_n, x_{n+1}) \in S^n / x_j < 0.$$

Definimos luego los homeomorfismos  $X_j^\sigma : U_j^\sigma \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $\sigma = +, -$  como

$$X_j^\sigma(x_1, \dots, x_j, \dots, x_{n+1}) = (x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_{n+1}).$$

Se tiene

$$X_j^+(U_j^+) = X_j^-(U_j^-) = \{(y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n / y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_n^2 < 1\}$$

el disco unidad abierto de  $\mathbb{R}^n$ . Al variar  $j = 1, \dots, n+1$  se obtienen  $2n+2$  mapas coordenados locales que constituyen un atlas de clase  $C^\infty$ . Queda como ejercicio completar los detalles.

5. Sea  $\mathcal{A}$  el atlas  $C^\infty$  formado por  $id : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , aquí  $x = id$  y  $U = \mathbb{R}$ . El mapa coordenado  $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dado por  $y(t) = t^3$ ,  $t \in \mathbb{R}$  no es compatible con  $\mathcal{A}$  pues aunque  $\varphi_{yx} = t^3$  es de clase  $C^\infty$ ,  $\varphi_{xy} = \sqrt[3]{t}$  no es derivable en  $t = 0$ . Por otra parte sea  $M = \mathbb{R}$  y  $\mathcal{A}$  el atlas de clase  $C^\infty$  maximal que contiene a  $id : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Sea  $M = \mathbb{R}$  Y  $\mathcal{B}$  el atlas dado por las funciones

$$\mathcal{B} = \{z = x \circ y : y^{-1}(U) \rightarrow \mathbb{R} / x : U \rightarrow \mathbb{R} \in \mathcal{A}\}$$

Entonces  $\mathcal{B}$  es un atlas diferenciable maximal de clase  $C^\infty$  (comprobarlo). Es claro que  $\mathcal{A} \neq \mathcal{B}$  pues  $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $y(t) = t^3$  no es diferenciable en  $t = 0$ .

Los atlas  $\mathcal{A}$  y  $\mathcal{B}$  definen en  $M = \mathbb{R}$  estructuras de variedades diferenciables distintas. Por otro lado

$$y : (M, \mathcal{B}) \rightarrow (M, \mathcal{A})$$

es un difeomorfismo de clase  $C^\infty$ . Así que no aunque estructuras de variedades diferenciables distintas de todos modos son equivalentes!!!

Es claro que dada una variedad diferenciable  $M$  con un atlas  $\mathcal{A}$ , si tomamos

un homeomorfismo  $y : M \rightarrow M$  que no sea un difeomorfismo respecto a  $\mathcal{A}$  podemos, repitiendo el procedimiento anterior, construir un atlas  $\mathcal{B}$  distinto de  $\mathcal{A}$  que aunque nos van a dar estructuras diferenciables distintas de todos modos van a ser equivalentes.

Lo antes dicho sugiere la pregunta siguiente: Dada una variedad diferenciable  $(M, \mathcal{A})$  de clase  $C^\infty$ , ¿será posible definir en  $M$  una nueva estructura de variedad diferenciable  $(M, \mathcal{B})$  de clase  $C^\infty$  NO equivalente a la original? En dimensiones 1, 2 y 3 la respuesta es que no, dos estructuras diferenciables son siempre equivalentes.

John Milnor "On manifolds homeomorphic to the 7-sphere", Ann. Math. (2) 64, pp 399-405 (1956), dio el primer ejemplo de que esto es falso en dimensiones más altas. Milnor obtuvo ejemplos de varias estructuras diferenciables distintas en la esfera  $S^7$ . Todas definen la misma variedad topológica pero diferentes variedades diferenciables.

6. Si  $M = M^m$  y  $N = N^n$  son variedades diferenciables entonces  $M \times N$  formado por las parejas  $(x, y) / x \in M, y \in N$  es una variedad diferenciable de dimensión  $m + n$ .

En efecto: si  $X : U \subset M \rightarrow \mathbb{R}^m$  e  $Y : V \subset N \rightarrow \mathbb{R}^n$  son dos mapas coordenados locales para  $M$  y  $N$  respectivamente,  $x \in U, y \in V$ , entonces

$$X \times Y : U \times V \rightarrow \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{m+n},$$

es un mapa coordenado local para  $(x, y) \in M \times N$ . La clase de diferenciabilidad de  $X \times Y$  es la misma que la de  $X$  e  $Y$ . Del mismo modo el producto cartesiano de  $M_1, M_2, \dots, M_k$ ,

$$M = M_1 \times M_2 \times \dots \times M_k$$

es una variedad de dimension

$$\dim(M) = \sum_{j=1}^k \dim(M_j).$$

7. El producto de la variedad

$$S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 = 1\}$$

por si misma  $k$  veces, es una variedad diferenciable llamada el toro  $T^k$  de dimensión  $k$ .

8. El espacio proyectivo real de dimensión  $n$ ,  $\mathbb{P}^n = \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ . Una manera de definir  $\mathbb{P}^n$  es como sigue:

En  $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$  definimos la siguiente relación:  $v \sim w$  si y solo si existe  $\lambda \in \mathbb{R}$  tal que  $w = \lambda v$ . Esta relación es de equivalencia pues claramente  $v \sim v$ , si  $v \sim w$  entonces como  $w \neq 0$  resulta  $\lambda \neq 0$  por lo que  $v = \frac{1}{\lambda}w$  y  $w \sim v$ . Por último, si  $v \sim w$  y  $u \sim v$  entonces existen  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$  tales que  $w = \lambda v$  y  $v = \mu u$ . Se concluye que  $w = \lambda \mu u$  por lo que  $u \sim w$ . Geométricamente  $v$  está relacionado con  $w$  existe una recta que los contiene pasando por el origen de coordenadas.

$\mathbb{P}^n$  está formado por el conjunto cociente según la relación  $\sim$  antes definida.

Otra manera de definir  $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$  es a partir de  $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ . Allí identificamos cada punto  $p \in S^n$  con su antípoda  $-p \in S^n$ . Obsérvese que esta relación es la restricción de la anteriormente definida en  $\mathbb{R}^{n+1}$  a  $S^n$ . La ventaja de usar  $S^n$  es que es más cómoda para definir la topología de  $\mathbb{P}^n$ .

La topología en  $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$  la definimos así: Si  $[p]$  es la clase de  $p \in S^n$ ,  $\Pi(p) = [p]$  es la proyección canónica de  $S^n \rightarrow \mathbb{P}^n$  decimos que  $U \subset \mathbb{P}^n$  es abierto si  $\Pi^{-1}(U)$  es abierto en  $S^n$ . Con esta topología  $\mathbb{P}^n$  es un espacio de Hausdorff compacto que cumple el segundo axioma de numerabilidad (ejercicio).

Probar que el atlas de  $S^n$  definido en el item anterior para  $S^n$  induce en  $\mathbb{P}^n$  un atlas diferenciable (de clase  $C^\infty$ ).

9. Variedades Grassmannianas.

En  $\mathbb{R}^{n+k}$  consideramos

$$G_{kn}(\mathbb{R}) = \{V \subset \mathbb{R}^{n+k} / V \text{ es un subespacio de dimensión } k\}.$$

$G_{kn}$  es una variedad diferenciable de dimensión  $nk$

10. Sea  $T(m, n)$  el espacio de todas las matrices  $m \times n$  con entradas en  $\mathbb{R}$ .  $T(m, n)$  puede verse como  $\mathbb{R}^{mn}$  de donde tiene una estructura natural de variedad diferenciable. Sea  $T(m, n, k) \subset T(m, n)$  el subconjunto de  $T(m, n)$  de las matrices de rango  $k$ . Entonces  $T(m, n, k)$  es una variedad de dimensión  $(m + n - k) \times k$ .

En efecto, si  $X_0 \in T(m, n)$  y  $\text{rango}(X_0) =_{\text{Not.}} r(X_0) \geq k$ , entonces existen matrices de permutación  $P$  y  $Q$  tales que

$$PX_0Q = \begin{pmatrix} A_0 & B_0 \\ C_0 & D_0 \end{pmatrix}$$

tales que  $A_0$  es una matriz  $k \times k$  no singular. Existe  $\epsilon > 0$  tal que si las entradas de  $A - A_0$  son todas menores que  $\epsilon$  en valor absoluto, entonces  $A$

tiene rango  $k$ . Sea  $U^*$  el subconjunto de  $T(m, n)$  tal que si  $X \in U^*$  entonces

$$PXQ = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

con  $A$  tal que las entradas de  $A - A_0$  son menores que  $\epsilon$  en valor absoluto. Entonces  $U^*$  es abierto en  $T(m, n)$ . Afirmamos que  $X$  está en  $T(m, n, k)$  si y solo si  $D = CA^{-1}B$ .

Porque si multiplicamos

$$\begin{pmatrix} I_k & 0 \\ -CA^{-1} & I_{m-k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D - CA^{-1}B \end{pmatrix}$$

la última matriz obtenida tiene igual rango que

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

ya que

$$\begin{pmatrix} I_k & 0 \\ -CA^{-1} & I_{m-k} \end{pmatrix}$$

es una matriz no singular. Pero la última matriz obtenida tiene rango  $k$  sii  $D = CA^{-1}B$ .

Como mapas coordenados tomamos en  $U = U^* \cap T(m, n, k)$  (que es abierto en la topología inducida por la inclusión  $T(m, n, k) \subset T(m, n)$ ) el mapa definido por

$$h(X) = \begin{pmatrix} A & B \\ C & 0 \end{pmatrix}$$

El inverso es

$$h^{-1}\left(\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\right) = P^{-1} \begin{pmatrix} A & B \\ C & CA^{-1}B \end{pmatrix} Q^{-1}$$

Si tenemos dos entornos que se cortan queda verificar que  $h' \circ h^{-1}$  es de clase  $C^\infty$ . La dimensión de las matrices da que  $h$  mapea  $U = U^* \cap T(m, n, k)$  sobre un abierto de  $\mathbb{R}^{k^2 + k(m-k) + k(n-k)} = \mathbb{R}^{k(m+n-k)}$  (Ejercicio).

## 1.2. Espacio Tangente

### Mapas Diferenciables

Dadas dos variedades diferenciales  $M^m$  y  $N^n$  ( $m$  y  $n$  son las dimensiones de  $M$  y  $N$  respectivamente) de clase  $C^s$ , una función, mapa o aplicación  $f : M \rightarrow N$  se

dice diferenciable de clase  $C^k$ ,  $k \leq s$  si para todo  $x \in M$  existen mapas coordenados  $\varphi : U(x) \subset M \rightarrow \mathbb{R}^m$  y  $\psi : V(f(x)) \subset N \rightarrow \mathbb{R}^n$  (obviamente de clase  $C^s$ ) tales que  $\psi \circ f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U(x)) \rightarrow V(f(x))$  es de clase  $C^k$ . Como  $s \geq k$  la definición tiene sentido. Además es claro que no depende de la elección de los mapas coordenados elegidos (ejercicio).

Ejemplos importantes:

1. curvas parametrizadas diferenciables.

Si  $I \subset \mathbb{R}$  es un intervalo abierto, un mapa  $\gamma : I \rightarrow M$  de clase  $C^k$  se llama una curva parametrizada. La función  $\gamma$  es un ejemplo de aplicación diferenciable de clase  $C^k$ .

2. funciones reales diferenciables.

Las funciones  $f : M^n \rightarrow \mathbb{R}$  son diferenciables si para un (para cualquier) mapa coordenado local,  $\varphi : U \subset M \rightarrow \mathbb{R}^n$  la función

$$f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \rightarrow \mathbb{R}$$

es diferenciable (de clase  $C^k$ ).

Sea  $M$  una variedad diferenciable de dimensión  $n$ . Si  $M \subset \mathbb{R}^N$  para algún  $N > 0$  (veremos que esto es siempre posible suponerlo más adelante), entonces si  $\varphi : U \subset M \xrightarrow{\sim} W \subset \mathbb{R}^n$ ,  $W$  abierto en  $\mathbb{R}^n$ , es un mapa coordenado local con  $\varphi(p) = x_0$ , su inversa  $X : W \subset \mathbb{R}^n \rightarrow U$ ,  $X(x_0) = p$ , es, como ya dijimos, llamada una parametrización. Usando parametrizaciones, localmente podemos ver a  $M$  como un mapa de  $W \subset \mathbb{R}^n$  en  $\mathbb{R}^N$  y allí tenemos definido el concepto de vector tangente del Cálculo:

Consideramos una curva diferenciable parametrizada  $c : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow W$  tal que  $c(0) = x_0 \in W$ . Entonces  $X \circ c : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M \subset \mathbb{R}^N$  es una curva diferenciable en  $\mathbb{R}^N$ .

Definimos el vector tangente a la curva  $X \circ c$  en el punto  $p$  como

$$\left. \frac{d(X \circ c)(t)}{dt} \right|_{t=0} .$$

Debido a la regla de la cadena resulta que

$$\left. \frac{d(X \circ c)(t)}{dt} \right|_{t=0} = DX_{x_0} \cdot \dot{c}(0) .$$

Pero siendo  $W$  abierto de  $\mathbb{R}^n$  su espacio tangente es todo  $\mathbb{R}^n$ : eso es obvio, dado un vector  $v \in \mathbb{R}^n$  la curva  $c(t) = vt$ ,  $t \in (-\epsilon, \epsilon)$ , lo tiene como vector tangente en 0 (en todo punto de ella en realidad). Por lo tanto el conjunto  $T_p M$  de los vectores

tangentes a  $M$  en el punto  $p$  se identifica con la imagen  $DX_{x_0}(\mathbb{R}^n) \subset \mathbb{R}^N$  que es un subespacio lineal.

Obviamente para que esto tenga coherencia debe suceder que si tomamos un otro mapa coordenado  $\psi : U_1 \subset M \rightarrow W_1 \subset \mathbb{R}^n$  con  $p \in U_1$ ,  $\psi(p) = y_0$ , la correspondiente parametrización (la inversa local de  $\psi$ )  $Y : W_1 \rightarrow U_1$  da lugar al mismo subespacio de  $\mathbb{R}^N$ , o sea,  $DY_{y_0}(\mathbb{R}^n) = DX_{x_0}(\mathbb{R}^n)$ . Como  $Y(W_1) = U_1 \ni p$ ,  $X(W) = U \ni p$ , y ambos  $U, U_1$  son abiertos, podemos suponer sin perder generalidad que  $U = U_1$ . La función

$$h = Y^{-1} \circ X = \psi \circ X : W \rightarrow W_1$$

es entonces un difeomorfismo entre abiertos de  $\mathbb{R}^n$ . Escribiendo  $X = Y \circ h$  y derivando tenemos, en virtud de la regla de la cadena,  $DX_{x_0} = DY_{y_0} Dh_{x_0}$ . Resulta que  $DX_{x_0}(\mathbb{R}^n) \subset DY_{y_0}(\mathbb{R}^n)$ . Pero como  $h : U \rightarrow U_1$  es un difeomorfismo resulta que  $Dh_{x_0}$  es un isomorfismo, i.e.:  $DY_{y_0} = DX_{x_0}(Dh_{x_0})^{-1}$  de donde también  $DY_{y_0}(\mathbb{R}^n) \subset DX_{x_0}(\mathbb{R}^n)$ . Se deduce que  $T_p M$  está definida sin ambigüedad en el caso en que consideremos  $M \subset \mathbb{R}^N$ .

Queremos ahora definir el espacio tangente a la variedad  $M$  en un punto  $p$  en forma general, sin que dependa de que  $M$  esté contenida en un espacio Euclideo. Si bien probaremos más adelante que siempre existe un número natural  $N$  tal que  $M$  puede suponerse inmersa en  $\mathbb{R}^N$ , es común que una variedad se defina de un modo intrínseco, de modo que no resulte evidente en qué  $\mathbb{R}^N$  se considera inmersa.

Consideremos una variedad  $M^n$  diferenciable y  $\mathcal{A} = \{(\varphi, U)\}$  un atlas maximal (de clase  $C^\infty$ ) para  $M$ . Los elementos de  $\mathcal{A}$  son las parejas  $(\varphi, U)$  donde  $U \subset M$  es el dominio de definición del mapa coordenado local  $\varphi$ . Dadas las ternas  $(x, (\varphi, U), a) \in M \times \mathcal{A} \times \mathbb{R}^n$  y  $(y, (\psi, V), b) \in M \times \mathcal{A} \times \mathbb{R}^n$  definimos la relación  $\sim$  entre las ternas así:

$$(x, (\varphi, U), a) \sim (y, (\psi, V), b)$$

si y solo si

1.  $x = y \in U \cap V$ ,
2.  $D(\psi \circ \varphi^{-1})_{\varphi(x)}(a) = b$ .

Veamos que la relación  $\sim$  es una relación de equivalencia. La relación  $\sim$  es obviamente reflexiva. Es simétrica pues si

$$D(\psi \circ \varphi^{-1})_{\varphi(x)}(a) = b$$

entonces, como  $x = y$ ,

$$D(\varphi \circ \psi^{-1})_{\psi(x)}(b) = a.$$

Finalmente la transitividad resulta de la regla de la cadena: si  $(x, (\varphi, U), a) \sim (y, (\psi, V), b)$  y  $(y, (\psi, V), b) \sim (z, (\chi, W), c)$  entonces por una parte  $x = y = z \in U \cap V \cap W$  y tenemos que

$$D(\psi \circ \varphi^{-1})_{\varphi(x)}(a) = b$$

y también

$$D(\chi \circ \psi^{-1})_{\psi(x)}(b) = c$$

de donde resulta

$$D(\chi \circ \psi^{-1})_{\psi(x)}(D(\psi \circ \varphi^{-1})_{\varphi(x)}(a)) = c$$

o sea, aplicando la regla de la cadena:

$$D(\chi \circ \varphi^{-1})_{\varphi(x)}(a) = c,$$

y entonces

$$(x, (\varphi, U), a) \sim (z, (\chi, W), c).$$

Fijado el punto  $x \in M$ , las clases de equivalencia de una terna  $(x, (\varphi, U), a) \in M \times \mathcal{A} \times \mathbb{R}^n$  son los que llamaremos vectores del espacio tangente a  $M$  en el punto  $x$ . Ese espacio lo representaremos con la notación  $T_x M$ . En  $T_x M$  definimos una estructura de espacio vectorial como sigue:

si  $v, w \in T_x M$  existe  $(x, (\varphi, U), a) \in v$  representantes de la clase de equivalencia  $v$ . Existe también  $(x, (\psi, V), c) \in w$  representantes de  $w$ . Observemos que entonces, directamente de la definición de la relación  $\sim$ , otro representante de la clase  $w$  es

$$(x, (\varphi, U), D(\varphi \circ \psi^{-1})_{\psi(x)}(c))$$

Dicho de otro modo, podemos trabajar con un solo mapa coordenado. Llamando  $b = D(\varphi \circ \psi^{-1})_{\psi(x)}(c)$  queda  $(x, (\varphi, U), b) \in w$ ,  $(x, (\varphi, U), a) \in v$ . Definimos ahora la suma de vectores y producto por escalares del modo obvio:

- SUMA:  $v + w$  está dado por la clase de equivalencia de  $(x, (\varphi, U), a + b)$ .
- PRODUCTO POR ESCALARES:  $\lambda v$  está dado por la clase de equivalencia de  $(x, (\varphi, U), \lambda a)$ .

Es un ejercicio (un poco tedioso) el verificar que la suma y el producto por escalares así definidos verifican los axiomas de espacio vectorial y que la definición no depende de los representantes de la clase de  $v$  y  $w$  elegidos.

Si  $\{e_1 = (1, 0, \dots, 0), e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, e_n = (0, \dots, 0, 1)\}$  es la base canónica de  $\mathbb{R}^n$ , no es difícil probar que las clases de  $\{(x, (\varphi, U), e_j), j = 1, \dots, n\}$

forman una base de  $T_x M$ . Resulta entonces que  $\dim(T_x M) = \dim(M) = n$ , para todo punto  $x \in M$ .

...∞∞∞∞...

Una definición alternativa de espacio tangente a  $M$  en el punto  $x$ ,  $T_x M$ , se puede dar como sigue:

Un vector con componentes  $v = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n$  aplicado en el punto  $p \in \mathbb{R}^n$  puede verse como un operador actuando en las funciones reales diferenciables. Si  $f$  es una función diferenciable definida en algún entorno  $U \ni p$  entonces  $v$  asigna a  $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  el número real  $v(f)$  que es la derivada direccional de  $f$  en la dirección de  $v$  calculada en el punto  $p$ ;  $f \mapsto v(f)$ , donde

$$v(f) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(p + vt) - f(p)}{t} = v_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} \Big|_p + \dots + v_n \frac{\partial f}{\partial x_n} \Big|_p .$$

Dos leyes importantes son satisfechas por estas operaciones:

(Linealidad):

$$\forall f, g \in F_x, \forall \lambda \in \mathbb{R} : v(f + g) = v(f) + v(g); v(\lambda f) = \lambda v(f) .$$

(Regla de Leibnitz)

$$\forall f, g \in F_x : v(fg) = f(p)v(g) + v(f)g(p) .$$

Esto motiva la siguiente definición-ejercicio de vector tangente como un operador que actúa como la derivada direccional de funciones definidas en algún entorno de un punto en una variedad diferenciable.

Sea  $M$  una variedad diferenciable y  $x$  un punto en ella. Definimos el conjunto

$$\mathcal{F}_x = \{f : U(x) \rightarrow \mathbb{R} / f \text{ diferenciable para algún } U(x) \ni x, \text{ abierto en } M\} .$$

1. En  $\mathcal{F}_x$  definimos la relación  $\sim$  por:  $f \sim g$  sii existe  $E(x) \ni x$  abierto en  $M$  tal que  $f|_{E(x)} = g|_{E(x)}$ . Probar que la relación es de equivalencia. Decimos que dos funciones en la misma clase de equivalencia tienen el mismo germen en  $x$ . En  $F_x = \mathcal{F}_x / \sim$ , el espacio cociente, denotamos por  $[f]$  la clase de equivalencia (el germen de  $f$  en  $x$ ) en  $F_x$  de  $f \in \mathcal{F}_x$ . En  $F_x$  definimos las operaciones

$$[f] + [g] = [f + g]; \quad [f][g] = [fg] .$$

Probar que lo convierten en un anillo: el anillo de gérmenes de funciones diferenciables en  $x \in M$ . Observar que el germen  $[f]$  de una función  $f$  tiene un valor unívocamente determinado en  $x$ . Sea

$$I_x = \{[f] \in F_x / [f](x) = 0\} .$$

Mostrar que  $I_x$  es un ideal de  $F_x$ .

De aquí en más, para no recargar la notación, escribiremos  $f$  en lugar de  $[f]$ .

2. Decimos que  $\partial : F_x \rightarrow \mathbb{R}$  es una derivación en  $F_x$  si cumple:

- a) (Linealidad):  $\forall f, g \in F_x, \forall \lambda \in \mathbb{R}: \partial(f+g) = \partial(f) + \partial(g); \partial(\lambda f) = \lambda \partial(f)$ .
- b) (Regla de Leibnitz)

$$\forall f, g \in F_x : \partial(fg) = [f(x)]\partial(g) + \partial(f)g(x).$$

Mostrar que  $\partial(1) = 0$ , deducir que  $\forall \lambda \in \mathbb{R} : \partial(\lambda) = 0$ .

3. Sea

$$\mathcal{D}_x = \{\partial : F_x \in \mathbb{R} / \partial \text{ derivación en } F_x\}$$

Mostrar que  $(\mathcal{D}_x, +, \cdot, \mathbb{R})$  es un espacio vectorial sobre  $\mathbb{R}$  con la definición de suma y producto por escalares obvia:  $(\partial + \partial')(f) = \partial(f) + \partial'(f); (\lambda \partial)(f) = \lambda(\partial(f))$ .

4. Probar que si  $M$  es una variedad diferenciable de dimensión  $m$  entonces  $\dim_{\mathbb{R}}(\mathcal{D}_x) = m$ . [Sugerencia 1: si  $\varphi : U(x) \rightarrow \mathbb{R}^m$  es un mapa coordenado local,  $\varphi(y) = (\varphi_1(y), \dots, \varphi_m(y))$  entonces definiendo

$$\partial_i(f) = \frac{\partial f \circ \varphi}{\partial x_i}(\varphi(x))$$

tenemos que  $\{\partial_1, \partial_2, \dots, \partial_m\}$  es linealmente independiente y genera en  $\mathcal{D}_x$ .  $\partial_i$  así definida se llama la  $i$ -ésima derivada parcial de  $f$ . [Sugerencia 2: para ver que  $\{\partial_1, \partial_2, \dots, \partial_m\}$  genera  $\mathcal{D}_x$  tomar  $\partial$  una derivación. Si fuera cierto que  $\partial = \sum_j a_j \partial_j$ , aplicando  $\partial$  a las coordenadas  $\varphi_i$  del mapa coordenado  $\varphi$  quedaría que  $a_i = \partial(\varphi_i)$ . Entonces definiendo primero  $\partial\partial = \sum_j \partial(\varphi_j)\partial_j$  y luego  $\nabla = \partial - \partial\partial$  hay que verificar que  $\nabla$  es una derivación y que para todo germen de función  $f$  se cumple  $\nabla f = 0$ . Para esto desarrollar  $F = f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  en torno a  $\eta = \varphi(x)$  como

$$F(\tau) - F(\eta) = \sum_{j=1}^n L_j(\tau - \eta)$$

donde  $\varphi(q) = \tau$  y  $L_j$  son funciones  $C^\infty$ ].

- 5. Concluir que  $T_x M \cong \mathcal{D}_x$  como espacios vectoriales reales. Dicho de otro modo,  $\mathcal{D}_x$  proporciona un método alternativo de definir intrínsecamente  $T_x M$ .
- 6. Demostrar que  $\mathcal{D}_x \cong (I_x / I_x^2)$ .

### 1.2.1. Fibrado Tangente

Sea  $M$  una variedad diferenciable de clase  $C^r$ ,  $r \geq 2$  y dimensión  $n$ . Definimos  $TM$  el fibrado tangente de  $M$ , como la reunión de los pares  $(p, v)$  con  $p \in M$  y  $v \in T_pM$ . Si para cada  $p \in M$  elegimos  $v(p) \in T_pM$  el subconjunto  $\{(p, v(p))/p \in M\} \subset TM$  se llama una sección local de  $TM$ . Una sección local particular es la que elige  $v(p) = 0 \in T_pM$  para todo  $p \in M$ . Esa sección, llamada sección nula, se identifica con  $M$  mediante el mapa inyectivo

$$i : M \hookrightarrow TM, \quad i(p) = (p, 0) \quad \forall p \in M.$$

Existe un mapa inverso a izquierda de  $i$  dado por la función de  $TM$  sobre  $M$  llamada proyección canónica:

$$\Pi : TM \twoheadrightarrow M, \quad \Pi(p, v) = p \quad \forall (p, v) \in TM.$$

Se cumple que  $\Pi \circ i = id : M \rightarrow M$ ;  $i \circ \Pi(p, v) = (p, 0)$ . Si  $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  es un mapa coordinado de  $M$  vamos a considerar en  $TM$  mapas coordinados  $\hat{\varphi} : \Pi^{-1}(U) \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ . Definiremos de ese modo una estructura de variedad diferenciable de dimensión  $2n$  y clase  $C^{r-1}$  en  $TM$ . Sea  $\mathcal{A}$  un atlas diferenciable de clase  $C^r$  definiendo la variedad  $M$ . Para cada mapa coordinado local  $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $\varphi \in \mathcal{A}$  introducimos un mapa coordinado local

$$\hat{\varphi} : \Pi^{-1}(U) \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$$

en  $TM$  definido como sigue:

Sea  $\{X_1(p), \dots, X_n(p)\}$  la base de  $T_pM$  asociada al mapa coordinado  $\varphi$ . O sea, para todo  $v \in T_pM$  existen únicos  $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$  tales que  $v = \sum_{j=1}^n a_j X_j(p)$  y cada  $X_j(p)$  es el vector tangente a la curva  $\varphi^{-1}(\varphi(p) + te_j)$  en  $t = 0$ , donde  $e_j$  es el  $j$ -ésimo vector de la base canónica de  $\mathbb{R}^n$ , y  $t \in (-\epsilon, \epsilon)$  con  $\epsilon > 0$  pequeño tal que  $\varphi(p) + te_j \in \varphi(U)$  para todo  $t \in (-\epsilon, \epsilon)$ . Definimos

$$\hat{\varphi}(p, v) = (\varphi_1(p), \dots, \varphi_n(p), a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^{2n}.$$

Sea  $\hat{\mathcal{A}}$  el conjunto de todas las aplicaciones  $\hat{\varphi} : \hat{U} = \Pi^{-1}(U) \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$  con  $\varphi \in \mathcal{A}$  el atlas original en  $M$ . Entonces se puede probar que  $\hat{\mathcal{A}}$  es un atlas diferenciable de clase  $C^{r-1}$  definiendo que  $A$  es abierto en  $TM$  si y solo si para cada  $\hat{U}$  entorno coordinado en  $TM$   $\hat{\varphi}(\hat{U} \cap A)$  es un abierto de  $\mathbb{R}^{2n}$ . Esto convierte a  $TM$  en una variedad diferenciable de dimensión  $2n$ . Es bueno observar que aunque  $M$  sea compacta,  $TM$  no lo es.

Para ver que un cambio de coordenadas es de clase  $C^{r-1}$  consideremos  $\hat{\varphi} : \Pi^{-1}(U) \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$  y  $\hat{\psi} : \Pi^{-1}(V) \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$  dos mapas de  $\hat{\mathcal{A}}$  tales que  $\Pi^{-1}(U) \cap \Pi^{-1}(V) \neq \emptyset$ . Por

definición de  $TM$  y de  $\Pi$  se cumple que si  $U \cap V = \emptyset$  entonces  $\Pi^{-1}(U) \cap \Pi^{-1}(V) = \emptyset$  y resulta que  $\Pi^{-1}(U) \cap \Pi^{-1}(V) = \Pi^{-1}(U \cap V)$ . Basta entonces con probar que

$$\hat{\psi} \circ \hat{\varphi}^{-1} : \hat{\varphi}(\Pi^{-1}(U \cap V)) \rightarrow \hat{\psi}(\Pi^{-1}(U \cap V))$$

es de clase  $C^{r-1}$ . Si  $p \in U \cap V$  y  $v = \sum_{i=1}^n a_i X_i(p) = \sum_{j=1}^n b_j Y_j(p)$  donde  $X_i(p)$  son los vectores tangentes dados por el mapa coordenado  $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  y  $Y_j$  son los vectores tangentes asociados al mapa coordenado  $\psi : V \rightarrow \mathbb{R}^n$  entonces

$$\hat{\psi} \circ \hat{\varphi}^{-1}(\varphi_1(p), \dots, \varphi_n(p), a_1, \dots, a_n) = (\psi_1(p), \dots, \psi_n(p), b_1, \dots, b_n)$$

donde la aplicación

$$(\varphi_1(p), \dots, \varphi_n(p)) \mapsto (\psi_1(p), \dots, \psi_n(p))$$

es por hipótesis de clase  $C^r$  y

$$b_j = \sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial \psi_j}{\partial \varphi_i}(p).$$

Se deduce entonces que el cambio de coordenadas de  $\hat{\varphi}$  a  $\hat{\psi}$  es de clase  $C^{r-1}$ . Como el atlas  $\mathcal{A}$  puede elegirse numerable al ser  $M$ , por definición de variedad topológica, un espacio que cumple el segundo axioma de numerabilidad, el atlas  $\hat{\mathcal{A}}$  también puede ser tomado numerable. Para chequear que  $TM$  es Hausdorff consideremos  $(p, v)$  y  $(q, w)$  en  $TM$  distintos. Observemos que si  $U$  es un entorno coordenado del atlas  $\mathcal{A}$  entonces  $\Pi^{-1}(U) \cong U \times \mathbb{R}^n$ . En efecto, si  $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  es el mapa coordenado local, la transformación

$$(p, (a_1, \dots, a_n)) \in U \times \mathbb{R}^n \mapsto (p, \sum_{j=1}^n a_j X_j(p)) \in \Pi^{-1}(U)$$

realiza la congruencia. Así si  $(p, v)$  y  $(q, w)$  ambos están en  $\Pi^{-1}(U)$  para cierto entorno coordenado  $U$ , entonces existen abiertos disjuntos conteniendo cada uno de ellos porque  $U \times \mathbb{R}^n$  es un espacio de Hausdorff. Si no existe un mismo entorno coordenado  $\Pi^{-1}(U)$  del atlas  $\hat{\mathcal{A}}$  conteniendo a ambos elementos de  $TM$  entonces en particular  $\Pi(p, v) = p \neq \Pi(q, w) = q$ . Sea entonces  $U$  un entorno coordenado en  $M$  que contiene a  $p$  y  $V$  otro que contiene a  $q$  de modo que  $U \cap V = \emptyset$ . Entonces  $\Pi^{-1}(U) \ni (p, v)$  y  $\Pi^{-1}(V) \ni (q, w)$  y  $\Pi^{-1}(U) \cap \Pi^{-1}(V) = \emptyset$ . Esto termina la prueba de que  $TM$  es un espacio de Hausdorff y completa la prueba de que  $TM$  es una variedad diferenciable de clase  $C^{r-1}$  si  $M$  es una variedad de clase  $C^r$  y que la dimensión de  $TM$  es  $2n$  si  $n = \dim(M)$ .

Retomando la definición de sección local en  $TM$  hecha más arriba, observemos que en definitiva una sección es una función  $\sigma : M \rightarrow TM$  tal que  $\Pi \circ \sigma = Id : M \rightarrow M$ . Diremos que la sección es continua cuando  $\sigma$  es continua, que es de clase  $C^k$ ,  $k \leq r - 1$ , cuando  $\sigma : p \in M \mapsto (p, v(p)) \in T_pM$  es de clase  $C^k$ . Eso quiere decir que tomando mapas coordenados locales  $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  en  $M$  y  $\hat{\varphi} : \Pi^{-1}(U) \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$  en  $TM$  se tiene que

$$\hat{\varphi} \circ \sigma \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \rightarrow \hat{\varphi}(\Pi^{-1}(U))$$

es de clase  $C^k$ .

Una sección continua  $\sigma : M \rightarrow TM$  (de clase  $C^k$ ) en  $TM$  se llama un **campo de vectores** continuo (resp.: de clase  $C^k$ ) en  $M$ .

Dada  $f : M = M^m \rightarrow N = N^n$  una aplicación diferenciable queda definido, para cada  $p \in M$  un mapa lineal  $Df_p : T_pM \rightarrow T_{f(p)}N$  dado por

$$v \in T_pM \mapsto Df_p(v) \in T_{f(p)}N$$

como sigue:

Si  $v \in T_pM$  es un vector tangente en  $p \in M$ , entonces se escribe como la clase de equivalencia de  $(p, (\varphi, U), a)$  con  $p \in U$ ,  $(\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^m \in \mathcal{A}$ , el atlas definiendo la estructura diferenciable en  $M$ . Sea  $\psi : V = V(f(p)) \rightarrow \mathbb{R}^n$  un mapa coordenado en el atlas  $\mathcal{B}$  definiendo la estructura diferenciable en  $N$ . El vector  $Df_p(v)$  es la clase de equivalencia de

$$(q, (\psi, V), D(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})_{\varphi(p)}(a)).$$

Queda como ejercicio verificar que la definición de  $Df_p(v)$  no depende de los representantes de la clase de  $v$  ni del mapa  $\psi : V \rightarrow \mathbb{R}^n$ . A veces escribiremos  $Df_p \cdot v$  o  $Df_p v$  en lugar de  $Df_p(v)$ .

**Definición 1.2.1.** Si  $f : M \rightarrow N$  es una aplicación diferenciable, decimos que  $p \in M$  es un punto no singular si  $Df_p : T_pM \rightarrow T_{f(p)}N$  es inyectiva.

**Definición 1.2.2.** Dadas las variedades diferenciables  $M = M^m$  y  $N = N^n$  decimos que  $M$  es una subvariedad encajada en  $N$  sii:

1.  $M \subset N$  y la topología de  $M$  coincide con la topología inducida por  $N$ . O sea,  $U \subset M$  es abierto de  $M$  sii existe  $U^* \subset N$  abierto, tal que  $U = U^* \cap M$ .
2. La inclusión  $M \hookrightarrow N$  es no singular en todo punto  $p \in M$ . O sea, si  $p \in M \subset N$  y  $\varphi : U(p) \subset M \rightarrow \mathbb{R}^m$  es un mapa coordenado local para  $p$  en

$M$ , y  $\psi : V(p) \subset N \rightarrow \mathbb{R}^n$  es un mapa coordenado local para  $p$  en  $N$  con  $U(p) \subset V(p)$  entonces

$$\psi \circ \varphi^{-1} : \varphi(U(p)) \rightarrow \psi(V(p))$$

es una aplicación diferenciable no singular en todo punto de  $\varphi(U(p))$ .

**Definición 1.2.3.** Decimos que  $M$  es una subvariedad inmersa en la variedad  $N$  sii

1.  $M \subset N$ .
2. La inclusión  $M \hookrightarrow N$  es no singular en todo punto  $p \in M$ . O sea, si  $p \in M \subset N$  y  $\varphi : U(p) \subset M \rightarrow \mathbb{R}^m$  es un mapa coordenado local para  $p$  en  $M$ , y  $\psi : V(p) \subset N \rightarrow \mathbb{R}^n$  es un mapa coordenado local para  $p$  en  $N$  con  $U(p) \subset V(p)$  entonces

$$\psi \circ \varphi^{-1} : \varphi(U(p)) \rightarrow \psi(V(p))$$

es una aplicación diferenciable no singular en todo punto de  $\varphi(U(p))$ .

**Observación 1.2.1.** Las definiciones dadas anteriormente obligan a que  $\dim(M) \leq \dim(N)$ .

Más adelante definiremos punto regular asociado a una aplicación diferenciable  $f : M \rightarrow N$  como un punto  $p \in M$  en donde  $Df_p$  es sobreyectivo, o sea, el rango de la aplicación lineal debe ser mayor que  $\dim(N)$ . Esto obliga a que  $\dim(M) \geq \dim(N)$ .

**Definición 1.2.4.** Un mapa  $f : M \rightarrow N$  es una inmersión si  $Df_p$  es no singular para todo  $p \in M$ .

**Definición 1.2.5.** Una inmersión  $f : M \rightarrow N$  se dice un encaje si es un homeomorfismo sobre su imagen.

Ejemplos:

1.  $S^1 \subset \mathbb{R}$ ,  $S^2 \subset \mathbb{R}^3$  y más en general,  $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 1$ , son subvariedades encajadas en  $\mathbb{R}^n$ . La inclusión en este caso es un encaje. ( $S^0$  es por definición la unión de un par de puntos distintos; del mismo modo  $\mathbb{R}^0$  es por definición un punto.)
2. Sea  $M = S^1$ . Una manera natural de ver a  $S^1$  es como el cociente de  $\mathbb{R}$  con la relación que identifica puntos sobre  $\mathbb{R}$  a distancia entre ellos un múltiplo entero:

$$\forall x, y \in \mathbb{R} : x \sim y \iff \exists k \in \mathbb{Z} : y - x = k.$$

De este modo  $S^1 \cong \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ .

Análogamente,  $\mathbf{T}^2$  puede verse como  $S^1 \times S^1$  y también como el cociente  $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$  donde identificamos los puntos  $(x_1, x_2)$  e  $(y_1, y_2)$  de  $\mathbb{R}^2$  si  $x_1 - y_1 \in \mathbb{Z}$  y también  $x_2 - y_2 \in \mathbb{Z}$ . Si  $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$  denotamos su clase de equivalencia por  $\bar{x}$ . El mapa proyección  $\Pi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbf{T}^2$  es un difeomorfismo local en cada punto  $p$  de  $\mathbf{T}^2$ , o sea, para cada preimagen  $x \in \mathbb{R}^2$  de  $p \in \mathbf{T}^2$  existe un entorno  $U = U(x)$  tal que  $\Pi|_U : U \rightarrow \Pi(U)$  es un difeomorfismo.

Consideremos en  $\mathbb{R}^2$  la recta  $r$  de ecuación  $y = \alpha x$ . Se tiene que  $\Pi(r)$  es una subvariedad inmersa en  $\mathbf{T}^2$ .

Pero si  $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  entonces la imagen de la recta es densa en  $\mathbf{T}^2$ . Se deduce que  $\Pi(r) \subset \mathbf{T}^2$  no puede ser una subvariedad encajada en  $\mathbf{T}^2$ . Sin embargo si  $\alpha \in \mathbb{Q}$  entonces  $\Pi(r) \subset \mathbf{T}^2$  es una subvariedad encajada. Pero en este último caso  $\Pi(r)$  es una circunferencia. Así la proyección  $\Pi|_r : r \rightarrow \mathbf{T}^2$  no es un encaje, pero sí una inmersión.

3. El subconjunto  $X$  del plano  $\mathbb{R}^2$  dado por

$$X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^4 - y^3 = 0\},$$

tiene una estructura de subvariedad de clase  $C^1$  de  $\mathbb{R}^2$ . Si consideramos la función  $F(x, y) = x^4 - y^3$ , resulta que  $X = F^{-1}(0)$ . No podemos aplicar el Teorema de la Función Implícita pues el gradiente  $\nabla F$  de  $F$  se anula en  $(0, 0)$  (si pudiéramos aplicar dicho teorema  $X$  sería una subvariedad  $C^\infty$ ). Pero  $X$  puede verse también como  $G^{-1}(0)$  con  $G(x, y) = y - x^{4/3}$ . Para esta función

$$\nabla G(x, y) = \left(-\frac{4}{3}x^{1/3}, 1\right) \neq (0, 0) \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,$$

Por tanto  $X$  es de clase  $C^1$ . Pero  $X$  no admite ninguna estructura de subvariedad de clase  $C^2$  de  $\mathbb{R}^2$ .

4. El subconjunto

$$Q = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 = y^3\},$$

es una subvariedad de  $\mathbb{R}^2$  que es solo de clase  $C^0$ . Por otro lado puede dotarse a  $Q$  de una estructura de variedad  $C^\infty$ . En efecto:  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow Q$  dada por  $\varphi(t) = (t, t^{2/3})$  es un homeomorfismo entre  $\mathbb{R}$  y  $Q$ . Un atlas  $C^\infty$  para  $Q$  lo obtenemos así:

Sea  $\mathcal{A}$  un atlas  $C^\infty$  para  $\mathbb{R}$  (por ejemplo el dado por  $(\mathbb{R}, id : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R})$ ). Para  $Q$  definimos el atlas dado por  $x \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \rightarrow \mathbb{R}$  donde  $x : U \rightarrow \mathbb{R}$  pertenece al atlas  $\mathcal{A}$ .

Ejercicio: Justificar adecuadamente las afirmaciones hechas más arriba en los ejemplos. Para ver que la proyección  $\Pi(r)$  de la recta  $r$  de ecuación  $y = \alpha x$  es densa en  $T^2$  si  $\alpha$  es irracional se sugiere probar que el subconjunto de los reales formado por

$$G = m + \alpha n, \quad m, n \in \mathbb{Z},$$

es un subgrupo denso de  $(\mathbb{R}, +)$ . A continuación se sugiere probar que el subconjunto de  $\mathbb{R}^2$  formado por los puntos  $P = (x, y)$  tales que

$$P = (t + m, \alpha t + n), \quad m, n \in \mathbb{Z},$$

es denso en  $\mathbb{R}^2$ .

**Teorema 1.2.1.** Forma local de las inmersiones

Sea  $f : M = M^m \rightarrow N = N^n$  una inmersión (por lo tanto  $m \leq n$ ). Para todo punto  $p \in M$ ,  $q = f(p) \in N$ , existen mapas coordenados locales  $\varphi : U(p) \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $\psi : V(q) \rightarrow \mathbb{R}^n$ , tales que

$$\psi \circ f \circ \varphi^{-1}(x_1, x_2, \dots, x_m) = (x_1, x_2, \dots, x_m, 0, \dots, 0).$$

A la inmersión de  $\mathbb{R}^m$  en  $\mathbb{R}^n$ ,  $m \leq n$ , definida por

$$\iota : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad \iota(x_1, \dots, x_m) = (x_1, \dots, x_m, 0, \dots, 0),$$

se le llama la inmersión canónica. El teorema dice que localmente todas las inmersiones se ven como la canónica eligiendo las coordenadas adecuadas.

*Demostración.* Sean  $\varphi_1 : U = U(p) \rightarrow \mathbb{R}^m$  y  $\psi_1 : V = V(q) \rightarrow \mathbb{R}^n$  mapas coordenados definidos en entornos de  $p$  y  $q = f(p)$  respectivamente. Llamemos  $F$  al mapa diferenciable

$$F = \psi_1 \circ f \circ \varphi_1^{-1} : U' = \varphi_1(U) \subset \mathbb{R}^m \rightarrow V' = \psi_1(V) \subset \mathbb{R}^n,$$

entre los abiertos  $U'$  de  $\mathbb{R}^m$  y  $V'$  de  $\mathbb{R}^n$ . Sea  $x^0 = \varphi_1(p)$ .  $F$  se ve en coordenadas como

$$F(x_1, \dots, x_m) = (F_1(x_1, \dots, x_m), \dots, F_m(x_1, \dots, x_m), F_{m+1}(x_1, \dots, x_m), \dots, F_n(x_1, \dots, x_m)).$$

Se tiene que  $DF_{x^0}$  es inyectiva al ser  $f$  una inmersión, esto implica que existe una submatriz  $m \times m$  de  $DF_{x^0}$  tal que su determinante es no nulo, y a menos de reordenar  $(F_1, \dots, F_n)$  podemos suponer que esa submatriz está formada por las primeras  $m$  filas, o sea:

$$\det \left( \frac{\partial (F_1, \dots, F_m)}{\partial (x_1, \dots, x_m)}(x^0) \right) \neq 0.$$

Obsérvese que ese reordenamiento equivale a componer  $\varphi_1$  a la derecha en  $\mathbb{R}^m$  con una isometría  $I_1$  y componer  $\psi_1$  a la izquierda en  $\mathbb{R}^n$  con una isometría  $I_2$ . Consideremos la inmersión canónica de  $\mathbb{R}^m$  en  $\mathbb{R}^n$  en el dominio de definición de  $F$  y extendámosla como una función diferenciable  $\hat{F}$  a un entorno de  $x^0$  en  $\mathbb{R}^n$  así:

$$\hat{F}(x_1, \dots, x_m, x_{m+1}, \dots, x_n) = (F_1(x_1, \dots, x_m), \dots, F_m(x_1, \dots, x_m), F_{m+1}(x_1, \dots, x_m) + x_{m+1}, \dots, F_n(x_1, \dots, x_m) + x_n).$$

Aquí  $(x_1, \dots, x_m) \in U'$  y  $(x_{m+1}, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n - m$ , de donde  $\hat{F} : U' \times \mathbb{R}^{n-m} \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Es claro además que  $\hat{F}(x_1, \dots, x_m, 0, \dots, 0) = F(x_1, \dots, x_m)$ . Evaluando  $D\hat{F}$  en  $(x_1^0, \dots, x_m^0, 0, \dots, 0)$  queda como matriz jacobiana  $J(\hat{F})_{(x_1^0, \dots, x_m^0, 0, \dots, 0)}$ :

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial(F_1, \dots, F_m)}{\partial(x_1, \dots, x_m)} & 0 \\ * & Id \end{pmatrix}$$

Como

$$\det D\hat{F}_{(x_1^0, \dots, x_m^0, 0, \dots, 0)} = \det\left(\frac{\partial(F_1, \dots, F_m)}{\partial(x_1, \dots, x_m)}(x^0)\right) \neq 0$$

resulta por el Teorema de la Función Inversa que existe un entorno  $W \subset U'$  de  $(x_1^0, \dots, x_m^0, 0, \dots, 0)$  en  $\mathbb{R}^n$ , tal que en él  $\hat{F}$  es un difeomorfismo. Sea  $W' = \hat{F}(W) \subset \mathbb{R}^n$ . Entonces  $\psi_1(q) \in W'$ . Si  $G = F^{-1}$  entonces eligiendo  $\psi = G \circ I_2 \circ \psi_1$  y  $\varphi = \varphi_1 \circ I_1$  se tiene la tesis (¡comprobarlo!).  $\square$

### 1.3. Teorema de Sard

**Definición 1.3.1.** Sea  $f : M = M^m \rightarrow N = N^n$  una función diferenciable entre las variedades  $M$  y  $N$ . Un punto  $p \in M$  se dice un punto regular para  $f$  si  $Df_p : T_p M \rightarrow T_{f(p)} N$  es sobreyectiva (la transformación lineal  $Df_p$  tiene rango  $n$ ). Un punto  $p \in M$  se dice un punto crítico para  $f$  si  $Df_p : T_p M \rightarrow T_{f(p)} N$  no es sobreyectiva (la transformación lineal  $Df_p$  tiene rango menor que  $n$ ).

**Definición 1.3.2.** Sea  $f : M = M^m \rightarrow N = N^n$  una función diferenciable entre las variedades  $M$  y  $N$  y sea  $c \in N$ . El punto  $c$  se dice un valor regular de la función  $f$  si para todo  $x \in f^{-1}(c)$  se cumple que  $x$  es un punto regular para  $f$ .

Obsérvese que si  $f^{-1}(c) = \emptyset$  entonces  $c$  es un valor regular de  $f$ .

El Teorema de Sard dice que si  $f : M \rightarrow N$  es una función diferenciable de clase  $C^\infty$  el conjunto de valores regulares es casi toda la variedad  $N$ . Más exactamente probaremos que:

**Teorema 1.3.1.** Sean  $M = M^n$  y  $N = N^p$  variedades diferenciables compactas. Si  $f : M \rightarrow N$  es una función diferenciable de clase  $C^\infty$  entonces si  $C$  es el conjunto de puntos críticos para la función  $f$  resulta que  $f(C) \subset N$  tiene medida de Lebesgue nula en  $N$ .

El enunciado hace referencia a que  $f(C)$  tiene medida nula en  $N$ . Necesitamos entonces dar un enunciado preciso de esa noción.

Recordamos que  $K \subset \mathbb{R}^n$  es de medida nula si  $\forall \epsilon > 0$  existe un cubrimiento numerable de  $K$  por bolas  $B_1, B_2, \dots$  tales que  $\sum_j \text{Vol} B_j < \epsilon$ . Si  $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ , son todos de medida nula entonces  $X = \cup_j X_j$  es de medida nula. Más aún, si  $Y \subset \cup_j X_j$  entonces  $Y$  es de medida nula. Si  $M$  es una variedad (topológica o diferenciable) entonces, por definición, existe un cubrimiento numerable de  $M$  por entornos coordinados  $U$ , o sea, dominios de mapas coordinados locales.

**Definición 1.3.3.** Sea  $M = M^n$  una variedad diferenciable (de clase  $C^\infty$ ). Decimos que  $X \subset M$  es un conjunto de medida (de Lebesgue) nula (o de medida 0) si  $X = \cup_j X_j$  tal que cada  $X_j$  está contenido en un entorno coordinado  $U_j$  tal que si  $\varphi_j : U_j \rightarrow \mathbb{R}^n$  es el mapa coordinado local correspondiente entonces  $\varphi(U_j \cap X_j)$  es de medida nula en  $\mathbb{R}^n$ .

La definición no depende de la descomposición de  $X$  en la unión  $X_j$  particular ni en los mapas coordinados locales. Para ver esto probamos el siguiente resultado:

**Lema 1.3.1.** Sea  $\varphi : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  una función de clase  $C^1$ ,  $U$  abierto en  $\mathbb{R}^n$ . Entonces si  $X \subset U$  es un cerrado de medida nula en  $\mathbb{R}^n$  también  $\varphi(X)$  es de medida nula en  $\mathbb{R}^n$ .

*Demostración.* Supongamos que  $X$  es compacto. Entonces existe  $V$  tal que  $X \subset \text{Cl}(V) \subset U$  con  $\text{Cl}(V)$  compacto. En  $\text{Cl}(V)$  la función  $\varphi$  es uniformemente Lipschitziana, i.e.: existe  $K > 0$  tal que  $\|\varphi(x) - \varphi(y)\| \leq K\|x - y\|$  para todo  $x, y \in \text{Cl}(V)$ . Si  $\{B_1, B_2, \dots\}$  es un cubrimiento de  $X$  por bolas entonces si  $r_i$  es el radio de la bola  $B_i$  y  $c_i$  es su centro, o sea  $B_i = B(c_i, r_i)$ , entonces si  $x \in B_i$  entonces  $\|\varphi(x) - \varphi(c_i)\| \leq Kr_i$ . Por lo tanto  $\varphi(B_i) \subset B(\varphi(c_i), Kr_i)$ . Claramente  $\{B(\varphi(c_1), Kr_1), B(\varphi(c_2), Kr_2), \dots\}$  cubre  $\varphi(X)$ . Se deduce que si  $\sum_j \text{Vol}(B_j) < \epsilon$ , con  $\epsilon > 0$  arbitrario, entonces  $\sum_j \text{Vol}(B(c_j, Kr_j)) < K^n \epsilon$ . Si  $X$  no es compacto podemos escribir  $U$  como  $U = \cup_{n>0} U_n$  donde

$$U_n = \left\{ x \in U / \|x\| \leq n, \text{dist}(x, \partial U) \geq \frac{1}{n} \right\},$$

y probar, como más arriba, que cada conjunto  $X_n = X \cap U_n$  es de medida nula.  $\square$

Si  $X$  no es compacto la prueba anterior fracasa pero eso no lo usaremos.

Una consecuencia inmediata es que un cambio de coordenadas en una variedad  $M = M^n$  va a llevar un conjunto de medida nula en la imagen de un mapa coordinado en un conjunto de medida nula. De donde la definición de ser de medida nula en una variedad diferenciable no depende de los mapas coordinados particulares.

**Lema 1.3.2.** *Sea  $M = M^n$  una variedad diferenciable y sea  $X \subset M$  tal que para todo  $p \in M$  se cumple que existe  $U(p)$  entorno de  $p$  en  $M$  tal que la medida de  $U(p) \cap X$  es nula. Entonces la medida de  $X$  es nula.*

*Demostración.* La variedad  $M$  admite, como espacio topológico, una base numerable de entornos.  $\square$

Como consecuencia de la definición de medida nula en una variedad y de los lemas anteriores para probar el Teorema de Sard alcanza con probar que:

Si  $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$  es una función diferenciable (de clase  $C^\infty$ ),  $U$  abierto, y  $C \subset U$  es el conjunto de puntos críticos de la función  $f$  entonces  $f(C)$  tiene medida nula en  $\mathbb{R}^p$ .

La prueba del Teorema de Sard va a ser hecha por inducción en las dimensión  $n$  de la variedad  $M$ ,  $f : M \rightarrow N$ . Vamos a precisar el siguiente resultado que es un caso particular del Teorema de Fubini.

**Lema 1.3.3.** *Sea  $X \subset \mathbb{R}^n$  un conjunto cerrado tal que para todo hiperplano  $H$  de  $\mathbb{R}^n$  la medida de  $X \cap H$  es nula (como medida  $(n - 1)$  dimensional). Entonces la medida de  $X$  en  $\mathbb{R}^n$  es nula.*

*Demostración.* Supongamos inicialmente que  $X$  es compacto y que existen hiperplanos  $P(x)$  paralelos entre sí y transversales a un segmento  $[a, b]$ ,  $x \in [a, b]$ , tales que la medida  $(n - 1)$  dimensional de  $X \cap P(x)$  es nula para todo  $x \in [a, b]$  y que  $X \subset \cup_{x \in [a, b]} P(x)$ . Entonces  $X$  tiene medida  $n$  dimensional nula.

Dado  $\epsilon > 0$ , para cada hiperplano  $P(x)$  existe un cubrimiento numerable por bolas  $(n - 1)$  dimensionales  $\{C_i(x)\}$  de  $X \cap P(x)$ , tal que  $\sum_i \text{Vol}_{n-1}(C_i) < \epsilon$ . Afirmamos que para todo  $x \in [a, b]$  existe  $\alpha_x > 0$  tal que el producto  $\{C_i(x) \times (x - \alpha_x, x + \alpha_x)\}$  es un cubrimiento por cilindros  $n$  dimensionales de  $X \cap (\cup_{x \in [a, b]} P(x))$ . En efecto, si así no fuera, existiría  $x \in [a, b]$  tal que para todo  $\alpha > 0$  existiría  $z_\alpha \in X \cap (\cup_{x \in [a, b]} P(x))$  tal que  $z_\alpha \notin \cup_i (C_i(x) \times (x - \alpha, x + \alpha))$ . Tomando límite para  $\alpha \rightarrow 0$  y una subsucesión convergente de  $\{z_\alpha\}$  obtenemos un punto  $z \in X \cap P(x)$ , pues  $X$  es cerrado, tal que  $z \notin \cup_i C_i(x)$ , contradiciendo que  $\{C_i(x)\}$  es un cubrimiento de  $X \cap P(x)$ . Como  $X$  es compacto existe un subcubrimiento finito de la forma anterior de todo  $X$ . Más aun, existe un subcubrimiento

$$X \subset \bigcup_{i,j} (C_i(x_j) \times (x_j - \alpha_j, x_j + \alpha_j))$$

tal que si para algún  $j_0$  extraigo algún sub cubrimiento de la forma  $C_i(x_{j_0}) \times (x_{j_0} - \alpha_{j_0}, x_{j_0} + \alpha_{j_0})$  entonces

$$X \not\subset \cup_{i,j \neq j_0} (C_i(x_j) \times (x_j - \alpha_j, x_j + \alpha_j)).$$

Afirmamos que la suma total en  $j$  de las longitudes de los segmentos  $(x_j - \alpha_j, x_j + \alpha_j) \subset [a, b]$  no sobrepasa  $3|b - a|$  para el cubrimiento elegido. Se deduce que

$$\begin{aligned} \sum_{i,j} \text{Vol}_n(C_i(x_j) \times (x_j - \alpha_j, x_j + \alpha_j)) &= \sum_j \sum_i \text{Vol}_n(C_i(x_j) \times (x_j - \alpha_j, x_j + \alpha_j)) \leq \\ &\sum_j \epsilon |(x_j - \alpha_j, x_j + \alpha_j)| \leq 3|b - a|\epsilon. \end{aligned}$$

Esto demuestra que  $X$ , si es compacto, tiene medida nula. El caso general de  $X$  cerrado se deduce de éste (ejercicio). (Cortar  $X$  con  $\{x \in \mathbb{R}^n / \|x\| \leq n\}, n \in \mathbb{N}$ ).  $\square$

Demostremos ahora el Teorema de Sard. Como ya vimos alcanza con probar que si  $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$  es una función diferenciable (de clase  $C^\infty$ ),  $U$  abierto, y  $C \subset U$  es el conjunto de puntos críticos de la función  $f$  entonces  $f(C)$  tiene medida nula en  $\mathbb{R}^p$ .

*Demostración.* Como ya anunciamos la prueba será por inducción en  $n$ , basándonos en la prueba dada en el libro de J. Milnor, "Topology from the differentiable viewpoint". Esta demostración coincide también esencialmente con la dada en el apéndice 1 del libro de Victor Guillemin y Alan Pollack "Differential Topology". El enunciado tiene sentido para  $n \geq 0$  y  $p \geq 1$ . Claramente para  $n = 0$  es verdadero pues  $\mathbb{R}^0$  es un punto.

Sin embargo, el caso  $n = 0$  es poco intuitivo, tratemos de probarlo para  $n = 1$  directamente. En este caso tenemos que  $f : U \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^p$  es una curva parametrizada. Por el Teorema de Lindeloff,  $U$  es una unión numerable de intervalos abiertos disjuntos:  $U = \cup_i I_i$ . Si llamamos  $C_i = C \cap I_i$  y probamos que  $f(C_i)$  tiene medida 0 habremos probado todo, pues  $C = \cup_i C_i$ . Sea entonces  $I = I_i$  con  $i \in \mathbb{N}$  fijo. Si  $p = 1$  los puntos críticos en este caso son simplemente aquellos en que  $f'(x) = 0$ . Por Taylor se cumple para  $x \in C \cap I$  que

$$|f(x+h) - f(x)| = |R(x,h)|h^2, \quad R(x,h) \text{ continua.}$$

Sea  $I = (a, b)$  y tomemos  $a_j \rightarrow a^+$  y  $b_j \rightarrow b^-$ . En el intervalo compacto  $[a_j, b_j]$  existe  $L > 0$  fijo tal que  $\forall x \in C \cap [a_j, b_j]$  se cumple:  $|f(x+h) - f(x)| \leq Lh^2$ . Si

dividimos el intervalo  $[a_j, b_j]$  en  $k$  sub-intervalos de igual longitud  $(b_j - a_j)/k$ , en el peor caso tendremos que cada uno contendrá puntos de  $C$ . En ese caso, la imagen por  $f$  de dichos sub-intervalos estará contenida en un intervalo de lado menor o igual que  $2L(b_j - a_j)^2/k^2$ . Como hay  $k$  sub-intervalos a lo sumo cada uno de ellos contendrá puntos críticos, de donde a lo más precisaremos  $k$  sub intervalos en  $\mathbb{R}$  de longitud  $2L(b_j - a_j)^2/k^2$  de donde la longitud total  $V$  de la unión de dichos sub-intervalos (pueden tener partes comunes) no sobrepasa

$$V \leq k \times (2L(b_j - a_j))^2/k^2 = H/k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0.$$

Aquí  $H = (2L(b_j - a_j))^2$  es una constante que depende de  $f$  y de la longitud de  $[a_j, b_j]$ . Como consecuencia, la medida de  $f(C \cap [a_j, b_j])$  es nula. Como (aún en el caso en que  $a = -\infty$  o  $b = +\infty$ )  $f(C)$  se escribe como  $f(\cup_j(C \cap [a_j, b_j]))$  resulta que  $f(C)$  tiene medida nula y hemos probado el caso  $n = 1$  si  $p = 1$ . Si  $p > 1$  entonces todo punto de  $U$  es un punto crítico. Hay que probar entonces que  $f(U)$  tiene medida nula en  $\mathbb{R}^p$  con  $p \geq 2$ . Otra vez  $U \subset \mathbb{R}$  es unión numerable de intervalos disjuntos  $I_j$ . Alcanza entonces con probar que si  $I = I_j$  es uno de esos intervalos entonces  $f(I)$  tiene medida nula en  $\mathbb{R}^p$ ,  $p \geq 2$ . En este caso otra vez consideramos  $(a, b) = I$  y sucesiones  $a_j \rightarrow a^+$ ,  $b_j \rightarrow b^-$ . De modo que  $I = \cup_j[a_j, b_j]$ . Para cada  $[a_j, b_j]$  existe  $L = L(f) > 0$  tal que  $\|f(y) - f(x)\| \leq L|y - x|$  (pues  $f$  es de clase  $C^1$  en  $I$ ). Otra vez subdividimos  $[a_j, b_j]$  en  $k$  sub-intervalos de longitud  $(b_j - a_j)/k$  los extremos del  $i$ -ésimo sub-intervalo son  $a_j + i(b_j - a_j)/k$  y  $a_j + (i + 1)(b_j - a_j)/k$ ,  $i = 0, 1, \dots, k - 1$ . Entonces se tiene que la imagen de cada sub-intervalo está contenida en un cubo de arista de longitud menor o igual que  $L(b_j - a_j)/k$ . El volumen  $p$ -dimensional de este cubo es  $L^p(b_j - a_j)^p/k^p = H/k^p$  con  $H$  una constante. Como hay  $k$  intervalos, el volumen total  $V$  de la unión de los cubos necesarios para cubrir  $f([a_j, b_j])$  está acotado por  $V \leq k \times H/k^p$ . Como  $p \geq 2$  el volumen tiende a 0 cuando  $k \rightarrow +\infty$ . Como  $I$  es unión numerable de  $[a_j, b_j]$  resulta que  $f(I)$  tiene medida nula en  $\mathbb{R}^p$ . Luego también  $f(U)$  tiene medida nula en  $\mathbb{R}^p$ . Esto completa la demostración para  $n = 1$  valga  $p \geq 1$  lo que valga. La prueba que hicimos para  $n = 1$   $p > 1$  puede hacerse en general en el caso  $n < p$ . En este caso hay que probar directamente que  $f(U)$  tiene medida nula en  $\mathbb{R}^p$ . Eso es falso si  $f$  es solo continua. El ejemplo de la curva de Peano (ver por ejemplo T. Apostol, "Análisis Matemático" segunda edición, Editorial Reverté, pp 272-273) muestra una función continua de  $I = [0, 1]$  en  $\mathbb{R}^2$  cuya imagen tiene área; es el cuadrado  $[0, 1]^2$ .

Supongamos ahora que vale la tesis para toda función  $g : U \subset \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^p$  de clase  $C^\infty$ , con  $U$  abierto en  $\mathbb{R}^{n-1}$ ,  $n \geq 2$ . La prueba para el caso  $n = 1, p = 1$  no puede generalizarse directamente al caso  $n \geq p$  porque en general no va a pasar que se anule la derivada en los puntos de  $C$ , es más, aunque eso pasara, del hecho de

la anulaci3n de la primera derivada no puede darse la prueba anterior de que  $f(C)$  tiene medida nula en  $\mathbb{R}^p$ . La raz3n es que si  $n > 1$ , el procedimiento anterior va a involucrar subdividir no intervalos en  $k$  partes iguales sino cubos  $n$ -dimensionales en  $k^n$  cubos iguales. La acotaci3n anterior va a quedar, siempre en el caso de que se anule la derivada  $Df_x$  con  $x \in C$ ,

$$V \leq k^n \times (\text{constante})^{2p} / k^{2p} = H/k^{2p-n}.$$

Pero si  $n \geq 2p$  la expresi3n anterior no tiende a 0 cuando  $k \rightarrow \infty$ . Pero la prueba ilustra el por qu3 falla, si en lugar de anularse la primera derivada se anularan todas las derivadas parciales hasta el orden  $h$  inclusive, con  $h$  suficientemente grande, de la f3rmula de Taylor se tendr3a

$$\|f(x+h) - f(x)\| \leq R(x,h)\|h\|^{h+1}, \quad R(x,h) \text{ continua,}$$

por lo que la acotaci3n del volumen  $p$ -dimensional total va a quedar  $V \leq H/k^{(h+1)p-n}$  y si  $(h+1)p - n > 0$  va a tender a 0 con  $k \rightarrow \infty$ .

Para obtener una prueba completa vamos entonces a subdividir el conjunto de puntos cr3ticos del siguiente modo: Sea

$$C_1 = \{x \in C / Df_x = 0\},$$

sea en general

$$C_h = \{x \in C / \text{se anulan todas las derivadas parciales de } f \text{ hasta el orden } h\}.$$

Probaremos primero que  $f(C \setminus C_1)$  tiene medida  $p$  dimensional nula, aqu3 usaremos el lema 1.3.3. Luego probaremos que  $f(C_h \setminus C_{h+1})$  tiene medida nula y finalmente que existe  $h$  tal que  $f(C_h)$  tiene medida nula, es aqu3 que aparecen las ideas antes expuestas en el caso  $n = 1$ . En el caso de que  $f$  fuera anal3tica (desarrollable en serie de potencias) el 3ltimo paso es innecesario.

Supongamos que  $x^0 \in C \setminus C_1$ . Entonces al menos una entrada de la matriz Jacobiana ( $(Df_{x^0})$ ) es no nula. Podemos suponer que  $\frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x^0) \neq 0$ . Existe entonces un entorno  $V = V(x^0) \subset U \subset \mathbb{R}^n$  en el cual la funci3n  $h(x) = h(x_1, x_2, \dots, x_n) = (f_1(x), x_2, \dots, x_n)$ ,  $h : V \rightarrow V' \subset \mathbb{R}^n$ , es un difeomorfismo. Sea  $g : V' \rightarrow \mathbb{R}^p$  definida por  $f \circ h^{-1}$ . Sea  $C' \subset V'$  el conjunto de puntos cr3ticos de  $g$ . Como  $h$  es un difeomorfismo resulta que  $y \in C'$  sii  $h^{-1}(y)$  est3 en  $C \cap V$ , de donde  $C' = h(C \cap V)$  por lo que  $f(V \cap C) = g(C')$ . Adem3s

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, \dots, x_n) &= (f_1(x_1, x_2, \dots, x_n), f_2(x_1, \dots, x_n), \dots, f_n(x_1, x_2, \dots, x_n)) = \\ &= f \circ h^{-1}((f_1(x_1, x_2, \dots, x_n), x_2, \dots, x_n)) = g(f_1(x_1, x_2, \dots, x_n), x_2, \dots, x_n); \end{aligned}$$

por lo que  $g$  fija la primera coordenada:

$$g(t, x_2, \dots, x_n) = (t, g_2(t, x_2, \dots, x_n), \dots, g_p(t, x_2, \dots, x_n)).$$

Entonces  $g$  manda hiperplanos  $(n-1)$ -dimensionales cortados con  $V'$  en hiperplanos  $(p-1)$ -dimensionales. Para cada  $t$  fijo sea  $g_t : V_t \subset \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^{p-1}$  dada por  $g_t(y_1, \dots, y_{n-1}) = g(t, y_1, \dots, y_{n-1})$  donde  $V_t = V' \cap \{x_1 = t\}$  es un abierto del hiperplano  $\{x_1 = t\}$  que se identifica con  $\mathbb{R}^{n-1}$ . Si  $x \in C'$  existe  $t$  tal que  $x = (t, x_2, \dots, x_n) \in V_t$ , o sea, llamando  $y_1 = x_2, \dots, y_{n-1} = x_n$  el punto  $((y_1, \dots, y_{n-1}))$  es crítico para  $g_t$ . Se deduce que si  $C'_t$  es el conjunto de puntos críticos de  $g_t$  entonces  $C' \subset \cup_t C'_t$  ya que la matriz Jacobiana de  $g$  es

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ * & \frac{\partial g_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial g_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ * & \frac{\partial g_p}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial g_p}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

así que si  $x = (t, x_2, \dots, x_n)$  es un punto crítico de  $g$  es porque el conjunto de vectores columna de la submatriz

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial g_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial g_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial g_p}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial g_p}{\partial x_n} \end{pmatrix} \text{ es linealmente dependiente (caso } n \geq p),$$

de donde  $(x_2, \dots, x_n)$  es un punto crítico de  $g_t$ . El caso  $n < p$  implica que  $n-1 < p-1$  y el resultado es el mismo.

Por hipótesis de inducción  $g_t(C'_t)$  tiene medida  $(p-1)$ -dimensional nula de donde por el lema 1.3.3 resulta que  $g(C')$  tiene medida  $p$ -dimensional nula en  $\mathbb{R}^p$ . Pero  $g(C') = f(V \cap C)$  por lo que  $f(V \cap C)$  tiene medida nula en  $\mathbb{R}^p$ . Por el lema 1.3.2 aplicado a  $M = \mathbb{R}^n$ , resulta que  $f(C \setminus C_1)$  tiene medida nula en  $\mathbb{R}^p$ .

Probemos ahora que  $f(C_k \setminus C_{k+1})$  tiene medida 0. Si  $x^0 \in C_k \setminus C_{k+1}$  entonces se anulan en  $x^0$  todas las derivadas parciales hasta el orden  $k$  inclusive, pero existe una derivada parcial de orden  $k+1$  no nula. Sea

$$l(x) = \frac{\partial^{j_1+j_2+\dots} f_i}{\partial x_1^{j_1} \partial x_2^{j_2} \dots}(x)$$

una derivada parcial de orden  $k$  de  $f$  ( $j_1 + j_2 + \dots = k$ ) y supongamos sin pérdida de generalidad y para simplificar la notación que la derivada parcial de  $l_1(x)$  respecto a  $x_1$  en  $x = x^0$  es no nula, aquí  $l(x) = (l_1(x), \dots, l_p(x))$ . Definimos  $h(x) =$

$(l_1(x), x_2, \dots, x_n)$ , como  $\frac{\partial l_1}{\partial x_1}(x^0) \neq 0$  resulta que  $h(x)$  es un difeomorfismo definido en un entorno  $V \subset \mathbb{R}^n$ ,  $h(V) = V'$  abierto de  $\mathbb{R}^n$ . Sea  $g = f \circ h^{-1} : V' \rightarrow \mathbb{R}^p$ . Entonces  $x \in C_k \cap V$  implica que  $h(x)$  está en el hiperplano  $\{0\} \times \mathbb{R}^{n-1} \cap V'$  y además es un punto crítico de  $g$ . Sea  $g_0$  la restricción de  $g$  a  $V'_0 = \{0\} \times \mathbb{R}^{n-1} \cap V'$ . La función  $g_0$  puede verse como definida en un abierto de  $\mathbb{R}^{n-1}$  de donde por inducción la medida  $p$  dimensional de

$$g_0(V'_0 \cap \text{puntos críticos de } g_0)$$

es nula. Pero eso significa que la medida  $p$ -dimensional de  $f(C_k \cap V)$  es nula. Como  $C_k \setminus C_{k+1}$  puede cubrirse por un conjunto numerable de entornos  $V$  se sigue que  $f(C_k \setminus C_{k+1})$  tiene medida nula en  $\mathbb{R}^p$ .

Por último probemos que  $f(C_k)$  tiene medida nula para  $k$  suficientemente grande. Por Taylor se cumple para  $x \in C_k \cap U$  que

$$\|f(x+h) - f(x)\| = \|R(x,h)\| \|h\|^{k+1}, \quad R(x,h) \text{ continua.}$$

Sea  $I = I^n$  un cubo de dimensión  $n$  de lado  $\delta > 0$  tal que  $I \subset U$ . Existe una constante  $c > 0$  tal que  $\|R(x,h)\| \leq c$  de donde  $\|f(x+h) - f(x)\| \leq c\|h\|^{k+1}$ . Subdividiendo  $I$  en  $m^n$  cubos (o sea, dividiendo el lado de longitud  $\delta$  de  $I$  en  $m$  partes iguales) obtenemos para cada cubo  $I_j$  de la subdivisión que si  $x, x+h \in I_j$  entonces  $\|h\| \leq \sqrt{n}\delta/m$  (longitud de la diagonal del cubo  $I_j$ ). Se tiene entonces que si  $x^0$  esta en  $C_k \cap I_j$  la imagen de  $I_j$  por  $f$  se encuentra contenido en un cubo  $p$ -dimensional centrado en  $f(x^0)$  y de lado

$$\leq 2c\|h\|^{k+1} \leq 2c \frac{(\sqrt{n}\delta)^{k+1}}{m^{k+1}}, \quad (\text{¡verificarlo!}).$$

Hay a lo sumo  $m^n$  sub-cubos  $I_j$  de  $I$  que contengan un punto de  $C_k$ . Su imagen por  $f$  está contenida en la unión de a lo sumo  $m^n$  cubos  $p$ -dimensionales. El volumen total de la unión de todos estos cubos no supera entonces a

$$m^n \times (2c\sqrt{n}\delta^{k+1})^p / m^{p(k+1)} = H / m^{p(k+1)-n}, \quad H = \text{cte} > 0.$$

Haciendo subdivisiones cada vez más finas (haciendo tender  $m$  a infinito), si  $p(k+1) - n > 0 \Leftrightarrow k > n/p - 1$ , obtenemos que la medida de  $f(I \cap C_k)$  es nula. Como  $C_k$  puede cubrirse con un conjunto numerable de cubos de lado no mayor que  $\delta$  esto completa la prueba del Teorema de Sard.  $\square$

¿Por qué interesarnos en los valores regulares de una función? Una respuesta parcial la da el

**Teorema 1.3.2.** Sea  $f : M = M^m \rightarrow N = N^n$   $m \geq n$ , una función diferenciable y  $c \in N$  un valor regular para  $f$ . Entonces  $f^{-1}(c) \subset M$  es una subvariedad de  $M$  de dimensión  $m - n$ .

*Demostración.* Si  $p \in f^{-1}(c)$  entonces  $Df_x$  es sobreyectiva. Sean  $\varphi : U = U(p) \rightarrow \mathbb{R}^m$  y  $\psi : V = V(c) \rightarrow \mathbb{R}^n$  mapas coordenados locales, pongamos  $\varphi(p) = x^0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0)$  y  $\psi(c) = y^0 = (y_1^0, \dots, y_n^0)$ . El mapa entre espacios euclidianos

$$F = (F_1, \dots, F_n) = \psi \circ f \varphi^{-1} : \varphi(U) \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \psi(V) \subset \mathbb{R}^n,$$

cumple que  $DF_{x^0}$  es sobre. Consideremos  $\mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^m$  la inmersión canónica y definamos la función  $\hat{F} : \varphi(U) \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$  como

$$\hat{F}(x_1, \dots, x_m) = (F_1(x_1, \dots, x_m), \dots, F_n(x_1, \dots, x_m), x_{n+1}, \dots, x_m); (x_1, \dots, x_m) \in \varphi(U).$$

En forma análoga a en el teorema 1.2.1 se prueba que  $\hat{F}$  es un difeomorfismo definido en un entorno  $W \subset \mathbb{R}^m$ . Para  $x \in F^{-1}(y^0)$  se tiene que  $\hat{F}(x) = (c, x_{n+1}, \dots, x_m)$  con  $c \in \mathbb{R}^n$ . Las coordenadas  $(x_{n+1}, \dots, x_m)$  dan entonces una parametrización local de  $F^{-1}(c)$ . La diferenciabilidad es consecuencia de la de  $\hat{F}$  y es claro que la dimensión de  $F^{-1}(c)$  es  $m - n$ .  $\square$

Ejemplos:

1. Sea  $f(x_1, \dots, x_{n+1}) = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{n+1}^2$ ,  $f : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$ . Como  $Df = (2x_1, 2x_2, \dots, 2x_{n+1})$ , para que  $Df$  no sea sobreyectivo debe ser  $x_1 = x_2 = \dots = x_{n+1} = 0$ . En este caso  $c = 0$ . Todo número real  $c \neq 0$  es un valor regular de  $f$ . Si  $c > 0$ ,  $f^{-1}(c)$  es una esfera de dimensión  $n$ , si  $c < 0$ ,  $f^{-1}(c) = \emptyset$ . En el caso de  $c = 0$  se tiene  $f^{-1}(0) = (0, 0, \dots, 0)$ , un punto.
2.  $f(x, y) = x^2 - y^2$ . Ahora  $Df = (2x, -2y)$  no es sobre si  $x = y = 0$ . Otra vez  $c = 0$ . Pero ahora  $f^{-1}(0)$  es el producto de rectas  $(x + y)(x - y) = 0$ . Este producto no es una variedad en un entorno de  $(0, 0)$  en donde no es localmente un arco. Si  $c \neq 0$  se tiene que  $f^{-1}(c)$  es una hipérbola de asíntotas las rectas  $x = y$  y  $x = -y$ .
3. Ejercicio: Sea  $f(x, y, z) = z^2 + (\sqrt{x^2 + y^2} - 2)^2$ ,  $f : \mathbb{R}^3 \setminus \{x = y = 0\} \rightarrow \mathbb{R}$ . Verificar que  $f$  es de clase  $C^\infty$  y hallar los valores regulares  $c$ . Estudiar geoméricamente  $f^{-1}(c)$ .
4. Sea  $M(n)$  el conjunto de las matrices de  $n$  filas y  $n$  columnas.  $M(n)$  se identifica con  $\mathbb{R}^{n^2}$ . Sea  $\det : M(n) \rightarrow \mathbb{R}$ . Como  $\det$  es una función continua resulta que  $GL(n)$ , el subconjunto de  $M(n)$  en el que  $\det \neq 0$  es un abierto de  $M(n)$  de donde una variedad de igual dimensión.

El subconjunto de  $GL(n)$  de las matrices  $((a_{ij}))$   $n \times n$  tales que  $\det((a_{ij})) = 1$  se llama el grupo especial lineal (en particular es un grupo con el producto usual de matrices como operación). Probar que es una variedad  $C^\infty$  de dimensión  $n^2 - 1$ .

Surge naturalmente la pregunta de si toda variedad podrá escribirse como la preimagen de un valor regular  $c$  para cierta función diferenciable  $f : U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $U$  abierto de  $\mathbb{R}^m$ . La respuesta es no.

**Teorema 1.3.3.** *Si  $M = f^{-1}(c)$  con  $c$  valor regular de  $f : U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $U$  abierto, entonces  $M$  es orientable.*

*Demostración.* La omitimos. □

Se concluye que toda variedad no orientable no puede representarse como la preimagen de un valor regular de una función diferenciable  $f : U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ .

#### 1.4. Teorema de Whitney

Dada una variedad diferenciable  $M = M^n$  cabe preguntarse si siempre es posible pensar que está en un espacio Euclideo. Por ejemplo:

$$S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 = 1\} \subset \mathbb{R}^2,$$

$$T^2 = S^1 \times S^1 \subset \mathbb{R}^4,$$

y también podemos pensar a  $T^2$  en  $\mathbb{R}^3$  como la superficie dada por parametrizaciones de la forma

$$x(u, v), y(u, v), z(u, v) = (2 \cos u + \cos u \cos v, 2 \sin u + \sin u \cos v, \sin v), (u, v) \in (-\pi, \pi)^2,$$

(El lector completará las parametrizaciones para cubrir todo el toro). O como la preimagen en  $\mathbb{R}^3$  de un valor regular de una de las funciones que aparecen en los ejemplos al respecto.

En realidad el último ejemplo plantea otra pregunta: Si existe "una copia" de  $M = M^n$  en un espacio euclideo, ¿cuál es el mínimo  $N \in \mathbb{N}$  tal que dicha copia de  $M$  pueda verse como una subvariedad encajada en  $\mathbb{R}^N$ ?

Ambos problemas admiten solución afirmativa. Dada una variedad diferenciable  $M$  de dimensión  $n$  existe siempre un espacio euclideo  $\mathbb{R}^N$  y un difeomorfismo  $f : M \rightarrow \mathbb{R}^N$  tal que  $f(M)$  es una subvariedad encajada en  $\mathbb{R}^N$ . El mínimo  $N$  para que siempre exista  $f(M)$  encajada en  $\mathbb{R}^N$  es  $N = 2n$ . Whitney demostró primeramente que dada  $M$  una variedad diferenciable de dimensión  $n$  existía una copia encajada en  $\mathbb{R}^{2n+1}$ . Más tarde logró probar que  $N = 2n$  era suficiente. El enunciado preciso del resultado es el siguiente:

**Teorema 1.4.1.** *Teorema de Whitney.*

Toda variedad diferenciable  $M$  de clase  $C^1$  y de dimensión  $n$  puede encajarse en  $\mathbb{R}^{2n}$ .

Nosotros nos conformaremos con demostrar un resultado más débil; probaremos que toda variedad diferenciable  $M = M^n$ , compacta de clase  $C^k$ ,  $k \geq 1$ , puede encajarse en  $\mathbb{R}^{2n+1}$  para un  $N \in \mathbb{N}$  suficientemente grande.

#### 1.4.1. Funciones chichón

Un instrumento necesario para la demostración que daremos son las así llamadas funciones chichón (*bump function* en inglés).

Sea  $B(p, r) \subset \mathbb{R}^n$  la bola de centro  $p \in \mathbb{R}^n$  y radio  $r > 0$ . En el caso de que  $p = 0$ , el origen de coordenadas escribiremos simplemente  $B(r)$ .

**Lema 1.4.1.** *Existe una función  $b : B(3) \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $0 \leq b(x) \leq 1$  y que*

$$\begin{cases} b(x) = 1 & \forall x \in B(1) \\ 0 < b(x) < 1 & \forall x \in B(2) \setminus \text{Cl}(B(1)) \\ b(x) = 0 & \forall x \in B(3) \setminus \text{Cl}(B(2)) \end{cases} .$$

*Demostración.* Consideremos la función real  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$f(t) = e^{-\frac{1}{t(1-t)}} \text{ si } t \in (0, 1); \quad f(t) = 0 \text{ si } t \notin (0, 1) .$$

Es un ejercicio de cálculo probar que esta función es de clase  $C^\infty$  en  $\mathbb{R}$ . En particular  $f(t)$  se anula junto con todas sus derivadas para  $t = 0$  y  $t = 1$ . y  $f(t) > 0$  para  $t \in (0, 1)$ .

A partir de  $f$  definimos la función real  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , por

$$g(t) = \frac{1}{b} \int_0^t f(\tau) d\tau \quad \text{donde} \quad b = \int_0^1 f(\tau) d\tau .$$

Es claro que  $g$  es de clase  $C^\infty$  en  $\mathbb{R}$ , que  $g(t) = 0 \forall t \leq 0$ ,  $g(t) = 1 \forall t \geq 1$  y que  $0 < g(t) < 1 \forall t \in (0, 1)$ .

A partir de  $g(t)$  definimos  $h(t) = g(2 - |t|)$ . Esta función cumple que  $h = 0$  fuera de  $B(2) \subset \mathbb{R}$ , está entre 0 y 1 para  $t \in (-2, -1) \cup (1, 2)$  y vale 1 en  $\text{Cl}(B(1)) \subset \mathbb{R}$  o, lo que es lo mismo, para  $-1 \leq t \leq 1$ . Esto último hace que, mismo que  $|t|$  no sea derivable en  $t = 0$ , la función  $h$  sea de clase  $C^\infty$  al ser constante en un entorno de 0.

Finalmente si  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ , definimos  $b : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  de clase  $C^\infty$  como  $b(x) = h(\|x\|)$ . Esta función restringida a  $B(3)$  cumple todos los requisitos de la tesis del lema.  $\square$

### 1.4.2. Prueba del Teorema de Whitney

**Teorema 1.4.2.** *Sea  $M = M^n$  una variedad diferenciable de clase  $C^k$  compacta. Existe un encaje  $F : M \rightarrow \mathbb{R}^N$  de clase  $C^k$  en un espacio euclideo de dimensión suficientemente grande.*

*Demostración.* Sea  $p \in M$  y  $\varphi : U'(p) \rightarrow \mathbb{R}^n$  un mapa coordenado local. Por definición de variedad  $\varphi(U'(p))$  es un abierto de  $\mathbb{R}^n$  de donde existe  $\epsilon > 0$  tal que  $\varphi(U'(p)) \supset B(\varphi(p), \epsilon)$ . A menos de componer  $\varphi$  a izquierda primero con la traslación  $T(\varphi(p) \mapsto 0)$  y luego con la homotecia de centro 0 y razón  $\frac{3}{\epsilon}$ , podemos de entrada suponer que  $\varphi(U'(p))$  contiene en su interior a la bola abierta  $B(3)$  de centro 0 y radio 3. La traslación y la homotecia, siendo de clase  $C^\infty$ , no cambian la clase de diferenciabilidad del mapa  $\varphi : U'(p) \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Sean ahora  $U(p) = \varphi^{-1}(B(3))$ ,  $V(p) = \varphi^{-1}(B(2))$  y  $W(p) = \varphi^{-1}(B(1))$ . Es claro que

$$p \in W(p) \subset V(p) \subset U(p) \subset U'(p) \subset M$$

y que todos son abiertos en la topología de  $M$ . Además  $\varphi : U(p) \rightarrow \mathbb{R}^n$  es un mapa coordenado del atlas diferenciable maximal de  $M$ . Como

$$\bigcup_{p \in M} W(p)$$

es un cubrimiento de  $M$  que es compacta existen  $W_1, W_2, \dots, W_r$  de la familia  $\{W(p)/p \in M\}$  tales que constituyen un cubrimiento finito:

$$\bigcup_{j=1}^r W_j.$$

Denotemos por  $V_j, U_j$  y  $\varphi_j : U_j \rightarrow \mathbb{R}^n$  a los correspondientes entornos conteniendo a  $W_j$  y al correspondiente mapa coordenado local.

Sea  $b : B(3) \rightarrow \mathbb{R}$  la función de caso  $C^\infty$  del lema 1.4.1 y sean  $(\varphi_j^1(q), \dots, \varphi_j^n(q)) \in B(3)$  las coordenadas de  $\varphi_j(q)$  para  $q \in U_j$ . Para cada  $j = 1, \dots, r$  definimos la función  $F_j : M \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  por

$$F_j(q) = b(\varphi_j(q)) \cdot (\varphi_j^1(q), \dots, \varphi_j^n(q), 1) \text{ si } q \in U_j,$$

$$\text{y } F_j(q) = 0 \in \mathbb{R}^{n+1}, \text{ si } q \in M \setminus U_j.$$

Dado que  $\varphi_j : U_j \rightarrow \mathbb{R}^n$  es de clase  $C^k$  y  $b : B(3) \rightarrow \mathbb{R}$  es de clase  $C^\infty$  el mapa  $F_j$  es también de clase  $C^k$ . Sea ahora  $F : M \rightarrow \mathbb{R}^{(n+1)r} = \mathbb{R}^N$  la aplicación de clase  $C^k$  dada por

$$F(q) = (F_1(q), F_2(q), \dots, F_r(q)).$$

Afirmamos que  $F$  es un encaje de  $M$  en  $\mathbb{R}^N$ . Hay que probar que  $\forall p \in M : DF_p$  es inyectiva y que  $F : M \rightarrow \mathbb{R}^N$  es un homeomorfismo sobre su imagen  $F(M)$ .

$DF_p$  es inyectiva: sea  $W_j$  algún abierto del cubrimiento de  $M$   $\{W_1, \dots, W_r\}$  tal que  $p \in W_j$ , si las coordenadas dadas por el mapa coordenado local  $\varphi_j$  de un punto genérico  $q$  en  $W_j$  son  $(x_1(q), x_2(q), \dots, x_n(q))$ , entonces, como  $b(\varphi_j(q)) = 1$  ya que la imagen de  $W_j$  por  $\varphi_j$  es  $B(1)$  y  $b/B(1) \equiv 1$ , resulta que  $F_j(q) = (x_1(q), x_2(q), \dots, x_n(q), 1)$ . La matriz jacobiana de  $F$  evaluada en  $p$  respecto a las coordenadas locales dadas por  $\varphi_j$  contiene entonces una submatriz de  $n + 1$  filas y  $n$  columnas dada por las derivadas parciales de  $F_j \circ \varphi_j^{-1}$  evaluadas en  $\varphi_j(p)$  que es la matriz identidad  $n \times n$ ,  $Id_n$ , orlada con una fila de ceros:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Se deduce entonces que el rango de  $DF_p$  es  $n = \#$  columnas de  $DF_p$ , y por lo tanto  $DF_p$  es inyectiva o, lo que es equivalente por definición,  $p$  es no singular.

$F$  es un homeomorfismo sobre su imagen: probemos que  $F$  es globalmente inyectiva (siendo cada punto no singular  $F$  es localmente inyectiva por una aplicación del Teorema de la Función Inversa). Sean  $p, q \in M$ ,  $p \neq q$  y sea  $W_j$  algún entorno coordenado conteniendo a  $p$ ,  $W_j$  existe pues los  $W_i$  constituyen un cubrimiento. Si ocurre que  $q \in \text{Cl}(W_j)$  entonces la función  $F_j : M \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  aplicada a  $p$  y a  $q$  es respectivamente  $F_j(p) = (\varphi_j^1(p), \dots, \varphi_j^n(p), 1)$  y  $F_j(q) = (\varphi_j^1(q), \dots, \varphi_j^n(q), 1)$  ya que en  $\text{Cl}(W_j)$  la función  $b(\varphi_j(\cdot))$  vale 1. Pero  $\varphi_j$  es un mapa coordenado local, de donde un homeomorfismo entre  $W_j$  y su imagen en  $\mathbb{R}^n$ . Si  $p \neq q$  entonces  $\varphi_j(p) \neq \varphi_j(q)$  y las  $n$  primeras coordenadas de  $F_j(p)$  son entonces distintas de las  $n$  primeras coordenadas de  $F_j(q)$ . Siendo  $F_j(p) \neq F_j(q)$  también ocurre que  $F(p) \neq F(q)$ . Si ahora  $p \in W_j$  pero  $q \in M \setminus \text{Cl}(W_j)$  entonces la  $n + 1$  coordenada de  $F_j(p)$  vale 1, pero la  $n + 1$  coordenada de  $F_j(q)$  es estrictamente menor que 1. Entonces otra vez  $F_j(p) \neq F_j(q)$  y de aquí que también  $F(p) \neq F(q)$ . Se deduce que  $F$  es globalmente inyectiva.

Siendo  $F$  inyectiva y sobre  $F(M)$  también es un homeomorfismo ya que  $M$  es compacta: sea  $F^{-1} : F(M) \rightarrow M$  la inversa de  $F$ . Dado  $K \subset F(M)$  cerrado, por ser  $M$  compacta resulta que  $F^{-1}(K)$  es un compacto. Entonces  $F(F^{-1}(K)) = K$  es compacto y por tanto cerrado en  $F(M)$ . Pero  $F(F^{-1}(K)) = (F^{-1})^{-1}(K)$ . De donde  $F^{-1}$  es continua al llevar cerrados en cerrados.

Se tiene entonces que  $F$  es un homeomorfismo sobre su imagen y como ya vimos que  $DF_p$  es no singular para todo  $p \in M$  concluimos que  $F$  es un encaje. Que es de clase  $C^k$  se deduce de la construcción de  $F$ .  $\square$

**Observación 1.4.1.** *La prueba vale siempre que  $M$  sea compacta al menos de clase  $C^1$ , para el resto de la prueba necesitaremos que  $M$  sea por lo menos de clase  $C^2$ . Sin embargo la prueba de Whitney vale en clase  $C^1$  (ver Geometric Integration Theory por Hassler Whitney, Princeton University Press).*

**Teorema 1.4.3.** *Sea  $M$  una variedad diferenciable compacta de clase  $C^k$ ,  $k \geq 2$ . Existe un encaje de clase  $C^k$  de  $M$  en  $\mathbb{R}^{2n+1}$  siendo  $n = \dim(M)$ .*

*Demostración.* Sea  $F : M \rightarrow \mathbb{R}^N$  el encaje de clase  $C^k$  construido en el teorema 1.4.2 y supongamos que  $N > 2n + 1$ . Vamos a hallar un hiperplano  $H$  en  $\mathbb{R}^N$  tal que la proyección ortogonal  $\Pi : \mathbb{R}^N \rightarrow H$  sobre  $H$  sea un encaje de  $F(M)$  en  $\Pi(F(M))$  o sea, de modo que  $\Pi \circ F : M \rightarrow \Pi \circ F(M)$  sea un encaje. Como  $H \cong \mathbb{R}^{N-1}$  esto dará un encaje de  $M$  en  $\mathbb{R}^{N-1}$ . Si  $N - 1 > 2n + 1$  veremos que es posible repetir el procedimiento de donde por inducción se obtendrá la tesis. Para la demostración usaremos el Teorema de Sard.

Consideremos la función  $h : M \times M \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^N$  dada por  $h(x, y, t) = t(F(y) - F(x))$ . Claramente es una función de la misma clase de diferenciableidad,  $k$ , que  $F$ .  $M \times M \times \mathbb{R}$  es una variedad diferenciable de clase  $C^k$  y dimensión  $2n + 1$ . Por el Teorema de Sard la medida en  $\mathbb{R}^N$  de la imagen de  $C_h$ , el conjunto de los puntos críticos de  $h$  es nula:  $\mu(h(C_h)) = 0$ ,  $\mathbb{R}^N \setminus h(C_h)$ , el conjunto de valores regulares de  $h$ , es denso en  $\mathbb{R}^N$ . Pero como  $2n + 1 < N$  todo punto en la imagen de  $h$  es un valor crítico de  $h$  de donde  $C_h = M \times M \times \mathbb{R}$ , el dominio de la función  $h$ . Sea  $u$  un valor regular de  $h$ , como  $0 \in \mathbb{R}^N$  está en la imagen de  $h$  (elegir  $t = 0$ ) resulta que  $u \neq 0$ . Afirmamos que si  $H$  es el hiperplano ortogonal a  $u$  y  $\Pi = \Pi_u$ , es la proyección correspondiente, entonces  $\Pi \circ F : M \rightarrow H$  es inyectiva. En efecto: si  $\Pi \circ F(x) = \Pi \circ F(y)$  entonces  $F(y) - F(x) = \lambda u$  para algún  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Si ahora resulta que  $y \neq x$ , como  $F$  es inyectiva resulta que  $F(y) - F(x) \neq 0$ . Entonces  $\lambda \neq 0$ , pero entonces  $h(x, y, 1/\lambda) = u$ , contradiciendo que  $u$  es un valor regular de  $h$ .

Si probamos que también se puede encontrar  $u$  que haga que todo punto de  $M$  sea un punto no singular de  $\Pi \circ F$ , habremos conseguido probar que existe un encaje de  $M$  en  $H$ , teniendo en cuenta otra vez, como hicimos en la prueba del teorema 1.4.2, que  $M$  se supone compacta. Para ello usaremos que  $TM$ , el fibrado tangente a  $M$  es una variedad diferenciable de dimensión  $2 \dim(M) = 2n$ . Los elementos de  $TM$  son las parejas  $(p, v)$  donde  $p \in M$  y  $v \in T_p M$ . Sea ahora  $g : TM \rightarrow \mathbb{R}^N$  la función definida como  $g(p, v) = DF_p(v)$ . Como  $\dim(TM) = 2n < N$ , resulta, al igual que para  $h$ , que el conjunto de puntos críticos de  $g$ ,  $C_g$ , coincide con todo  $TM$ . Por el Teorema de Sard  $g(TM)$  tiene medida nula en  $\mathbb{R}^N$ . Sea  $u \in \mathbb{R}^N$  tal que es un valor regular de  $g$  y  $\Pi : \mathbb{R}^N \rightarrow H$  la proyección ortogonal a  $u$ . Se deduce que  $u \notin g(TM)$ , en particular  $u \neq 0$  ya que  $DF_p(0) = 0$  para cualquier  $p \in M$  de donde  $H \neq \mathbb{R}^N$ . Probemos que si  $p \in M$  entonces es un punto no singular de

$\Pi \circ F : M \rightarrow H$ . Recordemos que por ser  $\Pi$  lineal se cumple que  $D\Pi = \Pi$ , entonces

$$D(\Pi \circ F)_p = D\Pi_{F(p)} \circ DF_p = \Pi \circ DF_p.$$

Si existe  $v \neq 0$  tal que  $v \in \ker(\Pi \circ DF_p)$  entonces, por la definición de proyección, existe  $\lambda \in \mathbb{R}$  tal que  $DF_p(v) = \lambda u$ . De aquí, como  $DF_p$  es inyectiva por ser  $F$  un encaje de  $M$  en  $\mathbb{R}^N$ ,  $\lambda \neq 0$  y entonces  $DF_p(v/\lambda) = u$  o sea  $g(p, v/\lambda) = u$  contradiciendo que  $u$  es un valor regular.

Por último, las medidas en  $\mathbb{R}^N$  de  $h(M \times M \times \mathbb{R})$  y de  $g(TM)$  son nulas, de donde su unión también es de medida nula. Se concluye que podemos elegir  $u$  simultáneamente valor regular para  $h$  y  $g$ , de donde  $\Pi \circ F : M \rightarrow H$  es un encaje. (El argumento anterior prueba que si tenemos una infinidad numerable de funciones  $h_j$ , podemos elegir un valor regular común a todas).

Obsérvese que si  $F$  es de clase  $C^k$  la función  $g(p, v) = DF_p(v)$  es de clase  $C^{k-1}$ . Para aplicar Sard necesitamos que al menos sea  $F$  de clase  $C^2$  (usando además que  $2n + 1 < N$ ).  $\square$

## 1.5. Variedades con borde

Consideremos el semiespacio cerrado  $\mathbb{H}^n \subset \mathbb{R}^n$  definido como

$$\mathbb{H}^n = \{x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n / x_n \geq 0\}.$$

Llamaremos borde de  $\mathbb{H}^n$  al subconjunto

$$\partial\mathbb{H}^n = \{x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n / x_n = 0\}.$$

**Lema 1.5.1.**  $\mathbb{H}^n$  no es difeomorfo a  $\mathbb{R}^n$ .<sup>1</sup>

*Demostración.* Supongamos que  $\mathbb{H}^n$  y  $\mathbb{R}^n$  fueran difeomorfos mediante un difeomorfismo  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{H}^n$ . Podemos extender el dominio de  $f$  y pensar que  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  es una función diferenciable invertible con inversa  $f^{-1}$  diferenciable en los puntos de la imagen de  $f$  (en los puntos de  $\mathbb{H}^n$ ). Sea  $y \in \partial\mathbb{H}^n$  y sea  $x = f^{-1}(y)$ . Por el Teorema 1.6.1 (Teorema de la función inversa), existe  $B(y, r) \subset \mathbb{R}^n$  tal que  $B(y, r) \subset f(\mathbb{R}^n)$ . Pero esto es absurdo pues  $B(y, r) \cap \mathbb{R}^n \setminus \mathbb{H}^n \neq \emptyset$ .  $\square$

Una función  $\varphi : \mathbb{H}^n \rightarrow \mathbb{H}^n$  se dice de clase  $C^k$  si para todo  $x \in \mathbb{H}^n$  existe  $r > 0$  tal que existe una extensión  $F$  de  $f|_{(B(x, r) \cap \mathbb{H}^n)}$  a toda  $B(x, r)$  que es diferenciable de clase  $C^k$ .

---

<sup>1</sup> $\mathbb{R}^n$  y  $\mathbb{H}^n$  tampoco son homeomorfos; una prueba de ello se obtiene del así llamado Teorema de Invariancia del Dominio que afirma que si  $V \subset \mathbb{R}^n$  es homeomorfo a un subconjunto abierto de  $\mathbb{R}^n$  entonces  $V$  es abierto. Pero  $\mathbb{H}^n \subset \mathbb{R}^n$  no es abierto en  $\mathbb{R}^n$ , por lo tanto no puede ser homeomorfo a  $\mathbb{R}^n$ .

**Definición 1.5.1.** Decimos que  $M$  es una variedad diferenciable de dimensión  $n$  con borde, de clase  $C^k$ , si  $M$  es un espacio topológico de Hausdorff con base numerable y tal que para cada uno de sus puntos  $x$  existe un entorno  $V$  y un difeomorfismo  $\varphi : V \rightarrow J^n$ , de clase  $C^k$ , donde  $J^n$  es un abierto o bien de  $\mathbb{R}^n$  o bien de  $\mathbb{H}^n$ . Los difeomorfismos  $\varphi$  seguirán llamándose mapas coordenados locales y sus inversas  $\varphi^{-1}$  parametrizaciones locales.

Puntos con una base de entornos difeomorfos a  $\mathbb{H}^n$  se llaman puntos del borde de  $M$ . Su unión se llama el borde  $\partial M$  de  $M$ , puede ser vacío.

El subconjunto de  $M$  formado por  $M \setminus \partial M$  se llama el interior de  $M$ . Está formado por los puntos con entornos difeomorfos a  $\mathbb{R}^n$ . La definición tiene sentido desde que, por el lema 1.5.1, no puede un punto tener un entorno difeomorfo a la vez a  $\mathbb{H}^n$  y a  $\mathbb{R}^n$ .

Asumiremos, a menos que digamos lo contrario, que  $M$  es de clase  $C^\infty$ . Cuando ocurra tal cosa escribiremos simplemente "variedad diferenciable".

**Proposición 1.5.1.** El borde  $\partial M$  de un variedad diferenciable con borde  $M$  de dimensión  $n$  es una variedad diferenciable (sin borde) de dimensión  $n - 1$ .

*Demostración.* Sea  $p \in \partial M$  un punto del borde de  $M$ . Existe entonces un mapa coordenado local  $\varphi : U \subset M \rightarrow \mathbb{H}^n$  tal que  $p \in U$  y  $\varphi(p) \in \partial \mathbb{H}^n$ . Pues si  $\varphi(p) = (x_1(p), \dots, x_n(p)) \notin \partial \mathbb{H}^n$  entonces  $x_n(p) > 0$  lo que implica que restringiendo  $\varphi$  a un entorno  $V(p) \subset U$ , tenemos un difeomorfismo de  $V(p)$  con una bola abierta  $B$  de  $\mathbb{R}^n$ . Se concluye que  $p \notin \partial M$ . En consecuencia  $x_n(p) = 0$ . Además todo punto  $q \in U$  tal que  $x_n(q) = 0$  está en  $\partial M \cap U(p)$  y recíprocamente. La restricción de  $\varphi$  a  $\partial M \cap U$  es entonces un mapa diferenciable  $\varphi|_{\partial M \cap U}$  con imagen sobre  $\mathbb{R}^{n-1}$ . Si  $\psi : V \subset M \rightarrow \mathbb{H}^n$  es otro mapa coordenado local tal que  $\partial M \cap V \cap U \ni p$  entonces restringiendo los dominios de  $\psi$  y de  $\varphi$  adecuadamente tenemos que  $\psi \circ \varphi^{-1} : \mathbb{H}^n \rightarrow \mathbb{H}^n$  es un difeomorfismo. Luego restringiendo a  $\partial M$   $\psi$  y  $\varphi$  se obtiene que

$$\psi|_{\partial M} \circ (\varphi|_{\partial M})^{-1} : \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^{n-1}$$

es un difeomorfismo. Por último  $\cup(\partial M \cap U) = \partial M$ . Entonces la restricción de un atlas diferenciable de la variedad con borde  $M$  da un atlas diferenciable de  $\partial M$ . Resulta claro además de lo hecho que la dimensión de  $\partial M$  es  $n - 1$ .  $\square$

## 1.6. Algunos resultados básicos

**Teorema 1.6.1.** Sean  $\Omega \subset \mathbb{R}^m$  un subconjunto abierto,  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$  una función diferenciable y  $p_0 \in \Omega$  tal que  $Df_{p_0} : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$  es una transformación lineal invertible ( $\Leftrightarrow \det(Df_{p_0}) \neq 0$ ). Entonces existe un entorno  $U$ ,  $p_0 \in U \subset \Omega$  tal que la restricción de  $f$  a  $U$  es un difeomorfismo de  $U$  sobre un entorno abierto  $V$  de  $q_0 = f(p_0)$ .

*Demostración.* La prueba la haremos en varios pasos.

Paso 1: Como  $\det(Df_{p_0}) \neq 0$  existe un abierto  $U_1$  de  $\mathbb{R}^m$ ,  $\Omega \supset U_1 \ni p_0$ , tal que  $\det(Df_p) \neq 0$  para todo  $p \in U_1$ . Esto es consecuencia inmediata de que  $\det$  es una función continua y  $Df$  varía con continuidad en  $\Omega$ .

Existe entonces un abierto convexo  $U_2 \ni p_0$ ,  $\text{Cl}(U_2) \subset U_1$  tal que  $f$  es inyectiva en  $\text{Cl}(U_2)$ . Si así no fuera existirían  $x_n \neq y_n$  convergiendo a  $p_0$  tales que  $f(x_n) = f(y_n)$ . Como  $U_1$  es abierto existe una bola  $B$  centrada en  $p_0$  contenida en  $U_1$ . Como  $x_n, y_n \rightarrow p_0$  a partir de cierto  $n_0$   $x_n, y_n \in B$ . Se tiene entonces que el segmento que une  $x_n$  con  $y_n$  está contenido en  $B$ . Entonces se cumple:

$$0 = \frac{f(y_n) - f(x_n)}{\|y_n - x_n\|} = Df_{x_n} \left( \frac{y_n - x_n}{\|y_n - x_n\|} \right) + \frac{\rho(x_n, y_n)}{\|y_n - x_n\|} \quad (1)$$

con  $\frac{\rho(x_n, y_n)}{\|y_n - x_n\|} \rightarrow 0$  cuando  $n \rightarrow \infty$  ya que  $\text{dist}(x_n, y_n) \rightarrow 0$  con  $n \rightarrow \infty$  y  $f$  es una función de clase  $C^1$  al menos (ver observación 1.6.1). El vector  $\frac{y_n - x_n}{\|y_n - x_n\|}$  tiene norma 1 por lo que pertenece a la esfera compacta  $S^{n-1}$ . Tomando una subsucesión convergente de entre  $\frac{y_n - x_n}{\|y_n - x_n\|}$  obtenemos un versor  $u$  en  $S^{n-1}$  tal que, tomando límites en (1)

$$Df_{p_0}(u) = 0$$

Esto contradice que  $Df_{p_0}$  es inyectiva.

Paso 2: Existe  $r > 0$  tal que  $B(f(p_0), r) \subset f(U_2)$ , o sea, la imagen de la restricción de  $f/U_2$  contiene un abierto de  $\mathbb{R}^m$ .

Sea  $m = \min\{\|f(p_0) - f(x)\| / x \in \partial U_2\}$  Como  $f$  es inyectiva en  $\text{Cl}(U_2)$  resulta que  $m > 0$ . Sea  $r = m/3$ . Entonces resulta que  $B(f(p_0), r) \subset U_2$ .

Para verlo sea  $q \in B(f(p_0), r)$  y consideremos la función  $G(x) = \|f(x) - q\|^2$  definida en  $\text{Cl}(U_2)$  con valores en  $\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ . Esta función es continua y por tanto alcanza un mínimo en  $\text{Cl}(U_2)$ . Este mínimo no lo alcanza en  $\partial U_2$  pues si  $x \in \partial U_2$  entonces

$$\|f(x) - q\| + \|f(p_0) - q\| \geq \|f(x) - f(p_0)\| \geq m.$$

Como  $q \in B(f(p_0), r = m/3)$  resulta  $G(x) = \|f(x) - q\|^2 \geq (2m/3)^2 = 4r^2$ . Pero  $G(p_0) \leq (m/3)^2 = r^2$ . Se concluye que el mínimo (absoluto) es alcanzado en el abierto convexo  $U_2$  en un punto  $p$ . Entonces es un mínimo relativo.

Por lo tanto  $DG_p = 0$ . Pero si  $f = (f_1, \dots, f_m)$ ,  $q = (q_1, \dots, q_m)$  entonces  $G(x) = \sum_{j=1}^m (f_j(x) - q_j)^2$ . De aquí se tiene que

$$\frac{\partial G}{\partial x_i}(x) = 2 \sum_{j=1}^m (f_j(x) - q_j) \frac{\partial f_j(x)}{\partial x_i}$$

Pero la matriz

$$J(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_m} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \frac{\partial f_m}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_m} \end{pmatrix}$$

es biyectiva por lo que para  $x = p$  se tiene

$$\frac{\partial G}{\partial x_i}(p) = 2 \sum_{j=1}^m (f_j(p) - q_j) \frac{\partial f_j(p)}{\partial x_i} = 2J(p) \begin{pmatrix} f_1(p) - q_1 \\ f_2(p) - q_2 \\ \dots\dots\dots \\ f_m(p) - q_m \end{pmatrix} = 0$$

solo tiene la solución trivial. O sea,  $f(p) = q$ .

Hemos probado que cualquier punto  $q \in B(q_0, r)$  está en la imagen de  $f/U_2$ . Probamos algo más, si  $p$  es tal que  $Df_p$  es inyectiva,  $p \in U_2$ , la función restringida a un abierto conveniente de  $p$  contiene un abierto de  $f(p)$ . La función  $f$  es por tanto abierta en  $U_2$ :  $f(U_2)$  es un abierto de  $\mathbb{R}^m$ .

Paso 3: Podemos ahora definir  $g : B(q_0, r) \rightarrow U_2$  tal que  $g \cdot f = id$ , o sea,  $g$  es la inversa de  $f$ . Queremos ver que es continua: sea  $C \subset Im(g) \subset Cl(U_2)$  un cerrado. Entonces  $C$  es compacto y como  $f$  es continua resulta  $f(C)$  un compacto. Luego un cerrado en  $B(q_0, r)$ . Por lo tanto  $g$  es continua.

Paso 4:  $g$  es diferenciable en los puntos de  $g(U_2)$ . El candidato para la derivada de  $g$  en  $f(p)$  es  $Df_p^{-1}$ , o sea,  $Dg_{q=f(p)} = Df_p^{-1}$ . Escribamos entonces  $g(q+w) - g(q) = Df_p^{-1}(w) + \rho(w)$  y veamos que

$$\lim_{w \rightarrow 0} \frac{\rho(w)}{\|w\|} = 0$$

Escribamos  $v = g(q+w) - g(q)$ . Entonces resulta teniendo en cuenta que  $q = f(p)$ ,

$$f(p+v) - f(p) = f(g(q) + g(q+w) - g(q)) - q = fg(q+w) - q = q+w - q = w$$

Pero  $f(p+v) - f(p) = Df_p(v) + r(v)$ , con  $\lim_{v \rightarrow 0} \frac{r(v)}{\|v\|} = 0$ . Sustituyendo queda:

$$v = Df_p^{-1}((Df_p(v) + r(v)) + \rho(w) = v + Df_p^{-1}(r(v)) + \rho(w)$$

Entonces  $\rho(w) = -Df_p^{-1}(r(v))$  por lo que

$$\frac{\rho(w)}{\|w\|} = \frac{-Df_p^{-1}(r(v))\|v\|}{\|v\|\|w\|}$$

Siendo  $v = g(q+w) - g(q)$  se tiene que  $\lim_{w \rightarrow 0} v(w) = 0$  y como  $\frac{\|v\|}{\|w\|} = \frac{\|p+v-p\|}{\|f(p+v)-f(p)\|}$  está acotado (ejercicio 1.6.1) se deduce lo que queríamos.  $\square$

**Observación 1.6.1.** Sea  $r(p_0, x) = f(x) - f(p_0) - f'(p_0)(x - p_0)$ , entonces  $r'(p_0, x) = f'(x) - f'(p_0)$  y  $r'(p_0, p_0) = 0$ . Como  $f$  es de clase  $C^1$  lo mismo ocurre con  $r(p_0, \cdot)$ . Por lo tanto  $\forall \epsilon > 0 : \exists \delta > 0 / \|r'(p_0, x)\| < \epsilon$  si  $\|x - p_0\| < \delta$ . Del Teorema del Valor Medio se concluye que  $\|r(p_0, x) - r(p_0, y)\| < \epsilon \|x - y\|$ . De aquí fácilmente se ve que  $\frac{\rho(x_n, y_n)}{\|y_n - x_n\|} \rightarrow 0$  ya que  $\rho(x_n, y_n) = r(p_0, x_n) - r(p_0, y_n)$ .

**Ejercicio 1.6.1.** Sea  $f : U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  con  $U$  abierto de  $\mathbb{R}^m$  una función diferenciable de clase  $C^1$  y  $K$  un compacto  $K \subset U$ .

1. Probar que existe  $a = a(K) > 0$  tal que para todo  $x, y \in K$  se cumple

$$\|f(x) - f(y)\| \leq a\|x - y\|.$$

(O sea,  $f$  es Lipschitziana en  $K$  con constant de Lipschitz  $a$ .)

2. Probar que si  $Df$  es inyectiva en  $K$  entonces existe  $b = b(K) > 0$  tal que

$$\|f(x) - f(y)\| \geq b\|x - y\|.$$

## 2. Teoría del grado

Teoría del grado. Teoría del grado módulo 2. Teoría del Grado de Brouwer. Invariancia por homotopías. Teorema Fundamental del Algebra. Teorema del punto fijo de Brouwer.

La Teoría del Grado es una rama de la Teoría de Homotopía (ver homotopía de funciones, definición 2.1.1 y siguientes) desarrollada por L. Brouwer quien probó que dos aplicaciones homotópicas tienen el mismo grado. H. Hopf probó a su vez que si  $f : M^n \rightarrow S^n$ ,  $g : M^n \rightarrow S^n$ , siendo  $S^n$  la esfera de dimensión  $n$ , tienen el mismo grado, entonces son homotópicas. Resulta entonces que el grado de una aplicación nos provee de un invariante fácil de calcular que tiene consecuencias geométricas interesantes.

### 2.1. Teoría del grado módulo 2

Primeramente comenzaremos por definir el grado módulo 2 de una aplicación  $f : M^n \rightarrow N^n$  diferenciable y luego extenderemos la definición al caso de  $f$  continua. Resultará un ejemplo de cómo las técnicas de la Topología Diferencial se extienden al caso continuo.

**Definición 2.1.1.** Sean  $X$  y  $Y$  dos espacios topológicos,  $I = [0, 1] \subset \mathbb{R}$ , y  $f : X \rightarrow Y$  y  $g : X \rightarrow Y$  dos aplicaciones continuas entre ellos. Decimos que  $f$  y  $g$  son homotópicas y lo escribimos  $f \simeq g$  si existe  $H : X \times I \rightarrow Y$  continua tal que para todo  $x \in X$  se cumple que  $H(x, 0) = f(x)$  y  $H(x, 1) = g(x)$ .

**Definición 2.1.2.** Sean  $M$  y  $N$  dos variedades diferenciales (de clase  $C^\infty$ ),  $I = [0, 1] \subset \mathbb{R}$ , y  $f : M \rightarrow N$  y  $g : M \rightarrow N$  dos aplicaciones diferenciales entre ellos. Decimos que  $f$  y  $g$  son diferenciablemente homotópicas y lo escribimos  $f \stackrel{d}{\simeq} g$  si existe  $H : M \times I \rightarrow N$  diferenciable tal que para todo  $x \in M$  se cumple que  $H(x, 0) = f(x)$  y  $H(x, 1) = g(x)$ .

**Definición 2.1.3.** Sean  $X$  y  $Y$  dos espacios topológicos,  $I = [0, 1] \subset \mathbb{R}$ , y  $f : X \rightarrow Y$  y  $g : X \rightarrow Y$  dos homeomorfismos entre ellos. Decimos que  $f$  y  $g$  son isotópicos y lo escribimos  $f \cong g$  si existe  $H : X \times I \rightarrow Y$  continua tal que para todo  $x \in X$  se cumple que  $H(x, 0) = f(x)$  y  $H(x, 1) = g(x)$  y tal que para todo  $t_0 \in [0, 1] : H(x, t_0) : X \rightarrow Y$  es un homeomorfismo sobre  $Y$ .

**Definición 2.1.4.** Sean  $M$  y  $N$  dos variedades diferenciales,  $I = [0, 1] \subset \mathbb{R}$ , y  $f : M \rightarrow N$  y  $g : M \rightarrow N$  dos difeomorfismos entre ellos. Decimos que  $f$  y  $g$  son diferenciablemente isotópicos (o más abreviadamente: difeotópicos) y lo escribimos  $f \stackrel{d}{\cong} g$  si existe  $H : X \times I \rightarrow Y$  diferenciable tal que para todo  $x \in X$  se cumple que

$H(x, 0) = f(x)$  y  $H(x, 1) = g(x)$  y tal que para todo  $t_0 \in [0, 1]$  :  $H(x, t_0) : X \rightarrow Y$  es un difeomorfismo sobre  $Y$ .

Esta última definición implica en particular que las variedades  $M$  y  $N$  tienen que tener igual dimensión.

Todas las definiciones anteriores dan lugar a relaciones de equivalencia. Ilustramos esto probando que  $f \stackrel{d}{\simeq} g$  es una relación de equivalencia entre las aplicaciones diferenciales entre dos variedades  $M = M^m$  y  $N = N^n$ .

**Reflexividad** Basta definir  $H : M \times I \rightarrow N$  como  $H(x, t) = f(x)$  para todo  $t \in I$ ,  $x \in M$ .

**Simetría** Si  $F(x, t)$  es una aplicación diferenciable de  $M \times I$  en  $N$  tal que  $F(x, 0) = f(x)$  y  $F(x, 1) = g(x)$  entonces  $G : M \times I \rightarrow N$  definida como  $G(x, t) = F(x, 1 - t)$  es una aplicación diferenciable de  $M \times I$  en  $N$  que cumple  $G(x, 0) = g(x)$ , y  $G(x, 1) = f(x)$ .

**Transitividad** Sea  $F(x, t) : M \times I \rightarrow N$  una homotopía diferenciable entre  $f(x)$  y  $g(x)$  y sea  $G(x, t) : M \times I \rightarrow N$  una homotopía diferenciable entre  $g(x)$  y  $h(x)$ . Consideremos una función  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  de clase  $\mathcal{C}^\infty$  tal que  $\varphi(t) = 0 \forall t \leq 0$ ,  $\varphi(t) = 1 \forall t \geq 1/2$  y tal que  $\varphi(t) \in (0, 1)$  if  $t \in (0, 1/2)$ . Se cumplirá que se anularán las derivadas  $\varphi^{(k)}(0)$  y  $\varphi^{(k)}(1/2)$ ,  $k = 1, 2, \dots$ . Una tal función puede construirse tomando la función  $g(t)$  del lema 1.4.1 y definiendo  $\varphi(t) = g(2t)$ . Definimos la aplicación  $H : M \times I \rightarrow N$  por

$$H(x, t) \begin{cases} F(x, \varphi(t)), & \forall t \in [0, 1/2] \\ G(x, \varphi(t - 1/2)), & \forall t \in (1/2, 1] \end{cases}$$

Que  $H$  es continua es consecuencia de que  $F$  y  $G$  son continuas y de que  $F(x, 1) = G(x, 0) = g(x)$ . La diferenciabilidad en puntos de la forma  $(x, t)$  con  $t \neq 1/2$  es consecuencia de la diferenciabilidad de  $F$  (si  $t < 1/2$ ) y de  $G$  (si  $t > 1/2$ ) y la diferenciabilidad de  $\varphi$ . La única duda se presenta en el caso en que  $t = 1/2$ . Para  $t = 1/2$   $F(x, \varphi(1/2)) = G(x, \varphi(t - 1/2)) = g(x)$ . Usando coordenadas locales en  $M$ ,  $X : U(x) \rightarrow \mathbb{R}^m$  las derivadas parciales de  $g \circ X^{-1}$  con respecto a  $X(x) = (x_1, \dots, x_m)$  están bien definidas y varían con continuidad al variar  $t$  ya que tanto  $F$  como  $G$  son diferenciables. Iguales consideraciones valen para las derivadas parciales de orden superior. Falta chequear que las derivadas parciales de  $H(x, t)$ , en las que  $t$  interviene, para  $t = 1/2$  existen. Probemos que  $\frac{\partial H}{\partial t}|_{t=1/2}$  existe las otras derivadas parciales de orden superior se calculan de igual modo.

$$\lim_{t \rightarrow (1/2)^-} \frac{H(x, t) - H(x, 1/2)}{t - 1/2} = \lim_{t \rightarrow (1/2)^-} \frac{F(x, \varphi(t)) - F(x, 1)}{t - 1/2} =$$

$$= \frac{\partial F}{\partial t} \Big|_{(x,1/2)} \cdot \dot{\varphi}(1/2) = \frac{\partial F}{\partial t} \Big|_{(x,1/2)} \cdot 0 = 0$$

ya que  $\dot{\varphi}(1/2) = 0$ . Del mismo modo

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow (1/2)^+} \frac{H(x, t) - H(x, 1/2)}{t - 1/2} &= \lim_{t \rightarrow (1/2)^-} \frac{G(x, \varphi(t - 1/2)) - G(x, 0)}{t - 1/2} = \\ &= \frac{\partial G}{\partial t} \Big|_{(x,0)} \cdot \dot{\varphi}(0) = \frac{\partial G}{\partial t} \Big|_{(x,0)} \cdot 0 = 0. \end{aligned}$$

Así las derivadas laterales respecto a  $t$  de  $H$  en  $t = 1/2$  existen y ambas son iguales a 0. Las otras derivadas parciales en que interviene  $t$  también se anulan para  $t = 1/2$  de donde  $H$  es de clase  $C^\infty$ . y resulta la transitividad de la relación  $\stackrel{d}{\simeq}$ .

A efectos de poder definir el grado módulo 2 para funciones continuas necesitamos algunos resultados sobre aproximación de funciones continuas por diferenciables que pasamos a demostrar.

Sea  $M = M^n$  una variedad diferenciable y  $\mathcal{U}$  un cubrimiento abierto de  $M$  con la siguiente propiedad: para todo  $p \in M$  existe solo un número finito de entornos  $U$  en  $\mathcal{U}$  tales que  $p \in U$ . Decimos que el cubrimiento es localmente finito. Una variedad  $M$  para la que se cumple la propiedad anterior se dice que es paracompacta. Por ejemplo, si  $M$  es compacta esta condición se cumple pues siempre puedo extraer de un atlas un sub-atlas finito.

En realidad toda variedad diferenciable, desde que, por definición, tiene una base de entornos numerable, es paracompacta. Este resultado es puramente topológico, lo incluimos por completitud.

Si  $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$  es un cubrimiento de  $M$  decimos que  $\{V_\beta\}_{\beta \in B}$  es un refinamiento de  $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$  si él mismo es un cubrimiento de  $M$  y para cada  $V_\beta$  de  $\{V_\beta\}_{\beta \in B}$  existe un  $\alpha \in A$  tal que  $V_\beta \subset U_\alpha$ .

**Lema 2.1.1.** *Sea  $M$  una variedad diferenciable. Entonces  $M$  es paracompacta: más aun, cada cubrimiento admite un refinamiento numerable localmente finito.*

*Demostración.* Como  $M$  cumple el segundo axioma de numerabilidad y es Hausdorff existe  $\{U_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  un subcubrimiento numerable de  $M$  tal que cada  $U_i$  tiene clausura compacta. Sea ahora  $G_1 = U_1$ . Elijamos  $G_2 = \cup_{j=1}^{i_2} U_j$  siendo  $i_2$  el menor natural tal que  $\text{Cl}(G_1) \subset \cup_{j=1}^{i_2} U_j$ . Inductivamente definimos  $G_{k+1}$  a partir de  $G_k$  como

$$G_{k+1} = \bigcup_{j=1}^{i_{k+1}} U_j$$

siendo  $i_{k+1}$  el menor natural mayor que  $i_k$  tal que

$$\text{Cl}(G_k) \subset \bigcup_{j=1}^{i_{k+1}} U_j.$$

Se cumple que  $\text{Cl}(G_k) \subset G_{k+1}$ , que  $G_k$  es compacto y que  $\bigcup_{k=1}^{\infty} G_k = M$ . Si ahora  $\{V_\alpha\}_{\alpha \in A}$  es cualquier cubrimiento abierto de  $M$ , el conjunto  $\text{Cl}(G_i) \setminus G_{i-1}$  es un compacto incluido en el abierto  $G_{i+1} \setminus \text{Cl}(G_{i-2})$ . Tomemos un subcubrimiento finito de  $\text{Cl}(G_i) \setminus G_{i-1}$  por abiertos de la forma  $V_\alpha \cap (G_{i+1} \setminus \text{Cl}(G_{i-2}))$  y uno, también finito, de  $\text{Cl}(G_2)$  por abiertos de la forma  $V_\alpha \cap G_3$ . Esta cobertura cumple la tesis del lema.  $\square$

Decimos que  $\{\varphi_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  es una partición diferenciable de la unidad en la variedad  $M$  subordinada al cubrimiento localmente finito  $\{U_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  si

1. Para todo  $i \in \mathbb{N}$   $\varphi_i : M \rightarrow \mathbb{R}$  es una función de clase  $C^\infty$ .
2. Para todo  $i \in \mathbb{N}$   $\varphi_i : M \rightarrow \mathbb{R}$  es una función  $\geq 0$  que se anula fuera de  $U_i$ .
3.  $\sum_{i=1}^{\infty} \varphi_i(p) = 1$  para todo  $p \in M$ .

**Lema 2.1.2.** *Particiones de la Unidad*

*Dada  $M$  una variedad diferenciable, existe una partición diferenciable de la unidad para  $M$  subordinada a un cubrimiento por cartas locales  $\{U_i\}$ .*

*Demostración.* Sean  $\{U_i\}, \{V_i\}, \{W_i\}$ , cubrimientos numerables de  $M$  por entornos coordinados,  $W_i \subset V_i \subset U_i$  para todo  $i \in \mathbb{N}$ , tales que si  $X_i : U_i \rightarrow \mathbb{R}^n$  es el mapa coordinado correspondiente entonces  $X_i(U_i) = B(3)$ ,  $X_i(V_i) = B(2)$ ,  $X_i(W_i) = B(1)$ , siendo  $B(r) \subset \mathbb{R}^n$  la bola de centro 0 y radio  $r$  en  $\mathbb{R}^n$ . Por el lema anterior existe un cubrimiento con estas propiedades y que es localmente finito. Usando la función  $h$  del lema 1.4.1 definimos  $b_i(p) = h(\|X_i(p)\|)$  para  $p \in U_i$  y  $b_i(p) = 0$  si  $p \in M \setminus U_i$ . Finalmente definimos

$$\varphi_j(p) = \frac{b_j(p)}{\sum_i b_i(p)}.$$

Como el cubrimiento es localmente finito la suma del denominador es finita ya que  $b_i$  se anula fuera de  $U_i$ . Como cada  $p$  pertenece a algún  $W_j$  para ese  $j$   $b_j(p) = 1$  y el denominador no se anula. Luego  $\varphi_j(p)$  es una función  $C^\infty$ . Finalmente también  $\sum_i \varphi_i(p) = 1$  por la definición de las  $\varphi_i$ .  $\square$

El siguiente resultado hace referencia a que una variedad diferenciable compacta  $M$  encajada en otra  $N$  admite un entorno en  $N$  que él mismo es una subvariedad de  $N$ . Para poder ser más precisos damos la siguiente definición.

**Lema 2.1.3.** *Sea  $N = N^n \subset \mathbb{R}^k$  una variedad diferenciable encajada en  $\mathbb{R}^k$ . Todo punto  $p \in N$  posee un entorno coordinado donde están definidos  $k - n$  campos de vectores normales linealmente independientes de clase  $C^\infty$  si  $N$  es una subvariedad  $C^\infty$  de  $\mathbb{R}^k$ . Más aun, esos campos pueden suponerse de versores ortonormales.*

*Demostración.* Podemos considerar a  $T_x N$  como un subespacio vectorial de  $\mathbb{R}^k$  de dimensión  $n$ . Sea  $T_x N^\perp$  el subespacio ortogonal complementario,

$$T_x N^\perp = \{v \in \mathbb{R}^k / \langle v, u \rangle = 0 \forall u \in T_x N\}.$$

$T_x N^\perp$  es un subespacio de  $\mathbb{R}^k$  de dimensión  $k - n$ . Vamos a hallar una base de  $T_x N^\perp$ . Para ello sea  $X : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$  una parametrización local de  $N$  tal que  $X(0) = p \in N$ . Elijamos una base ortonormal cualquiera  $\{v_1, \dots, v_{k-n}\}$  de  $T_p N^\perp$  para  $p$  (fijo en  $U$ ). Consideremos el mapa  $F : U \times \mathbb{R}^{k-n} \subset \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$  dado por

$$F((x_1, \dots, x_n, t_1, \dots, t_{k-n})) = X(x_1, \dots, x_n) + t_1 v_1 + \dots + t_{k-n} v_{k-n}.$$

Por la elección de  $v_1, \dots, v_{k-n}$  resulta que  $\hat{F}$  es un difeomorfismo entre un entorno  $V$  de  $0$  en  $\mathbb{R}^k$  y un entorno  $W$  de  $p$  en  $\mathbb{R}^k$ . Los puntos de  $N \cap W$  corresponden por  $F^{-1}$  a aquellos puntos de  $V$  tales que las  $k - n$  últimas coordenadas se anulan. Sea entonces  $\Pi : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^{k-n}$  la proyección

$$\Pi(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots, x_k) = (x_{n+1}, \dots, x_k).$$

La composición  $g = \Pi \circ F^{-1} : W \rightarrow \mathbb{R}^{k-n}$  es una aplicación diferenciable tal que la solución del sistema  $g = 0 \in \mathbb{R}^{k-n}$  corresponde a  $N \cap W$ . Es fácil probar que por la construcción hecha  $0 \in \mathbb{R}^{k-n}$  es un valor regular de  $g$  (¡así que probamos de paso que toda variedad  $N$  es localmente la preimagen de un valor regular!). Sean  $(g_1(x), \dots, g_{k-n}(x))$  las coordenadas de  $g(x)$ . Entonces los gradientes

$$\{v_1(x) = \nabla g_1(x), \dots, v_{k-n}(x) = \nabla g_{k-n}(x)\}$$

constituyen una base de  $T_x N^\perp$ . Como  $g(x)$  es de clase  $C^\infty$  resulta que esta base varía también diferenciablemente con  $x \in N$ . Si no fuera una base ortonormal, el proceso de ortonormalización de Gram-Schmidt aplicado a

$$\{v_1(x) = \nabla g_1(x), \dots, v_{k-n}(x) = \nabla g_{k-n}(x)\}$$

da una base ortonormal que varía diferenciablemente si lo aplicamos en el mismo orden para cada  $x$  (normalizamos,  $v_1$ , obteniendo  $u_1 = v_1 / \|v_1\|$ , luego obtenemos  $u_2 = (v_2 - \langle v_2, u_1 \rangle u_1) / \|v_2 - \langle v_2, u_1 \rangle u_1\|$ , luego  $u_3 = \dots$  etc).  $\square$

**Definición 2.1.5.** Sea  $C \subset M$  un subconjunto cerrado de la variedad diferenciable  $M$ . Decimos que una función continua  $r : M \rightarrow C$  de  $M$  sobre  $C$  es una retracción de  $M$  en  $C$  si cumple  $r|_C = \text{id}_C$ . En este caso decimos que  $C$  es un retracto de  $M$ . Decimos que  $r$  es un retracto diferenciable si la función  $r$  es diferenciable.

Definimos la distancia entre un punto  $P \in \mathbb{R}^k$  y un subconjunto  $X \neq \emptyset$  de  $\mathbb{R}^k$  como el ínfimo de  $\|x - P\| / x \in X$ . Sea  $\epsilon > 0$ . Llamamos  $\epsilon$  entorno de un conjunto  $X \subset \mathbb{R}^k$  al conjunto de los puntos

$$T_\epsilon(X) = \{y \in \mathbb{R}^k / \text{dist}(y, X) < \epsilon\}.$$

**Teorema 2.1.1.** *Teorema del Entorno Tubular*

Si  $N = N^n$  es una variedad diferenciable compacta encajada en  $\mathbb{R}^k$  existe un  $\epsilon > 0$  tal que  $T_\epsilon(N)$  es una variedad diferenciable de dimensión  $k$  y existe una retracción diferenciable  $\Pi_N : T_\epsilon(N) \rightarrow N$  tal que  $\Pi_N(x) = x_N$  es el punto de  $N$  más cercano a  $x \in T_\epsilon(N)$ . En particular  $x - x_N$  es un vector normal a  $T_{x_N}N$  y  $\|x - x_N\| < \epsilon$  y dados dos puntos distintos  $x, y \in N$  los segmentos de longitud  $\epsilon$  con origen  $x$  e  $y$  normales a  $N$  en los puntos  $x$  e  $y$  son disjuntos.

*Demostración.* Sea  $G : N \times \mathbb{R}^{k-n} \rightarrow \mathbb{R}^k$  dada por

$$G(x, t_1, \dots, t_{k-n}) = x + t_1 v_1(x) + \dots + t_{k-n} v_{k-n}(x).$$

Entonces  $G$  es una aplicación diferenciable tal que el diferencial  $DG$  tiene rango  $k$  en  $(x, 0, \dots, 0)$ . Existe pues un  $\epsilon(x) > 0$  tal que  $G$  es un difeomorfismo local sobre  $B(x, \epsilon(x))$ ,  $x \in N$  (Teorema de la Función Inversa). Componiendo con una parametrización local  $X : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$  en un entorno de  $x$  nos queda  $F : U \times \mathbb{R}^{k-n} \subset \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$  dada por

$$F(x_1, \dots, x_n, t_1, \dots, t_{k-n}) = X(x_1, \dots, x_n) + t_1 v_1(x) + \dots + t_{k-n} v_{k-n}(x).$$

$F$  define un difeomorfismo local en un abierto de  $\mathbb{R}^k$ . Si tomamos dos puntos  $x, y \in N \cap B(x, \epsilon(x))$  observamos que la preimagen de esos puntos en  $\mathbb{R}^k$  es un par de puntos  $(p_1, 0, \dots, 0)$ ,  $(p_2, 0, \dots, 0)$ , donde  $p_1, p_2 \in U \subset \mathbb{R}^n$  y  $(0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^{k-n}$ . Y la preimagen de segmentos ortogonales a  $N$  por cada uno de esos puntos van a ser segmentos de la forma

$$(p_i, a_1 \lambda, a_2 \lambda, \dots, a_{k-n} \lambda), \quad \lambda \in [0, \epsilon], \quad i = 1, 2$$

donde  $(a_1, \dots, a_{k-n})$  es algún versor (fijo) de  $\mathbb{R}^{k-n}$ . Así que si  $p_1 \neq p_2$  esos segmentos van a ser disjuntos, de donde vale lo mismo para los segmentos normales a  $N$  por  $x$  e  $y$  en  $B(x, \epsilon(x))$ .

Como  $N$  es compacta, existe un cubrimiento finito de ella por entornos  $V_1, \dots, V_r$ . Para cada  $V_i$  existe el correspondiente  $\epsilon_i > 0$ . Sea ahora  $0 < \epsilon < \epsilon_i$  para todo  $i = 1, \dots, r$  y tal que además si  $x, y \in N$  y  $\|x - y\| < 2\epsilon$  entonces exista un entorno coordenado que los contiene a ambos (basta encontrar un número de Lebesgue del cubrimiento  $\{V_i\}$  de  $N$ ). Probemos ahora que dos segmentos normales a  $N$  en puntos distintos  $x, y \in N$ , ambos segmentos de longitud menor que  $\epsilon$ , son disjuntos. En efecto, si  $x, y$  están en un mismo entorno coordenado, entonces se aplica lo visto más arriba. Si no,  $\|x - y\| > 2\epsilon$ . Si los segmentos tuvieran un punto en común, digamos  $z$ , la distancia entre  $z$  y  $x$  sería menor que  $\epsilon$ , análogamente  $\text{dist}(y, z) < \epsilon$  y finalmente  $\text{dist}(x, y) < 2\epsilon$ . Pero esto contradice que  $\|x - y\| > 2\epsilon$ . Es inmediato ahora que  $G$  es globalmente inyectiva en el entorno  $T_\epsilon(N)$  de  $N$ .

La retracción buscada se consigue así: si  $p \in T_\epsilon(N)$  entonces existe  $x_p \in N$  tal que  $\text{dist}(x_p, p)$  es mínima entre  $\{\text{dist}(x, p) / x \in N\}$ . Por lo tanto  $\text{dist}(x_p, p) < \epsilon$ . Ese punto cumple que  $\|p - x_p\|^2$  es mínima al variar  $x \in N$ . Si  $X : U(x) \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$  es una parametrización local resultará entonces, poniendo

$$x = X(x_1, \dots, x_n) = (X^1(x_1, \dots, x_n), \dots, X^k(x_1, \dots, x_n)),$$

y  $p = (p^1, \dots, p^k)$ , que la función

$$\sum_{j=1}^k (X^j(x_1, \dots, x_n) - p^j)^2$$

tiene un mínimo local para las coordenadas correspondientes a  $x = x_p$ . Esto implica (¡hacer las cuentas!) que

$$\langle X(x_1, \dots, x_n) - p, \frac{\partial X}{\partial x_i} \rangle = 0, \quad (2)$$

para todo  $i = 1, \dots, n$ . Pero

$$\left\{ \frac{\partial X}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial X}{\partial x_n} \right\}$$

es una base de  $T_{x_p}N$ . En consecuencia  $x_p - p$  es ortogonal a  $N$  en  $x_p$ . Si hubiera dos elementos  $x, x'$  realizando el mínimo entonces existirían  $v \in T_x N^\perp$ ,  $v' \in T_{x'} N^\perp$ ,  $\|v\| < \epsilon$ ,  $\|v'\| < \epsilon$  tales que  $x + v = p = x' + v'$ . Pero eso violaría que  $G$  es globalmente inyectiva. Definimos  $\Pi_N(p) = x_p$  el único elemento de  $N$  que minimiza la distancia.

Otro modo para dar la retracción  $\Pi_N$  es el siguiente: si  $\Pi : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$  es la proyección canónica sobre las  $n$  primeras coordenadas entonces, componiendo la  $F : U \times \mathbb{R}^{k-n} \subset \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$  con  $\Pi$  se obtiene

$$\Pi_N = F \circ \Pi \circ F^{-1} : B(x, \epsilon(x)) \rightarrow B(x, \epsilon(x)) \cap N.$$

Ahora es claro que  $\Pi_N : T_\epsilon(N) \rightarrow N$  es diferenciable pues  $F$  es un difeomorfismo, y la proyección canónica  $\Pi$  es diferenciable.  $\square$

**Lema 2.1.4.** *Sea  $M = M^m$  una variedad diferenciable compacta y  $N = N^n \subset \mathbb{R}^k$  una variedad diferenciable compacta encajada en  $\mathbb{R}^k$ . (Por el Teorema de Whitney siempre podemos suponer esto). Para toda aplicación  $f : M \rightarrow N$  continua y para todo  $\epsilon > 0$  existe una aplicación diferenciable  $g : M \rightarrow N$  tal que  $\|f(x) - g(x)\| < \epsilon$ . Aquí  $\|\cdot\|$  es la norma heredada del producto interno usual de  $\mathbb{R}^k$ .*

*Demostración.* Dado  $\epsilon > 0$ , sea  $\delta > 0$ ,  $\delta < \epsilon/2$  tal que el teorema 2.1.1 valga y  $T_\delta(N)$  sea una variedad diferenciable munida con una retracción diferenciable  $\Pi : T_\delta(N) \rightarrow N$ . Como  $M$  es compacta y  $f$  es continua en  $M$  existe un cubrimiento finito  $\{U_1, \dots, U_r\}$  de  $M$  tal que para todo par de puntos  $x, y \in U_j$  se cumple  $\|f(x) - f(y)\| < \delta$ . En consecuencia todo el segmento

$$[f(x), f(y)] = \{z \in \mathbb{R}^k / z = (1-t)f(x) + tf(y); t \in [0, 1]\},$$

está en  $T_\delta(N)$  ya que tanto  $f(x)$  como  $f(y)$  están en  $N$  y la longitud del segmento es menor que  $\delta$ . Sea  $\{\varphi_j : M \rightarrow \mathbb{R}\}_{j=1, \dots, r}$  una partición diferenciable de la unidad subordinada a  $\{U_j\}_{j=1, \dots, r}$  y elijamos para cada  $j = 1, \dots, r$  un punto  $x_j \in U_j$ . Definamos  $h : M \rightarrow \mathbb{R}^k$  como

$$h(x) = \sum_{j=1}^r f(x_j)\varphi_j(x).$$

Es claro que  $h(x)$  es de clase  $C^\infty$ . Además la imagen de  $M$  por  $h$  está en  $T_\delta(N)$ . En efecto:

$$\|h(x) - f(x)\| = \left\| \sum_{j=1}^r f(x_j)\varphi_j(x) - f(x) \right\| =$$

(pues  $\sum_{j=1}^r \varphi_j(x) = 1$  para todo  $x \in M$ )

$$= \left\| \sum_{j=1}^r f(x_j)\varphi_j(x) - \sum_{j=1}^r f(x)\varphi_j(x) \right\| \leq \sum_{j=1}^r \varphi_j(x)\|f(x_j) - f(x)\|.$$

Analicemos los sumandos  $\sum_{j=1}^r \varphi_j(x)\|f(x_j) - f(x)\|$ . Si  $x \in U_j$ , entonces  $\|f(x_j) - f(x)\| < \delta$ . Si  $x \notin U_j$  entonces  $\varphi_j(x) = 0$ . En cualquier caso resulta que cada sumando está acotado por arriba por  $\varphi_j(x)\delta$ . Entonces

$$\|h(x) - f(x)\| < \sum_{j=1}^r \varphi_j(x)\delta = \delta.$$

Se tiene entonces que  $h(x) \in T_\delta(N)$ . Es claro que  $h$  es una función diferenciable. Sea ahora  $g : M \rightarrow N$  dada por

$$g(x) = \Pi \circ h(x), \text{ donde } \Pi : T_\delta(N) \rightarrow N$$

es la retracción diferenciable dada por el teorema 2.1.1. Entonces  $g$  es diferenciable y

$$\|g(x) - f(x)\| \leq \|g(x) - h(x)\| + \|h(x) - f(x)\| < \delta + \delta < \epsilon,$$

pues  $g(x) = \Pi(h(x))$  es el pie de la perpendicular por  $h(x) \in T_\delta(N)$  a  $N$ , de donde la distancia entre  $g(x)$  y  $h(x)$  es menor que  $\delta$ . Que  $\|h(x) - f(x)\| < \delta$  es lo que antes probamos. Esto termina la demostración del lema.  $\square$

**Lema 2.1.5.** *Sea  $X$  un espacio topológico y  $N = N^n \subset \mathbb{R}^k$  una variedad diferenciable compacta. Existe  $\epsilon > 0$  tal que si  $f : X \rightarrow N$  y  $g : X \rightarrow N$  son aplicaciones diferenciables que cumplen  $\|f(x) - g(x)\| < \epsilon$  para todo  $x \in X$ , entonces  $f$  y  $g$  son homotópicas;  $f \simeq g$ . Más aun, si  $X$  es una variedad diferenciable y  $f$  y  $g$  son ambas aplicaciones diferenciables entonces  $f$  y  $g$  son diferenciablemente homotópicas;  $f \stackrel{d}{\simeq} g$ .*

*Demostración.* Sea  $\delta > 0$  tal que valga el teorema 2.1.1 para  $T_\delta(N)$ . Para cada  $y \in N$  existe un  $\delta(y) > 0$  tal que la bola de centro  $y$  y radio  $\delta(y)$ ,  $B(y, \delta(y))$ , está contenida en  $T_\delta(N)$ . Por compacidad existe un cubrimiento finito  $\{B_1, B_2, \dots, B_r\}$  de  $N$  por bolas de esa forma. Sea  $\epsilon > 0$  el número de Lebesgue de ese cubrimiento: i.e.: si  $y, z \in N$  y  $\text{dist}(y, z) = \|y - z\| < \epsilon$  entonces existe una bola  $B_j$  del cubrimiento finito tal que  $y, z \in B_j$ . Supongamos ahora que  $f : X \rightarrow N$  y  $g : X \rightarrow N$  son dos aplicaciones continuas tales que  $\|f(x) - g(x)\| < \epsilon$ . Por lo anteriormente dicho existe  $B_j \ni f(x), g(x)$ . Pero como  $B_j$  es convexa resulta que para todo  $t \in [0, 1]$  se cumple  $(1-t)f(x) + t(g(x)) \in B_j$ . Definimos la función  $H : X \times I \rightarrow T_\delta(N)$  por  $H(x, t) = (1-t)f(x) + t(g(x))$ . Observemos de paso que si  $f$  y  $g$  son aplicaciones diferenciables entonces  $H$  es una aplicación diferencial. Sea ahora  $F : X \rightarrow N$  definida por

$$F(x, t) = \Pi \circ H(x, t).$$

Entonces  $F : X \times I \rightarrow N$  es una homotopía entre  $f$  y  $g$ . Si además  $f$  y  $g$  son aplicaciones diferenciables, como  $\Pi$  es una retracción diferenciable, resulta que  $f \stackrel{d}{\simeq} g$ .  $\square$

**Teorema 2.1.2.** *Sean  $M = M^n$  y  $N = N^n$  variedades diferenciales compactas,  $M$  sin borde. Entonces*

1. *Toda aplicación continua  $f : M \rightarrow N$  es homotópica a una aplicación diferenciable.*

2. Si  $f : M \rightarrow N$  y  $g : M \rightarrow N$  son aplicaciones diferenciables homotópicas, entonces son diferenciablemente homotópicas, o sea  $f \simeq g \longrightarrow f \stackrel{d}{\simeq} g$ .

*Demostración.* Toda aplicación continua  $f : M \rightarrow N$  es homotópica a una aplicación diferenciable: Sea  $\epsilon > 0$  dado por el lema 2.1.5 tal que si  $\|f(x) - g(x)\| < \epsilon$  entonces  $f \simeq g$ . Sea ahora  $g$  diferenciable, dada por el lema 2.1.4, tal que  $\|g(x) - f(x)\| < \epsilon$ . Entonces  $f \simeq g$ .

Si  $f : M \rightarrow N$  y  $g : M \rightarrow N$  son aplicaciones diferenciables homotópicas, entonces son diferenciablemente homotópicas. Sea  $H : M \times I \rightarrow N$  una homotopía entre  $f$  y  $g$ .  $M \times I$  es una variedad diferenciable con borde, aplicando el lema 2.1.4 a  $H$  conseguimos  $F : M \times I \rightarrow N$  diferenciable tal que  $\|F(x, t) - H(x, t)\| < \epsilon$  donde  $\epsilon > 0$  está dado por el lema 2.1.5. En particular  $\hat{f}(x) = F(x, 0)$  y  $\hat{g}(x) = F(x, 1)$  cumplen  $\|f(x) - \hat{f}(x)\| < \epsilon$ , y  $\|g(x) - \hat{g}(x)\| < \epsilon$ . Como  $F$  es diferenciable y es claramente una homotopía entre  $\hat{f}$  y  $\hat{g}$ , resulta  $\hat{f} \stackrel{d}{\simeq} \hat{g}$ . Por otro lado, por el lema 2.1.5 también  $f \stackrel{d}{\simeq} \hat{f}$  y  $g \stackrel{d}{\simeq} \hat{g}$ . Por transitividad de la relación  $\stackrel{d}{\simeq}$  resulta  $f \stackrel{d}{\simeq} g$  que es lo que queríamos demostrar.  $\square$

**Proposición 2.1.1.** Sea  $M$  una variedad compacta conexa de dimensión 1. Entonces  $M$  es difeomorfa a  $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 = 1\}$  o a  $I = \{x \in \mathbb{R} / 0 \leq x \leq 1\}$ .

*Demostración.* Ver apéndice del libro de J. Milnor "Topology from the Differentiable Viewpoint", páginas 55-57, o el apéndice 2 del libro de V. Guillemin & A. Pollack "Differential Topology" páginas 208-211.  $\square$

**Lema 2.1.6.** Sea  $f : M = M^n \rightarrow N = N^n$  una aplicación diferenciable entre variedades diferenciales compactas de igual dimensión  $n$ . Supongamos que  $y \in N$  es un valor regular de  $f$ . Entonces existe  $V(y) \subset N$  un entorno de  $y$  en donde todo  $z \in V(y)$  es un valor regular para  $f$ . Más aun: si  $\#f^{-1}(y) = k$  entonces  $\#f^{-1}(z) = k$  para todo  $z \in V(y)$ .

*Demostración.* Como  $y$  es un valor regular de  $f$  y  $\dim(M) = \dim(N) = n$  el rango de  $f$  para cada preimagen  $x$  de  $y$  es  $n$ , de donde, por el Teorema de la Función Inversa, existe un entorno  $U(x)$  tal que  $f/U(x)$  es un difeomorfismo sobre su imagen  $V_x \ni y$ . Se deduce que para todo  $x' \in U(x)$ ,  $x' \neq x$ , se tiene que  $f(x') \neq y$ . Por compacidad de  $M$  resulta pues que  $f^{-1}(y)$  consiste en un número finito de puntos  $\{x_1, \dots, x_k\}$ , una variedad de dimensión 0 en  $M$ . En efecto, si  $f^{-1}(y)$  contuviera infinitos puntos tendríamos, por la compacidad de  $M$ , una subsucesión infinita, convergente a un punto  $z$ ,  $x_j \rightarrow z \in M$  y resultaría de  $f(x_j) = y$  que  $f(z) = y$ . Pero acabamos de ver que en ese caso existe un entorno de  $z$ ,  $U(z)$  tal que si  $z' \in U(z)$ ,  $z' \neq z$  entonces  $f(z') \neq f(z) = y$ . Esto contradice que para  $j \geq j_0$ ,

$x_j \in U(z)$  y  $f(x_j) = y$ . Siendo  $\#f^{-1}(y) = \{x_1, \dots, x_k\}$  un conjunto finito, tal que para todo  $j = 1, \dots, k$  existe  $U(x_j)$  mapeado difeomórficamente por  $f$  en  $V_j \ni y$ , existe un entorno  $V \subset \bigcap_{j=1}^k V_j$  de  $y$  y  $W_1 \ni x_1, \dots, W_k \ni x_k$ , entornos en  $M$ , tales que  $f/W_j$  es un difeomorfismo sobre  $V$ ,  $j = 1, \dots, k$ . Achicando  $V$  si es necesario, podemos suponer que  $\text{Cl}(W_i) \cap \text{Cl}(W_j) = \emptyset$  si  $i \neq j$ . Si ahora  $z \in V$  entonces  $f^{-1}(z)$  tiene exactamente  $k$  preimágenes en  $W_1 \cup \dots \cup W_k$ . *A priori* podría sin embargo ocurrir que tuviera más preimágenes en  $M \setminus (W_1 \cup \dots \cup W_k)$ . Observemos que este último conjunto es un compacto pues  $M$  es compacta. Si no existiera un entorno  $V'$  de  $y$ ,  $V' \subset V$ , tal que  $\#f^{-1}(z) = \#f^{-1}(y)$  para todo  $z \in V'$  resultaría que tendríamos una sucesión  $y_j \rightarrow y$ ,  $y_j \in V$  tal que cada  $y_j$  tendría por lo menos una preimagen  $w_j \in M \setminus (W_1 \cup \dots \cup W_k)$ . Por compacidad resulta entonces que podemos suponer que  $w_j \rightarrow w \in M \setminus (W_1 \cup \dots \cup W_k)$ . Pero por continuidad de  $f$  va a suceder que

$$f(w) = \lim_j f(w_j) = \lim_j y_j = y.$$

Entonces  $w \in \{x_1, \dots, x_k\}$ , el conjunto de las preimágenes de  $y$ . Pero esto es absurdo pues  $w \in M \setminus (W_1 \cup \dots \cup W_k)$ .  $\square$

**Lema 2.1.7.** Lema de Homotopía

Sean  $f, g : M = M^n \rightarrow N = N^n$  aplicaciones diferenciables entre variedades diferenciales compactas de igual dimensión  $n$ ,  $M$  sin borde. Supongamos que  $f \stackrel{d}{\simeq} g$  y que  $y \in N$  es un valor regular común a  $f$  y  $g$ . Entonces

$$\#f^{-1}(y) = \#g^{-1}(y) \pmod{2}.$$

*Demostración.* Sea  $F : M \times [0, 1] \rightarrow N$  una homotopía diferenciable entre  $f$  y  $g$ . Supongamos que  $y$  es un valor regular de  $F$ . Entonces  $F^{-1}(y)$  es una variedad diferenciable con borde compacta y de dimensión 1 ya que la variedad  $M \times [0, 1]$  tiene dimensión  $n+1$  y  $N$  tiene dimensión  $n$ . Se deduce de la compacidad de  $M$  que  $F^{-1}(y)$  consta de un número finito de componentes conexas. Estas componentes o son difeomorfas a la circunferencia  $S^1$  o lo son a un arco con borde dos puntos  $a, b$  que estarán en el borde de  $M \times [0, 1]$ , que es  $M \times \{0\} \cup M \times \{1\}$ . La unión de todos los puntos del borde de cada componente conexa de  $F^{-1}(y)$  es pues un número par de puntos (cada componente difeomorfa a un arco tiene dos puntos borde y cada componente difeomorfa a una circunferencia no tiene ninguno). Además no es posible que una circunferencia en  $F^{-1}(y)$  tenga puntos comunes con el borde de  $M \times [0, 1]$ , pues si, por ejemplo, la circunferencia  $\gamma$  tuviera puntos comunes con  $M \times \{1\}$ , estos serían puntos de  $g^{-1}(y)$  y por lo tanto aislados. Se deduce que  $\gamma$  sería tangente a  $M \times \{1\}$  en cada uno de esos puntos  $(x, 1)$ . Existiría entonces un vector no nulo  $v \in T_x M$  tangente a  $\gamma$ . Esto implicaría que  $Dg_x(v) = 0$  contradiciendo que

$y$  es valor regular de  $g$ . Como  $F^{-1}(y) \cap M \times \{0\} = f^{-1}(y) \times \{0\}$  y  $F^{-1}(y) \cap M \times \{1\} = g^{-1}(y) \times \{1\}$ , entonces

$$\#f^{-1}(y) + \#g^{-1}(y) = \text{número de puntos del borde de } F^{-1}(y) = \text{par}.$$

Resulta entonces que  $\#f^{-1}(y) = \#g^{-1}(y) \pmod{2}$ .

Si ahora  $y$  no es valor regular de  $F$ , aplicando el lema 2.1.6 existirá un entorno  $V_1 \subset N$  de  $y$  en que si  $z \in V_1$ ,  $\#f^{-1}(z) = \#f^{-1}(y)$ . Análogamente existirá un entorno  $V_2 \subset N$  tal que si  $z \in V_2$  entonces  $\#g^{-1}(z) = \#g^{-1}(y)$ . Sea  $V \subset V_1 \cap V_2$  un entorno de  $y$ . Por el Teorema de Sard existe  $z \in V$  valor regular de  $F$ . Entonces, por lo antes demostrado,

$$\#f^{-1}(y) = \#f^{-1}(z) = \#g^{-1}(z) \pmod{2} = \#g^{-1}(y).$$

Esto termina la demostración. □

**Lema 2.1.8.** Lema de Homogeneidad Sea  $N = N^n$  una variedad diferenciable (con o sin borde) conexa. Dados  $y, z \in N$  puntos interiores (no de  $\partial N$ ) existe un difeomorfismo  $h : N \rightarrow N$  difeotópico a la identidad  $id : N \rightarrow N$ , tal que  $h(y) = z$ .

*Demostración.* Si  $y, z \in N$  son puntos interiores existen entornos coordinados de  $y$  y de  $z$  en  $N$  difeomorfos a  $\mathbb{R}^n$ . Supongamos inicialmente que ambos puntos  $y, z$  están en un mismo entorno coordinado. Por medio de un mapa coordinado local  $\psi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  llevamos el problema a  $\mathbb{R}^n$  y podemos suponer que  $\psi(y) = Y, \psi(z) = Z \in \mathbb{R}^n$  y que  $Y = 0, Z \in B(1)$ , la bola de centro 0 y radio 1 de  $\mathbb{R}^n$ . Si  $Z = 0$  no hay nada que demostrar, si no,  $Z \neq 0$ . Sea  $v = Z/\|Z\|$  y consideremos una función  $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  de clase  $C^\infty$  tal que  $\varphi(x) > 0$  si  $\|x\| < 1$  y  $\varphi(x) = 0$  si  $\|x\| \geq 1$ . Esta función se obtiene del mismo modo que en el lema 1.4.1.

Sea la ecuación diferencial

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \varphi(x)v \\ x(0) = x \end{cases}$$

Por el Teorema de Existencia y Unicidad de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias la solución  $\Phi_t(x)$  es única y queda definida para todo  $t \in \mathbb{R}$ . Para todo  $x \in \mathbb{R}^n \setminus B(1)$  tenemos que la solución  $\Phi_t(x) = id(x) = x$  puesto que allí  $\varphi(x)v = 0$ . Por otro lado como  $z \in B(1)$  está contenida en  $K = Cl(B(\|z\|))$  compacto existe  $\rho > 0$  tal que  $\varphi(x) \geq \rho$  en  $K$ . Se deduce que existe  $t_0 > 0$  tal que  $\Phi_{t_0}(0) = Z$ . Es más, multiplicando  $\varphi(x)v$  por una constante  $k > 0$  adecuada podemos suponer que  $t_0 = 1$ , así  $\Phi_1(0) = Z$ . Para cada  $t \in [0, 1]$ ,  $\Phi_t : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  es un difeomorfismo y para  $t = 0$   $\Phi_0 = id$ . Se tiene entonces que definiendo  $h : N \rightarrow N$  como  $h = id : N \rightarrow N$  fuera de  $U$  y en  $U$  como  $h = \psi^{-1} \circ \Phi_1 \circ \psi : U \rightarrow U$  se tiene que  $h(y) = z$  y que  $h$  es difeotópica a la identidad. La difeotopía es simplemente  $H : N \times [0, 1] \rightarrow N$  dada

por  $H(x, t) = id : N \rightarrow N$  si  $x \notin U$  y en  $U$   $H(x, t) = \psi^{-1} \circ \Phi_t \circ \psi(x)$ .

Sea ahora  $y$  fijo en  $N$  y clasifiquemos los puntos de  $N$  en dos subconjuntos  $A$  y  $B$ : En  $A$  están todos aquellos  $z \in N$  interiores tales que para ellos existe un difeomorfismo  $h : N \rightarrow N$  difeotópico a la identidad  $id : N \rightarrow N$  tales que  $h(y) = z$  y definamos  $B = \text{int}(N) \setminus A$ . Como  $N$  es conexa resulta  $\text{int}(N)$  conexa. Es claro que por lo anteriormente demostrado  $A \neq \emptyset$  y que  $A$  es abierto en  $\text{int}(N)$ . También es fácil probar que  $B$  es abierto en  $\text{int}(N)$ . Por conexión  $B = \emptyset$ . Luego tenemos que  $A = \text{int}(N)$ .  $\square$

**Teorema 2.1.3.** *Sea  $f : M \rightarrow N$  una aplicación diferenciable entre las variedades diferenciales  $M$  y  $N$  tales que  $M$  es compacta y  $N$  es conexa,  $\dim(M) = \dim(N) = n$ . Sean  $y, z \in N$  dos valores regulares de  $f$ . Entonces  $\#f^{-1}(y) = \#f^{-1}(z) \pmod{2}$ .*

*Demostración.* Sea  $h : N \rightarrow N$  un difeomorfismo difeotópico a la identidad  $id : N \rightarrow N$  tal que  $h(y) = z$ . Definamos la función  $h \circ f : M \rightarrow N$ . Es claro que  $h \circ f$  es diferenciable y que además  $z$  es valor regular de  $h \circ f$ . En efecto, siendo  $h$  un difeomorfismo, si  $x \in M$  es una preimagen de  $z$  por  $h \circ f$ , entonces  $x$  es una preimagen de  $y$  por  $f$ . Pero  $y$  es valor regular de  $f$ . Por lo tanto  $Df_x$  tiene rango máximo  $= n$ . Y  $Dh_{f(x)} = Dh_y$  tiene rango máximo por ser  $h$  un difeomorfismo. Luego  $D(h \circ f)_x = Dh_y \circ Df_x$  tiene rango  $n$ . Si  $H : N \times [0, 1] \rightarrow N$  es la difeotopía entre  $id : N \rightarrow N$  y  $h : N \rightarrow N$  definamos  $F : M \times [0, 1] \rightarrow N$  la homotopía diferenciable entre  $f$  y  $h \circ f$  por  $F(x, t) = H(f(x), t)$ . Entonces, por el Lema de Homotopía 2.1.7, resulta que

$$\#f^{-1}(z) = \#(h \circ f)^{-1}(z) \pmod{2} = \#f^{-1}(y).$$

Pues  $(h \circ f)^{-1}(z) = f^{-1} \circ h^{-1}(z) = f^{-1}(y)$ .  $\square$

**Definición 2.1.6.** *Sea  $f : M \rightarrow N$  una aplicación diferenciable entre la variedad compacta  $M$  y la variedad conexa  $N$ ,  $\dim(M) = \dim(N) = n$ . Definimos el grado módulo 2 de  $f$ ,  $\deg_2(f)$ , como*

$$\deg_2(f) = \#f^{-1}(y) \pmod{2}, \quad y \in N \text{ valor regular de } f.$$

*Si  $f : M \rightarrow N$  es una aplicación continua entre  $M$  y  $N$ , tomamos  $g : M \rightarrow N$  una aplicación diferenciable tal que  $f \simeq g$ . Definimos  $\deg_2(f) = \deg_2(g)$ .*

**Observación 2.1.1.** *La definición dada para  $f$  diferenciable no depende de  $y \in N$  el valor regular particular. Esto se deduce directamente del Teorema 2.1.3.*

*Del mismo modo, del Lema de Homotopía se tiene que si  $f, g : M \rightarrow N$  son aplicaciones diferenciables tales que  $f \stackrel{d}{\simeq} g$  entonces  $\deg_2(f) = \deg_2(g)$ . Pero si  $f$*

es solo continua y  $g, h$  son diferenciables y ambas homotópicas a  $f$ , entonces es consecuencia del teorema 2.1.2 que  $h$  y  $g$  son diferenciablemente homotópicas. Por lo tanto  $\deg_2(h) = \deg_2(g)$ . Así la definición en el caso continuo no depende de la  $g$  diferenciable homotópica a ella.

Por último, dada  $f : M \rightarrow N$  continua existe siempre una diferenciable homotópica a ella, otra vez por el Teorema 2.1.2. Así, la definición de grado módulo 2 tiene sentido en el caso continuo.

## 2.2. Aplicaciones de $\deg_2$ .

Sea  $M$  una variedad diferenciable compacta, conexa y sin borde. Si  $f : M \rightarrow M$  es una aplicación constante,  $f(x) = x_0$  para todo  $x \in M$ , entonces  $\deg_2(f) = 0$  puesto que si  $y \in M$ ,  $y \neq x_0$ , entonces  $f^{-1}(y) = \emptyset$  y  $y$  es valor regular de  $f$ . Por otra parte la identidad  $id : M \rightarrow M$  cumple claramente que para todo  $y \in M$   $id^{-1}(y) = y$  de donde  $\deg_2(id) = 1$ . Como el grado es invariante por homotopía se deduce que en una variedad diferenciable compacta, conexa y sin borde,  $id$  no es homotópica a una aplicación constante.

La situación es diferente si  $M$  no se supone compacta. En efecto: si  $M = \mathbb{R}^n$ , la identidad  $id : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , es homotópica a la aplicación constante  $f(\bar{x}) = \bar{x}_0$ . Basta escribir la homotopía  $H : \mathbb{R}^n \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$

$$H(\bar{x}, t) = t\bar{x} + (1 - t)f(\bar{x}).$$

En realidad lo anterior muestra que en  $\mathbb{R}^n$  cualquier aplicación  $f$  es homotópica a cualquier otra  $g$ .

Sea  $f : S^n \rightarrow S^n$  una aplicación tal que  $f(S^n) \neq S^n$  (o sea,  $f$  no es sobreyectiva). Entonces  $f$  es homotópica a una aplicación constante. En efecto: existe  $p \in S^n$  tal que  $p \notin f(S^n)$ . Sea  $q = -p$  el punto antípoda de  $p$ . Podemos considerar a  $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ , en ese caso, puesto que  $\forall x \in S^n : f(x) \neq p$ , tenemos que el vector  $\overrightarrow{qf(x)} = f(x) - q$  no pasa por el origen de coordenadas de  $\mathbb{R}^{n+1}$ . O sea, el segmento

$$[q, f(x)] = \{(1 - t)f(x) + tq / t \in [0, 1]\}$$

no contiene a  $0 \in \mathbb{R}^{n+1}$ . Definimos la homotopía  $H : S^n \times [0, 1] \rightarrow S^n$  por

$$H(x, t) = \frac{(1 - t)f(x) + tq}{\|(1 - t)f(x) + tq\|}, \quad x \in S^n, t \in [0, 1].$$

Entonces  $H(x, 0) = f(x)$  y  $H(x, 1) = q$ . Se deduce que una tal aplicación tiene siempre grado módulo 2 nulo.

Recordemos que un retracto del espacio topológico  $X$  en el subconjunto cerrado  $C$  de  $X$  es una aplicación continua  $r : X \rightarrow C$  tal que  $r|_C = id : C \rightarrow C$ .  
Sea  $B^{n+1}$  la bola unidad cerrada de  $\mathbb{R}^{n+1}$ ,

$$B^{n+1} = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} / \|x\| \leq 1\}.$$

Se ve que  $B^{n+1}$  es una variedad diferenciable con borde  $\partial B^{n+1} = S^n$  la esfera unidad.

No existe ninguna retracción  $r : B^{n+1} \rightarrow S^n$ . En efecto, si tal retracción existiese, tendríamos la posibilidad de definir una homotopía  $H : S^n \times [0, 1] \rightarrow S^n$  entre la identidad de  $S^n$  y una aplicación constante. Basta poner

$$H(x, t) = r((1 - t)x), \quad x \in S^n, t \in [0, 1].$$

Quedaría  $H(x, 0) = r(x) = id(x) = x$  para todo  $x \in S^n$  y  $H(x, 1) = r(0) = \text{cte} \in S^n$ . Pero esto contradice que el grado módulo 2 de la identidad es 1 y el de una aplicación constante es 0.

**Teorema 2.2.1.** Teorema del Punto Fijo de Brouwer.

Sea  $B$  un conjunto homeomorfo a la bola cerrada de dimensión  $B^n$ . Sea  $f : B \rightarrow B$  una aplicación continua. Entonces  $f$  tiene un punto fijo, o sea, existe  $p \in B$  tal que  $f(p) = p$ .

*Demostración.* Supongamos que es falso el resultado: entonces para todo  $x \in B$  se cumple que  $f(x) \neq x$ . Componiendo con un homeomorfismo  $h : B \rightarrow B^n$  pasamos de  $B$  a la bola estándar  $B^n$ . O sea, definimos  $g : B^n \rightarrow B^n$  por  $g = h \circ f \circ h^{-1}$ . Se va a cumplir que  $g(x) \neq x$  para todo  $x \in B^n$ . En efecto, si  $g(x) = x$  para algún  $x \in B^n$  entonces  $h \circ f \circ h^{-1}(x) = x$  lo que implica que  $f(h^{-1}(x)) = h^{-1}(x)$ . Luego también  $f$  tendría un punto fijo. Definimos ahora una retracción  $r$  de  $B^n$  en  $\partial B^n = S^{n-1}$  así:

Si  $x \in B^n$  consideramos el vector  $\overrightarrow{xg(x)} = g(x) - x$  que es no nulo,  $g(x) \in B^n$ . Definimos la retracción  $r$  haciéndole corresponder a  $x$  el punto de la recta  $\overline{xg(x)} \subset \mathbb{R}^n$  que corta a  $S^{n-1}$  y está en la semirrecta cerrada con origen  $x$  y que no contiene a  $g(x)$ . Entonces  $r(x) = x$  si  $x \in \partial B^n = S^{n-1}$ . La función  $r$  así definida es continua puesto que el vector  $g(x) - x$  varía con continuidad al variar  $x$ . En ecuaciones:

$$\begin{aligned} r(x) = x + t(g(x) - x), t \leq 0 &\iff 1 = \|x + t(g(x) - x)\| \text{ y } t \leq 0 \\ &\iff 1 = \langle x + t(g(x) - x), x + t(g(x) - x) \rangle \text{ y } t \leq 0 \\ &\iff 1 = \|x\|^2 + 2t \langle x, g(x) - x \rangle + t^2 \|g(x) - x\|^2 \text{ y } t \leq 0. \end{aligned}$$

Esto da explícitamente:

$$t = t(x) = \frac{\langle x, x - g(x) \rangle - \sqrt{\langle x, x - g(x) \rangle^2 + \|x - g(x)\|^2(1 - \|x\|^2)}}{\|x - g(x)\|^2}$$

Queda como ejercicio ver que ya que  $\|x - g(x)\| \neq 0$  y ambos  $x$  y  $g(x)$  tienen módulo  $\leq 1$ , entonces la aplicación

$$r(x) = x + t(x)(g(x) - x),$$

da soluciones reales y es continua. Pero esto contradice lo probado antes del teorema sobre que no hay retracciones de  $B^n$  en su borde.  $\square$

Queremos dar una aplicación de la teoría del grado módulo 2 que conduce a la demostración del **teorema de separación de Jordan-Brouwer**.

Es bastante conocido que dada una curva cerrada simple  $C$  en el plano  $\mathbb{R}^2$ , ésta separa al plano en dos subconjuntos abiertos y conexos, una  $I$  llamada interior que es acotada, y la otra  $E$  llamada exterior que es no acotada. La frontera de ambas regiones es la curva  $C$ . Este es el teorema de la curva de Jordan. Se puede decir más aun, la clausura de la región acotada  $I$ , es un disco de borde  $C$  (teorema de Schönflies). Puede decirse mucho más todavía, la región abierta  $I$  es homeomorfa al disco unidad  $D^2$  de  $\mathbb{R}^2$ ,  $\{x \in \mathbb{R}^2 / \|x\| < 1\}$  por un homeomorfismo analítico, o sea, existe  $\phi : D^2 \rightarrow I$  una función holomorfa invertible y con inversa holomorfa (Teorema de la aplicación de Riemann, ver por ejemplo W. Rudin, Análisis Real y Complejo).

Tales resultados, con estas propiedades tan especiales, es falso en dimensiones más altas. El toro  $T^2$  separa  $\mathbb{R}^3$  en dos regiones una acotada  $I$  y la otra  $E$  no acotada, pero ninguna de ellas es homeomorfa a una bola de dimensión 3. En efecto, en el interior del toro y en el exterior del toro, existen curvas cerradas  $C$  tales que no pueden deformarse en forma continua a un punto en  $\mathbb{R}^3 \setminus T^2$ . Persiste sin embargo que ambas regiones son abiertos conexos de  $\mathbb{R}^3 \setminus T^2$ .

Podría pensarse que si tomamos una esfera  $S$  encajada en  $\mathbb{R}^3$  entonces sí resultará  $I$ , la región acotada de  $\mathbb{R}^3 \setminus S$ , homeomorfa a una bola. Esto es así para la esfera unidad  $S^2 = \{x \in \mathbb{R}^3 / \|x\| = 1\}$ . Pero existen esferas topológicas  $S$  (homeomorfas a  $S^2$ ) en  $\mathbb{R}^3$  tales que ni el interior  $I$  ni el exterior  $E$  son homeomorfos a la bola  $B^3 = \{x \in \mathbb{R}^3 / \|x\| < 1\}$  y, peor aun, ninguna de ellas tiene clausura una variedad con borde (ver por ejemplo Edwin E. Moise, "Geometric topology in dimensions 2 and 3"). Persiste sin embargo que  $\mathbb{R}^3 \setminus S$  se descompone en la unión de dos regiones (conjuntos abiertos y conexos).

¿Qué resta del Teorema de la curva de Jordan en dimensiones mayores o iguales que 3? Resulta que las propiedades de separación en dos regiones  $I$  y  $E$ , valen para

variedades topológicas  $M \subset \mathbb{R}^n$  de dimensión  $n - 1$ , compactas y conexas. Más aun, si  $M$  es una variedad diferenciable, entonces  $\text{Cl}(I)$  es una variedad diferenciable compacta conexa y con borde  $\partial(\text{Cl}(I)) = M$ . Tal es el contenido del Teorema de Jordan-Brouwer.

A efectos de demostrar el teorema de Jordan-Brouwer introducimos el concepto de número de vueltas módulo 2.

**Definición 2.2.1.** Sea  $f : M \rightarrow \mathbb{R}^n$  una aplicación diferenciable de la variedad diferenciable compacta de dimensión  $n - 1$ ,  $M$  en  $\mathbb{R}^n$ . Si  $z \in \mathbb{R}^n \setminus f(M)$  definimos el número de vueltas de  $f$  respecto a  $z$  como el grado módulo 2 de la aplicación diferenciable  $u_z : M \rightarrow S^{n-1}$  definida por  $u_z(x) = \frac{f(x)-z}{\|f(x)-z\|}$ . Denotamos el número de vueltas de  $f$  respecto a  $z$  por  $W_2(f, z)$ . Queda entonces  $W_2(f, z) = \text{deg}_2(u_z)$ .

En el caso de que  $f$  sea la inclusión  $\iota : M \hookrightarrow \mathbb{R}^n$  escribimos simplemente  $W_2(\iota, z) = W_2(M, z)$  y hablamos del número de vueltas de  $M$  respecto a  $z \notin M$ . Si tomamos, por ejemplo  $S^1 \subset \mathbb{R}^2$ , no es difícil calcular que  $W_2(S^1, (0, 0)) = 1$  y  $W_2(S^1, (-2, 0)) = 0$ . Pues  $u_{(0,0)} = \text{id} : S^1 \rightarrow S^1$ . En cambio  $u_{(-2,0)}$  no es sobre  $S^1$ : al  $x = (x_1, x_2)$  recorrer  $S^1$  resulta que

$$\frac{(x_1, x_2) - (-2, 0)}{\|(x_1, x_2) - (-2, 0)\|} = \frac{(x_1 + 2, x_2)}{\|(x_1 + 2, x_2)\|}.$$

No es difícil calcular que la imagen por  $u_{(-2,0)}$  de  $S^1$  está contenida en un subconjunto de  $S^1$ , más exactamente:

$$u_{(-2,0)}(S^1) = (\cos \theta, \text{sen } \theta); \quad -\pi/6 \leq \theta \leq \pi/6.$$

Por lo tanto, siendo  $u_{(-2,0)}$  no sobreyectiva,  $\text{deg}_2(u_{(-2,0)}) = 0$ .

Este ejemplo simple puede repetirse con otras variedades como por ejemplo el toro  $T^2$  en  $\mathbb{R}^3$ . El resultado va a ser que si tomamos un punto "dentro" de la variedad, el grado módulo 2 respecto a él va a ser 1, y si lo tomamos "fuera" el grado será 0. La idea ahora es invertir el proceso. Clasificar los puntos de  $\mathbb{R}^n \setminus M$  según el grado módulo 2 respecto a ellos sea 0 ó 1. Y tratar de allí de obtener los conjuntos  $I$  (interior) y  $E$  (exterior) con las propiedades requeridas.

**Teorema 2.2.2. Teorema de Separación de Jordan-Brouwer:**

Sea  $M$  una variedad diferenciable de clase  $C^1$ , compacta, conexa, sin borde y de dimensión  $n - 1$  encajada en  $\mathbb{R}^n$ :  $\iota : M \hookrightarrow \mathbb{R}^n$ . Entonces  $\mathbb{R}^n \setminus M = I \cup E$ , donde  $I$  es un conjunto abierto, conexo y acotado,  $E$  es un conjunto abierto, conexo y no acotado.  $I$  y  $E$  son disjuntos:  $I \cap E = \emptyset$ . Más aun,  $\text{Cl}(I)$  es una variedad diferenciable compacta, conexa y con borde  $\partial(\text{Cl}(I)) = M$ .

*Demostración.* Siendo  $M$  de dimensión  $n - 1$  el Teorema de Sard dice que  $f(M)$  tiene medida nula en  $\mathbb{R}^n$ . Sin embargo alguien podría objetar que la demostración que dimos del Teorema de Sard fue para  $M$  de clase  $C^\infty$ . Pero ya en la demostración de dicho teorema decíamos que si  $f : M \rightarrow N$  es una aplicación diferenciable y  $\dim(M) = n < \dim(N) = p$  entonces la medida de  $f(M)$  en  $N$  es nula. La prueba que hicimos para el caso  $n = 1, p > 1$ , es válida para  $f$  de clase  $C^1$  y se extiende directamente al caso  $n < p$  cualquiera. Existe pues  $z \in \mathbb{R}^n$  tal que  $z \notin M$ . Para un tal  $z$  podemos calcular  $W_2(M, z)$ . Definimos los subconjuntos de  $\mathbb{R}^n \setminus M$ :

$$E = \{z \in \mathbb{R}^n \setminus M / W_2(M, z) = 0\},$$

$E$  será llamado el exterior de  $M$ , y

$$I = \{z \in \mathbb{R}^n \setminus M / W_2(M, z) = 1\}.$$

$I$  será llamado el interior de  $M$ . Es obvio que  $I \cup E = \mathbb{R}^n \setminus M$  y que  $I \cap E = \emptyset$ . No es obvio que ambos sean abiertos conexos y no vacíos, que  $I$  sea acotado y  $E$  no.  $I$  y  $E$  son abiertos: probemos, por ejemplo, que  $I$  es abierto. Sea  $z \in I$ . Entonces  $z \in \mathbb{R}^n \setminus M$  que es abierto por ser  $M$  compacta y por tanto un cerrado de  $\mathbb{R}^n$ . Existe pues  $\delta > 0$  tal que el entorno  $E(z, \delta)$  está contenido en  $\mathbb{R}^n \setminus M$ . Probemos ahora que si  $z, w \in \mathbb{R}^n \setminus M$  están en un mismo abierto conexo entonces  $W_2(M, z) = W_2(M, w)$ . Esto probará que  $I$ , y también  $E$ , son abiertos ya que cualquier  $w \in E(z, \delta)$  puede unirse con  $z$  por un segmento que no corta  $M$ . Si  $z, w$  están en un mismo abierto conexo de  $\mathbb{R}^n \setminus M$ , existe un arco de curva  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n \setminus M$  que los une:  $\gamma(0) = z, \gamma(1) = w$ . Esto pues conexión es equivalente a arco-conexión para conjuntos abiertos. Tenemos que  $W_2(M, z) = \deg_2(u_z), W_2(M, w) = \deg_2(u_w)$ . Definamos la función

$$H : M \times [0, 1] \rightarrow S^{n-1}, \text{ por } H(x, t) = u_{\gamma(t)}(x).$$

Entonces  $H$  es continua ya que  $\gamma(t) \notin M$ . Luego  $H$  es una homotopía entre  $u_z$  y  $u_w$ . Concluimos que  $\deg_2(u_z) = \deg_2(u_w)$  y por lo tanto  $W_2(M, z) = W_2(M, w)$ . Por lo tanto  $I$  y  $E$  son abiertos.

La prueba de que tanto  $E$  como  $I$  son conexos y no vacíos se basa en la siguiente propiedad:

Dado  $z \in \mathbb{R}^n \setminus M$ , para todo  $x \in M$ , para todo entorno abierto  $U(x) \subset \mathbb{R}^n$ , existe  $z' \in U(x)$  tal que  $z'$  puede unirse con  $z$  por un arco  $\gamma$  que no corta  $M$ . Para probar esto definimos como  $A$  el subconjunto de los puntos de  $M$  tal que para los  $x \in A$  para todo entorno abierto  $U(x) \subset \mathbb{R}^n$ , existe  $z' \in U(x)$  tal que  $z'$  puede unirse con  $z$  por un arco  $\gamma$  que no corta  $M$ . Si probamos que  $A$  es no vacío, cerrado y abierto en  $M$ , entonces por conexión de  $M$  resultará que  $A = M$  y habremos probado la propiedad.

Para ver que  $A$  es no vacío, tomemos un punto cualquiera  $x$  de  $M$  y unámoslo con  $z$ . El segmento  $[z, x]$  es un cerrado de  $\mathbb{R}^n$ , así como lo es  $M$ . Se deduce que  $M \cap [z, x]$  es cerrado. Como  $z \notin M$  resulta entonces que en el orden sobre el segmento  $[z, x]$  en que  $z$  precede a  $x$ , existirá un primer punto  $x' \in M$  (puede pasar que  $x' = x$ ). Ese punto  $x'$  está en  $A$  ya que dado cualquier entorno  $U(x')$  va a haber puntos  $z' \in [z, x']$  en  $U(x')$  y estos puntos se unen con  $z$  por el segmento  $[z, z'] \subset [z, x']$ . Para ver que  $A$  es cerrado, tomemos una sucesión  $\{x_n\} \subset A$  tal que  $x_n \rightarrow x \in M$  y veamos que  $x \in A$ . Dado  $U(x)$  un entorno de  $x$  en  $\mathbb{R}^n$ , como  $x_n \rightarrow x$  existe  $n_0 > 0$  tal que para todo  $n \geq n_0$   $x_n \in U(x)$ . Fijado un  $n \geq n_0$ , sea  $V = V(x_n)$  un entorno de  $x_n$  contenido en  $U(x)$ . Como  $x_n \in A$ , para ese  $V$  existe un  $z' \in V$  que puede unirse a  $z$  por un arco de curva sin cortar  $M$ . Como  $z' \in U(x)$  y  $U(x)$  es arbitrario, tenemos que  $x \in A$ .

La prueba de que  $A$  es abierto usa fuertemente que  $M$  es una variedad diferenciable. Sea  $x \in A \subset M$ . Existe para  $x$  una parametrización local de  $M$ ,  $X : B(1) \subset \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^n$ , donde  $B(1)$  es la bola abierta de radio 1 y de centro  $0 \in \mathbb{R}^{n-1}$ , tal que  $B(0) = x$ . En coordenadas queda

$$X(x_1, \dots, x_{n-1}) = (X_1(x_1, \dots, x_{n-1}), \dots, X_{n-1}(x_1, \dots, x_{n-1}), X_n(x_1, \dots, x_{n-1})),$$

y el rango de  $DX_0$  es  $n-1$ . Podemos pues suponer que la matriz jacobiana calculada en  $0 \in \mathbb{R}^{n-1}$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial X_1}{\partial x_1} & \frac{\partial X_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial X_1}{\partial x_{n-1}} \\ \frac{\partial X_2}{\partial x_1} & \frac{\partial X_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial X_2}{\partial x_{n-1}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial X_{n-1}}{\partial x_1} & \frac{\partial X_{n-1}}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial X_{n-1}}{\partial x_{n-1}} \\ \frac{\partial X_n}{\partial x_1} & \frac{\partial X_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial X_n}{\partial x_{n-1}} \end{pmatrix}$$

es tal que la submatriz formada por todas las columnas y las primeras  $n-1$  filas tiene determinante no nulo:

$$\det \begin{pmatrix} \frac{\partial X_1}{\partial x_1} & \frac{\partial X_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial X_1}{\partial x_{n-1}} \\ \frac{\partial X_2}{\partial x_1} & \frac{\partial X_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial X_2}{\partial x_{n-1}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial X_{n-1}}{\partial x_1} & \frac{\partial X_{n-1}}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial X_{n-1}}{\partial x_{n-1}} \end{pmatrix} \neq 0.$$

Como ya hicimos en otras demostraciones, consideremos  $\mathbb{R}^{n-1}$  encajado en  $\mathbb{R}^n$  con el encaje canónico

$$(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1} \mapsto (x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, 0) \in \mathbb{R}^n,$$

y definamos  $\hat{X} : B(1) \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  por

$$\begin{aligned} \hat{X}(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, t) &= \\ &= (X_1(x_1, \dots, x_{n-1}), \dots, X_{n-1}(x_1, \dots, x_{n-1}), X_n(x_1, \dots, x_{n-1}) + t). \end{aligned}$$

Entonces  $\det(D\hat{X})|_{0 \in \mathbb{R}^n}$  coincide con el determinante de la submatriz anterior y por tanto no se anula. Por el Teorema de la Función Inversa, existe un entorno  $W$  de 0 en  $\mathbb{R}^n$  tal que  $\hat{X}/W$  es un difeomorfismo sobre su imagen  $X(W) = V(x)$ . Podemos suponer, achicándolo si es preciso, que  $W$  es una bola centrada en 0. Se deduce que  $\hat{X}^{-1} : V(x) \rightarrow W$  lleva  $M \cap V(x)$  sobre  $W \cap \{x_n = 0\}$ . Hasta ahora no usamos para nada que  $x \in A$ . Suponiendo esto último, para todo entorno  $U(x)$  existe  $z' \in U(x)$  tal que  $z$  puede unirse por un arco con  $z'$  sin cortar  $M$ . En particular esto vale tomando  $U(x) = V(x)$ , sea entonces  $z' \in V(x)$  el punto de  $V(x)$  que se une con  $z$  por medio de un arco  $\gamma$  sin cortar  $M$ . Probemos que todo punto de  $V(x) \cap M$  está en  $A$ . Esto probará que  $A$  es abierto completando la prueba de la propiedad. Dado  $x' \in V(x) \cap M$  tomemos un entorno  $U(x')$  de  $x'$  en  $\mathbb{R}^n$ . Sin pérdida de generalidad podemos suponer que  $U(x') \cap V(x)$ . Usando  $\hat{X}^{-1}$  transformamos el problema original en el problema respecto al hiperplano de ecuación  $x_n = 0$ . Más precisamente, si  $\zeta'$  es la imagen de  $z'$  por  $\hat{X}^{-1}$ , como  $\hat{X}^{-1}(x') = \xi' \in \{x_n = 0\}$  y  $U(x')$  es un entorno de  $x'$  en  $\mathbb{R}^n$ , existen puntos de  $\hat{X}^{-1}(U(x'))$  con coordenada  $x_n < 0$  y puntos con coordenada  $x_n > 0$ . Alguno de ellos, digamos  $\zeta''$ , puede unirse a  $\zeta'$  por un arco  $\alpha$  sin cortar el hiperplano  $x_n = 0$  y sin salir de  $W$ . El arco  $\beta = \hat{X}(\alpha)$  une entonces  $z'' \in U(x')$  con  $z'$  sin cortar  $M$ . Entonces el arco que puede obtenerse de la unión de  $\beta$  con  $\gamma$  unirá  $z$  con  $z'' \in U(x')$  sin cortar  $M$ . Luego  $x' \in A$  y resulta  $A = M$  al ser  $M$  conexa.

Veamos ahora que  $I$  y  $E$  son conexos. Para ello probemos que  $\mathbb{R}^n \setminus M$  tiene a lo sumo dos componentes conexas. Si probamos luego que ni  $I$  ni  $E$  son vacíos, esto será suficiente.

Si  $z$  es un punto de  $\mathbb{R}^n \setminus M$  entonces tomemos un punto  $x \in M$  cualquiera. Por medio de una parametrización  $X$ , como acabamos de hacer más arriba, podemos considerar un difeomorfismo  $\hat{X}$  que lleva un entorno  $V(x)$  del punto  $x$  sobre una bola  $W$  de 0 en  $\mathbb{R}^n$  y  $V(x) \cap M$  en el hiperplano  $x_n = 0$  cortado con  $W$ . Por lo antes visto existe un punto  $z'$  que se puede unir a  $z$  por un arco que no corta a  $M$ . Usando  $\hat{X}^{-1}$  la imagen de  $z'$  puede unirse, para un  $\delta > 0$  suficientemente chico, o bien al punto  $(0, \dots, 0, \delta) \in \mathbb{R}^n$  o bien al punto  $(0, \dots, 0, -\delta) \in \mathbb{R}^n$ . Volviendo para atrás con  $\hat{X}$  vemos que existen puntos  $z_0 = \hat{X}(0, \dots, 0, \delta)$ ,  $z_1 = \hat{X}(0, \dots, 0, -\delta)$  en  $\mathbb{R}^n \setminus M$  tales que todo punto  $z$  de  $\mathbb{R}^n \setminus M$  se une por un arco que no corta  $M$  o bien con  $z_1$  o bien con  $z_0$ . Entonces no puede haber más que dos componentes conexas de  $\mathbb{R}^n \setminus M$ .

Probemos ahora que  $E$  es no vacío y de paso que no es acotado y que  $I$  sí lo es. Como  $M$  es compacto, existe una bola cerrada  $K$  de centro  $0 \in \mathbb{R}^n$  y radio  $R > 0$  tal que  $M \subset K$ . Sea ahora un punto  $z \in \mathbb{R}^n$  de coordenadas  $(-2R, 0, \dots, 0)$ . Si  $v \in S^{n-1}$  es ortogonal a  $z$ , entonces para todo  $x \in M$  se cumple  $u_z(x) \neq v$ . En caso contrario tendríamos que  $\frac{x-z}{\|x-z\|} = v$ , existiría entonces un  $\lambda > 0$  tal que  $x = z + \lambda v$ . La distancia de  $x \in M$  a  $0$  será entonces (teorema de Pitágoras)  $\sqrt{4R^2 + \lambda^2} > 2R$ , contradiciendo que  $M \subset K$ . Entonces  $v$  es un valor regular de  $u_z$  sin preimágenes. Se concluye que  $\deg_2(u_z) = 0$  o lo que es lo mismo  $W_2(M, z) = 0$ . Todo punto fuera de  $K$  puede unirse con  $z$  por un arco que no corte  $K$ . Luego todo punto  $z'$  fuera de  $K$  cumple  $W_2(M, z') = 0$  y  $E$  es no acotada. Entonces  $I \subset K$  de donde es acotado. Falta por ver que  $I$  no es vacío, o sea, existe  $z \in \mathbb{R}^n \setminus M$  tal que  $W_2(M, z) = 1$ . Para ello consideremos un valor regular  $v \in S^{n-1}$  de  $u_z$ , para algún  $z \in M$ . Si  $u_z^{-1}(v) = \emptyset$  ya sabemos que el grado es 0, pero queremos ahora un  $v$  tal que  $u_z^{-1}(v) \neq \emptyset$ . Tomemos pues  $x \in M$  y consideremos  $v = \frac{\iota(x)-z}{\|\iota(x)-z\|}$  siendo  $\iota: M \hookrightarrow \mathbb{R}^n$  la inclusión de  $M$  en  $\mathbb{R}^n$  que estamos asumiendo es un encaje. ¿Qué condición debe cumplir  $v$  para que no sea un valor crítico? La respuesta es, claro está, que  $D(u_z)_x: T_x M \rightarrow T_v S^{n-1}$  sea un isomorfismo lineal, o sea que el rango de  $D(u_z)_x$  sea  $n-1$ , para todo  $x \in u_z^{-1}(v)$  lo que es equivalente a la inyectividad de  $D(u_z)_x$  para cada  $x \in u_z^{-1}(v)$ . Consideremos otra vez una parametrización local de un entorno de  $x \in M$ ,  $X: B \subset \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $B$  la bola unidad de  $\mathbb{R}^{n-1}$  y  $X(0) = x$ . Entonces un vector de  $T_x M$  es imagen por  $DX_0$  de un vector  $w$  de  $\mathbb{R}^{n-1}$ . Por medio de la parametrización  $X$  tenemos entonces que  $D(u_z)_x(DX_0(w)) = 0$  si y solo si  $D(u_z)_x \circ DX_0(w) = 0$ . La función  $u_z$  puede definirse en  $\mathbb{R}^n \setminus \{z\}$ , un abierto de  $\mathbb{R}^n$ , calculemos allí su derivada.

$$D(u_z)_x(y) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \left( \frac{x + ty - z}{\|x + ty - z\|} - \frac{x - z}{\|x - z\|} \right) =$$

¡Calcular el límite!

$$= \frac{y}{\|x - z\|} - \frac{\langle x - z, y \rangle (x - z)}{\|x - z\|^2 \|x - z\|}.$$

Si  $y = DX_0(w)$  tenemos entonces que

$$D(u_z)_x(DX_0(w)) = \frac{DX_0(w)}{\|x - z\|} - \frac{\langle x - z, DX_0(w) \rangle (x - z)}{\|x - z\|^2 \|x - z\|} = 0$$

si y solo si  $DX_0(w)$  es colineal con  $v = \frac{x-z}{\|x-z\|}$ . Resulta entonces que una condición necesaria y suficiente para que  $v$  sea valor regular es que  $v$  complete con una base de  $DX_0(\mathbb{R}^{n-1}) = T_x M$  una base de  $\mathbb{R}^n$ . Dado entonces  $x \in M$ , calculamos  $T_x M$  y tomamos (por ejemplo)  $v \in S^{n-1}$  no contenido en  $T_x M$ . Si ahora  $z$  es

un punto de  $\mathbb{R}^n \setminus M$  en la recta  $x + \lambda v$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ , (la recta no está contenida en  $M$ , si no  $v$  sería tangente a  $M$  en  $x$ ) entonces  $u_z$  es valor regular a menos que exista otra tangencia en  $x + \lambda v$ . Afirmamos que esto no puede producirse para un abierto de  $S^{n-1}$ . En efecto: caso contrario contradeciríamos el teorema de Sard. Más aún, si  $x \in M$ ,  $X : B(1) \subset \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^n$  es una parametrización local y  $\hat{X} : W \rightarrow \hat{X}(W) = V(x) \ni x$  es un difeomorfismo local que lleva el hiperplano  $\{x_n = 0\} \cap W$  sobre  $M \cap V(x)$ ; dado que  $\{x_n = 0\}$  separa  $W$ ,  $M$  separa  $V(x)$ <sup>2</sup>. Concluimos que para  $z \in V(x) \setminus M$ , para un abierto  $B$  en  $S^{n-1}$ , si  $v \in B$  tenemos que  $u_z^{-1}(v) \neq \emptyset$ .

Para un  $v$  adecuado tenemos entonces que existe  $z \in \mathbb{R}^n \setminus M$  tal que  $v$  es valor regular de  $u_z$  y existe  $x \in u_z^{-1}(v)$ . Sean  $x_1, x_2, \dots, x_k$  las preimágenes de  $v$  por  $u_z$ . Entonces  $\deg_2(u_z) = k \pmod 2$ . Ordenemos las preimágenes según el orden de cercanía a  $z$ , observando que como  $(x_j - z) / \|x_j - z\| = v$ , tenemos que  $x_j = z + \lambda_j v$  con  $\lambda_j > 0$ . Si tomamos entonces  $z'$  un punto en el segmento abierto  $(x_1, x_2)$ , resultará que  $v$  es también valor regular para  $u_{z'}$ . Pero ahora  $\deg_2(u_{z'}) = k - 1 \pmod 2$ . Entonces  $z$  y  $z'$  están uno en  $I$  y el otro en  $E$ . Esto completa la demostración de que  $I$  es no vacío y por tanto que ambos  $I$  y  $E$  son conexos. Más todavía, lo recién dicho implica que hay puntos  $z, z'$  uno en  $I$  y el otro en  $E$  arbitrariamente cerca de cualquier punto  $x$  de  $M$ . Se tiene pues que la frontera topológica de  $I$  y de  $E$  es  $M$ .

La prueba de que la clausura de  $I$ ,  $\text{Cl}(I)$ , es una variedad diferenciable de dimensión  $n$  con borde  $\partial(\text{Cl}(I)) = M$ , queda como ejercicio.  $\square$

### 2.3. Teoría del grado de Brouwer.

La teoría del grado módulo 2 es insuficiente para muchas cosas. En particular no distingue la aplicación  $z \mapsto z^2$  definida en  $S^1 \subset \mathbb{R}^2$  (pensar  $\mathbb{R}^2$  como el cuerpo complejo  $\mathcal{C}$  para interpretar  $z^2 = z \cdot z$ ) de una aplicación constante  $z \mapsto z_0 \in S^1$ . Ambas tienen grado módulo 2 nulo. Brouwer desarrolló una teoría del grado asignándole a cada función entre variedades orientables y orientadas de igual dimensión un número entero. En el caso del ejemplo  $z \mapsto z^2$  ese grado va a ser exactamente 2 (en general va a pasar que  $z \mapsto z^n$  va a tener grado  $n$ ) mientras que una aplicación constante va a tener grado 0. Groseramente hablando, el grado va a contar el número de preimágenes, solo que a veces las va a sumar y a veces las va a restar según la  $f : M^n \rightarrow N^n$  lleve la "orientación" de las preimágenes  $x \in f^{-1}(y)$  en la del valor regular  $y \in N$  o no lo haga. Formalizar estas nociones nos obliga a definir más cuidadosamente el concepto de variedad orientable.

<sup>2</sup>Cualquier arco en  $W$  que una puntos  $\zeta_1, \zeta_2 \in W$  uno con coordenada  $x_n > 0$  y el otro con coordenada  $x_n < 0$  corta a  $\{x_n = 0\}$ .

### 2.3.1. Orientación de variedades.

Sea  $V$  un espacio vectorial real de dimensión finita  $n$ . Sean en él dos bases  $\{u_1, \dots, u_n\}$  y  $\{v_1, \dots, v_n\}$  y  $((a_{ij}))$  la matriz de cambio de base correspondiente, o sea:

$$v_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} u_j.$$

Ora el determinante de esa matriz es positivo ora es negativo. Si  $\det(a_{ij}) > 0$  decimos que ambas bases están igualmente orientadas, si  $\det(a_{ij}) < 0$  decimos que  $\{v_1, \dots, v_n\}$  tiene la orientación opuesta de la de  $\{u_1, \dots, u_n\}$ . Obsérvese que se trata entonces de bases ordenadas. Así, por ejemplo, la base  $\{u_1, u_2, u_3, \dots, u_n\}$  tiene los mismos elementos que la base  $\{u_2, u_1, u_3, \dots, u_n\}$  pero no tienen la misma orientación ya que la matriz de cambio de base es la matriz de permutación  $P_{12}$  obtenida de la matriz identidad  $I_n$  intercambiando la primera fila con la segunda y el determinante de  $P_{12}$  es  $-1$ .

Fijada una base  $B$  como referencia quedan subdivididas las bases de  $V$  en aquellas con igual orientación que  $B$ , y aquellas con orientación opuesta. Esto define exactamente dos orientaciones en un espacio vectorial real de dimensión finita. En efecto: si  $B$  y  $C$  son dos bases con la misma orientación y  $B$  y  $D$  también, entonces  $C$  y  $D$  son bases con igual orientación (pues el determinante de un producto de matrices es el producto de los determinantes de cada matriz).

En el caso de  $V = \mathbb{R}^n$  se considera como referencia la base canónica

$$\{e_1 = (1, 0, \dots, 0), e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, e_n = (0, \dots, 0, 1)\}$$

y se dice que una base con igual orientación que la canónica está positivamente orientada. Si tiene la orientación opuesta se dice que está negativamente orientada. Para el caso del espacio vectorial nulo, conviene introducir dos orientaciones también, como los símbolos  $+1$  y  $-1$ .

Para definir orientación en variedades daremos ahora una definición que puede tomarse como definitiva para variedades diferenciables. Más tarde daremos otra definición que usa la noción de forma multilineal alternada, que es más fácil de generalizar al caso de variedades topológicas. Ambas definiciones son equivalentes para variedades diferenciales.

Sea  $F : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  un difeomorfismo sobre su imagen. El mapa  $F$  define para cada  $x \in U$  un mapa lineal  $DF_x : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  que es un isomorfismo. Su determinante es pues distinto de cero. Este determinante se conoce como el Jacobiano de la transformación  $F$  en el punto  $x$ . Si el mapa  $F$  tiene jacobiano positivo en  $x$ , localmente el difeomorfismo conserva la orientación de  $\mathbb{R}^n$ . Si no, la invierte.

**Definición 2.3.1.** Sea  $M$  una variedad diferenciable de dimensión  $n$  y  $\mathcal{A}$  un atlas de  $M$ . Dos mapas coordenados locales  $\varphi : U \subset M \rightarrow \mathbb{R}^n$ , y  $\psi : V \subset M \rightarrow \mathbb{R}^n$  se dicen compatibles si o bien  $U \cap V = \emptyset$  o si  $U \cap V \neq \emptyset$  entonces para todo punto  $p \in U \cap V$  el jacobiano del cambio de coordenadas

$$\psi \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap V) \rightarrow \psi(U \cap V)$$

es positivo. Si esto pasa para todo par de mapas coordenados del atlas  $\mathcal{A}$  decimos que el atlas es coherente.

**Definición 2.3.2.** Decimos que la variedad diferenciable  $M = M^n$  es orientable si existe para ella un atlas  $\mathcal{A}$  coherente. Si  $M$  es una variedad diferenciable orientable, decimos que está orientada si hemos elegido para ella un atlas coherente  $\mathcal{A}$ .

Los mapas coordenados del atlas maximal  $\mathcal{B}$  que contiene a  $\mathcal{A}$  se clasifican en dos tipos: aquellos  $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  que son compatibles con los mapas coordenados de  $\mathcal{A}$  y los que no lo son. No es difícil probar que el atlas  $\mathcal{A}$  puede completarse a un maximal coherente eligiendo todos los mapas coordenados compatibles con  $\mathcal{A}$  de  $\mathcal{B}$ . El resto de los mapas forma también un atlas (maximal) coherente. En efecto si  $\varphi^+ : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  es un mapa coordenado local,  $\varphi^+(x) = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ ,  $x \in U$  otro mapa coordenado se obtiene simplemente como

$$\varphi^- : U \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad \varphi^-(x) = (-x_1, x_2, \dots, x_n),$$

(cambio del signo de la primera coordenada, esto equivale a componer a la izquierda  $\varphi^+$  con la reflexión de  $\mathbb{R}^n$  respecto al hiperplano  $\{x_1 = 0\}$ ). Es claro entonces que cualquier entorno coordenado admite un par de mapas coordenados tal que el jacobiano de  $\varphi^- \circ (\varphi^+)^{-1}$  es negativo. Además, si  $\varphi_1^+ : U_1 \rightarrow \mathbb{R}^n$  y  $\varphi_2^+ : U_2 \rightarrow \mathbb{R}^n$  son compatibles entonces  $\varphi_1^- : U_1 \rightarrow \mathbb{R}^n$  y  $\varphi_2^- : U_2 \rightarrow \mathbb{R}^n$  también lo son (gracias a que  $\det(AB) = \det(A) \det(B)$ ).

Reuniendo todas las consideraciones anteriores encontramos que en una variedad diferenciable conexa y orientable  $M$  es posible definir exactamente dos orientaciones distintas.

Supongamos que  $M$  es una variedad diferenciable con borde de dimensión  $n+1$ . Su borde,  $\partial M$ , es una variedad diferenciable (sin borde) de dimensión  $n$ . Si  $M$  es orientable, cada orientación en  $M$  determina una orientación en  $\partial M$ . El recíproco es falso. Si  $M$  es la banda de Möbius, ella no es orientable pero su borde es una circunferencia que es orientable.

Para ver como  $M$  determina una orientación en  $\partial M$  consideremos un atlas coherente en  $M$ ,  $\mathcal{A}$  tal que  $\varphi(U) = \mathbb{R}^{n+1}$  si  $x$  es un punto interior de  $M$  y  $\varphi(U) = H^{n+1}$  si  $x \in \partial M$ . Sea  $p$  un punto del borde de  $M$  y  $\varphi : U = U(p) \rightarrow H^{n+1}$  un mapa

coordinado. Entonces

$$\varphi(p) \in \partial H^{n+1} = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} / x_{n+1} = 0\} \cong \mathbb{R}^n.$$

Sea otro mapa coordinado  $\psi : V \rightarrow H^{n+1}$  con  $p \in V \cap U$ . Si  $(x_1(p), \dots, x_n(p), x_{n+1}(p))$  son las coordenadas inducidas por  $\varphi$  y  $(y_1(p), \dots, y_n(p), y_{n+1}(p))$  son las coordenadas inducidas por  $\psi$  y  $p$  es un punto de  $\partial M$ , se cumple entonces que  $x_{n+1}(p) = y_{n+1}(p) = 0$ . El cambio de coordenadas induce el mapa  $\psi \circ \varphi^{-1} : H^{n+1} \rightarrow H^{n+1}$ . Las derivadas parciales respecto a las coordenadas  $x_1, \dots, x_n$  de la última coordenada  $y_{n+1}$  de  $y = \psi(p)$  se anulan:

$$\frac{\partial y_{n+1}}{\partial x_j} = 0, \quad j = 1, \dots, n.$$

Además  $x_{n+1} > 0$  si y solo si  $y_{n+1} > 0$ . Se deduce entonces, teniendo en cuenta que  $D(\psi \circ \varphi)$  no es singular en ningún punto, que

$$\frac{\partial y_{n+1}}{\partial x_{n+1}} > 0.$$

El jacobiano del cambio de coordenadas, que es positivo por ser coherente el atlas, queda entonces:

$$\det \begin{pmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial y_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial y_1}{\partial x_n} & \frac{\partial y_1}{\partial x_{n+1}} \\ \frac{\partial y_2}{\partial x_1} & \frac{\partial y_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial y_2}{\partial x_n} & \frac{\partial y_2}{\partial x_{n+1}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial y_n}{\partial x_1} & \frac{\partial y_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial y_n}{\partial x_n} & \frac{\partial y_n}{\partial x_{n+1}} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{\partial y_{n+1}}{\partial x_{n+1}} \end{pmatrix} =$$

(desarrollando por la última fila)

$$\det \begin{pmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial y_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial y_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial y_2}{\partial x_1} & \frac{\partial y_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial y_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial y_n}{\partial x_1} & \frac{\partial y_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial y_n}{\partial x_n} \end{pmatrix} \cdot \frac{\partial y_{n+1}}{\partial x_{n+1}}.$$

Como  $\frac{\partial y_{n+1}}{\partial x_{n+1}} > 0$  resulta entonces que el cambio de coordenadas restringido a  $\partial M$  tiene jacobiano

$$\det \begin{pmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial y_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial y_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial y_2}{\partial x_1} & \frac{\partial y_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial y_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial y_n}{\partial x_1} & \frac{\partial y_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial y_n}{\partial x_n} \end{pmatrix} > 0.$$

Por lo tanto el atlas  $\mathcal{A}$  restringido a  $\partial M$  es coherente y  $\partial M$  es orientable con una orientación inducida por la orientación de  $M$ .

En la práctica adoptaremos el siguiente criterio para ordenar el borde de  $M$ . Sea  $e \neq 0$  un vector de  $\mathbb{R}^{n+1}$  que apunta "hacia afuera" de  $H^{n+1} = \{x = (x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} / x_{n+1} \geq 0\}$ . Más formalmente: si  $e = (a_1, \dots, a_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}$ ,  $e$  apunta hacia afuera de  $H^{n+1}$  si  $x_{n+1} < 0$  y apunta hacia adentro si  $x_{n+1} > 0$ . Completamos a una base de vectores de  $\mathbb{R}^{n+1}$   $\{e, v_2, \dots, v_{n+1}\}$  tales que  $\{v_2, \dots, v_{n+1}\}$  sea una base de  $\partial H^{n+1}$ . Esto da, por medio de un mapa coordenado, una orientación de  $\partial M$ . Llamaremos a ésta la orientación estándar de  $\partial M$ . ¡Cuidado!, esta orientación no tiene por qué coincidir con la inducida por la orientación elegida en  $M$ .

Ejemplo: Sea  $M = B^2$  la bola unidad de  $\mathbb{R}^2$ . Su borde es  $\partial B^2 = S^1$ . Coloquemos en  $\mathbb{R}^2$  la orientación usual dada por los vectores  $\vec{i}$  y  $\vec{j}$  tal que  $\vec{i}$  se superpone con  $\vec{j}$  girando  $\pi/2$  radianes en sentido antihorario. Con esta orientación en  $B^2$ , la orientación inducida en  $S^1$  es la usual, la que corresponde al giro antihorario que es la que hemos llamado orientación estándar.

Si ahora tomamos como  $M = \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\| \geq 1\}$ , (un anillo) otra vez con la orientación usual de  $\mathbb{R}^2$ , entonces  $\partial M = S^1$  queda ordenada igual que antes (en forma antihoraria), pero esta **no** es la orientación estándar de  $\partial M$ .

Finalmente, si ahora tomamos  $M = \{x \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq \|x\| \leq 2\}$  con la orientación usual de  $\mathbb{R}^2$ , entonces  $\partial M$  son dos copias de  $S^1$ . Con la orientación estándar, tomando una base de  $\mathbb{R}^2$   $\{v_1, v_2\}$  tal que  $v_1$  apunte hacia afuera de  $M$ , una de las copias queda ordenada en forma antihoraria ( $\{\|x\| = 2\}$ ) mientras que la otra queda ordenada en forma horaria ( $\{\|x\| = 1\}$ ). Pero esta ordenación de cada componente conexa de  $\partial M$  no es la inducida por la ordenación de  $M$ .

Si  $M$  es una variedad diferenciable de dimensión 1 compacta, conexa y con borde, entonces  $M$  es un arco  $\gamma$  que puede parametrizarse en forma monótona estricta con parámetro  $t \in [0, 1]$ . Orientando  $\gamma$  con la orientación inducida por la de  $[0, 1]$ , en donde a su vez tomamos la orientación usual de  $\mathbb{R}$ , el vector tangente a  $\gamma$  apunta hacia afuera en  $t = 1$  y hacia adentro en  $t = 0$ . Asignamos a  $\gamma(0)$  el número de orientación  $-1$  y a  $\gamma(1)$  el número de orientación  $+1$ .

Una consecuencia de esto es que vale la siguiente:

**Proposición 2.3.1.** *Sea  $M$  una variedad diferenciable compacta con borde orientada y de dimensión 1. Entonces se cumple que la suma de todos los números de orientación del borde de  $M$  se anula.*

*Demostración.* Basta observar que si  $M$  es compacta es unión finita y disjunta de arcos y circunferencias. Cada circunferencia no tiene borde y en cada arco un extremo contribuye con 1 y el otro con  $-1$  a la suma de los números de orientación de  $\partial M$ .  $\square$

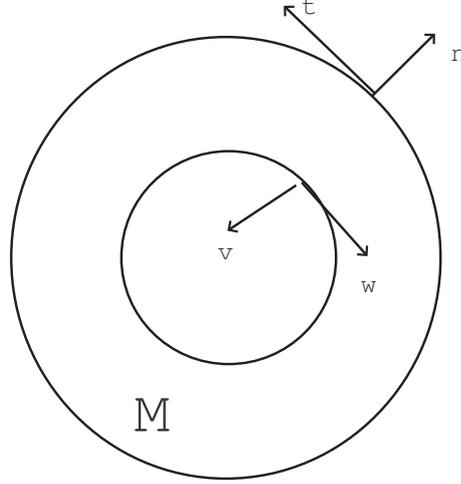


Figura 1: Orientación estándar del borde de  $M$

### 2.3.2. Definición de grado

Sean  $M$  y  $N$  variedades compactas y orientadas de dimensión  $n$ , la variedad  $N$  conexa. Si  $f : M \rightarrow N$  es una aplicación diferenciable y  $y \in N$  es un valor regular, su preimagen es una subvariedad diferenciable de dimensión 0 en  $M$ , luego un conjunto finito de puntos (posiblemente vacío):  $f^{-1}(y) = \{x_1, \dots, x_k\}$ . Como en el lema 2.1.6, se tiene que existen entornos disjuntos  $W_1 \ni x_1, \dots, W_k \ni x_k$  tales que  $f|_{W_j}$  es un difeomorfismo sobre  $f(W_j) = V \ni y$  (estamos suponiendo, lo que siempre es posible, que  $f(W_j) = V, \forall j = 1, \dots, k$ ). Si  $\varphi_j : W_j \rightarrow \mathbb{R}^n$  es un mapa coordenado local conteniendo a  $x_j \in M$  (suponemos, y también es siempre posible, que cada  $W_j$  es un entorno coordenado) y  $\psi : V \rightarrow \mathbb{R}^n$  es otro mapa coordenado conteniendo a  $y \in N$  entonces  $f|_{W_j}$  conservará la orientación de  $V$  inducida por  $N$  si y solo si

$$D(\psi \circ f \circ \varphi_j^{-1})_{\varphi_j(x_j)} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

conserva la orientación de  $\mathbb{R}^n$ , si y solo si

$$\det(D(\psi \circ f \circ \varphi_j^{-1})_{\varphi_j(x_j)}) > 0.$$

Fijados atlas coherentes para  $M$  y  $N$ , se ve que no depende de los mapas coordenados particulares elegidos, que el determinante de más arriba sea positivo. Por eso en lugar de  $\det(D(\psi \circ f \circ \varphi_j^{-1})_{\varphi_j(x_j)})$  escribiremos simplemente  $\det(Df_{x_j})$ .

Definimos el signo de  $Df$  en  $x_j$ ,  $\text{sign}(Df_{x_j})$ , como 1 si  $\det(Df_{x_j})$  es positivo y como  $-1$  si es negativo.

**Definición 2.3.3.** *Definimos el grado de  $f : M^n \rightarrow N^n$  en un valor regular  $y \in N$ ,  $M, N$  compactas y orientadas y  $N$  conexa, como*

$$\text{deg}(f, y) = \sum_{x \in f^{-1}(y)} \text{sign}(Df_x).$$

Como para el grado módulo 2, teniendo en cuenta la proposición 2.3.1, se prueba que si  $g : M \rightarrow N$  es diferenciablemente homotópica a  $f$  y  $y \in N$  es un valor regular común, entonces  $\text{deg}(f, y) = \text{deg}(g, y)$ . Por el Lema de Homogeneidad 2.1.8, si  $y, z \in N$  son ambos valores regulares de  $f : M \rightarrow N$ , teniendo en cuenta que  $N$  es conexa, existe un difeomorfismo  $h : N \rightarrow N$  difeotópico a la identidad  $\text{id} : N \rightarrow N$  tal que  $h(y) = z$ . Como  $h$  es difeotópico a la identidad entonces  $\text{sign}(D(h \circ f)_x) = \text{sign}(Df_x)$ . En efecto, si así no fuera, si  $H : N \times [0, 1] \rightarrow N$  es la difeotopía tal que  $H(y, 0) = \text{id}(y) = y$  y  $H(y, 1) = h(y) = z$ , tendríamos que la derivada parcial respecto a  $x \in M$ , cambiaría de signo, por lo que para cierto  $t_0$  se anularía, contradiciendo que  $H(\cdot, t_0) : N \rightarrow N$  es un difeomorfismo. Esto implica que vale también el resultado que asegura que

$$\text{deg}(f, y) = \text{deg}(f, z).$$

Sean entonces  $M$  y  $N$  variedades diferenciables compactas orientables (y orientadas) de dimensión  $n$ , y  $N$  una variedad conexa.

**Definición 2.3.4.** *Definimos el grado de una aplicación diferenciable  $f : M \rightarrow N$  como el grado en un valor regular cualquiera de  $f$ :*

$$\text{deg}(f) = \text{deg}(f, y), \quad y \in N \text{ valor regular de } f.$$

Finalmente, si  $f : M \rightarrow N$  es continua, existe una  $g : M \rightarrow N$  diferenciable homotópica a  $f$  y definimos su grado como el grado de  $g$ . Una vez más, el lema 2.1.5 implica que la definición no depende de la  $g$  elegida.

### 2.3.3. Aplicaciones de la teoría del grado de Brouwer.

**Teorema 2.3.1.** *Teorema Fundamental del Algebra.*

*Sea  $P : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  un polinomio de grado  $n > 0$  con coeficientes complejos. Entonces  $P$  tiene una raíz compleja, o sea, existe  $z_0 \in \mathbb{C}$  tal que  $P(z_0) = 0$ .*

*Demostración.* Sea el polinomio  $P(z)$

$$P(z) = a_0z^n + a_1z^{n-1} + \cdots + a_{n-1}z + a_n; \quad a_0 \neq 0.$$

Podemos identificar el cuerpo complejo  $\mathcal{C}$  con  $\mathbb{R}^2$ . Pero no podemos directamente aplicar los resultados sobre grado pues  $\mathbb{R}^2$  no es una variedad compacta. Para superar esta dificultad compactificamos  $\mathbb{R}^2$  agregándole el punto al infinito  $\infty$  (compactificación de Alexandroff). La topología de  $\Sigma = \mathbb{R}^2 \cup \{\infty\}$  la damos por medio de una base de entornos como sigue: un entorno de centro  $z \in \mathcal{C}$  y radio  $\epsilon > 0$  es el entorno usual en  $\mathcal{C}$ ;  $\{w \in \mathcal{C} / |w - z| < \epsilon\}$ . Un entorno de centro  $\infty$  y radio  $K > 0$  es el conjunto  $\infty \cup \{w \in \mathcal{C} / |w| > K\}$ . Via la proyección estereográfica no es difícil probar que  $\Sigma \cong S^2$ .

Definimos  $\hat{P} : \Sigma \rightarrow \Sigma$  por  $\hat{P}(z) = P(z)$  para todo  $z \in \mathcal{C}$  y  $\hat{P}(\infty) = \infty$ . Con esta definición  $\hat{P}$  queda continuo (e inclusive diferenciable) en todo  $\Sigma$ . La única duda para la continuidad sería en  $\infty$ , pero el hecho de que  $a_0 \neq 0$  implica que dado  $K > 0$  existe  $M > 0$  tal que si  $|z| > M$  entonces  $|\hat{P}(z)| = |P(z)| > K$  pues

$$\begin{aligned} |P(z)| &= |a_0z^n + a_1z^{n-1} + \cdots + a_{n-1}z + a_n| = \\ &= |a_0||z|^n |1 + (a_1/a_0)z^{-1} + \cdots + (a_{n-1}/a_0)z^{-n+1} + (a_n/a_0)z^{-n}| \geq \\ &\geq |a_0||z|^n (1 - (|a_1/a_0||z|^{-1} + \cdots + |a_{n-1}/a_0||z|^{-n+1} + |a_n/a_0||z|^{-n})) > \end{aligned}$$

(si  $M > 0$  es suficientemente grande queda)

$$> |a_0||z|^n(1 - 1/2) > |a_0|M^n/2 > K \text{ si } M > \sqrt[n]{\frac{2K}{|a_0|}}.$$

Sea el polinomio  $\hat{Q}$  definido por  $\hat{Q}(z) = a_0z^n$  si  $z \in \mathcal{C}$  y  $\hat{Q}(\infty) = \infty$ . Definamos una homotopía  $H : \Sigma \times [0, 1] \rightarrow \Sigma$  entre  $\hat{P}$  y  $\hat{Q}$  por

$$H(z, t) = a_0z^n + t(a_1z^{n-1} + \cdots + a_{n-1}z + a_n) \text{ si } z \in \mathcal{C},$$

y por  $H(\infty, t) = \infty$ . Como en la prueba para  $\hat{P}$  resulta que  $H$  es continua como función de  $z$  y  $t$  y que  $\hat{Q}$  es continuo como función de  $z$ . Se deduce que el grado de  $\hat{P}$  es el mismo que el de  $\hat{Q}$ . Pero el grado de  $\hat{Q}$  es  $n$ , basta observar que, por ejemplo  $a_0$  es un valor regular de  $\hat{Q}$  y que

$$\hat{Q}(z) = a_0 \iff z^n = 1$$

tiene exactamente  $n$  raíces. Pero si el grado de Brouwer de  $\hat{P}$  es  $n > 0 =$  grado como polinomio de  $P$ , entonces  $\hat{P}$  es sobreyectiva. Se deduce que  $P$  es sobre  $\mathcal{C}$ . En particular existe  $z_0 \in \mathcal{C}$  tal que  $P(z_0) = 0$ .  $\square$

Recordamos que si  $M$  es una variedad diferenciable de dimensión  $n$ , el fibrado tangente  $TM$  de  $M$  es una variedad diferenciable de dimensión  $2n$ . Una sección continua  $\sigma : M \rightarrow TM$  (de clase  $C^k$ ) en  $TM$  se llama un campo de vectores continuo (resp.: de clase  $C^k$ ) en  $M$ .

Sea  $M \subset \mathbb{R}^k$  una variedad encajada en  $\mathbb{R}^k$ . Podemos ver el espacio tangente  $T_x M$  a  $M$  en el punto  $x \in M$  como un subespacio vectorial de  $\mathbb{R}^k$ . En ese caso un campo de vectores  $X : M \rightarrow TM$  tangentes a  $M$  asocia a cada  $x \in M$  un vector de  $\mathbb{R}^k$  tangente a  $M$  en  $x$ .

$$x \in M \mapsto (x, X(x)) \in x + T_x M \subset \mathbb{R}^k.$$

En el caso particular de la esfera  $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ , la condición de que  $v \in T_x M$  es que  $\langle x, v \rangle = 0$  donde  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  es el producto interno usual de  $\mathbb{R}^n$ .

**Teorema 2.3.2.** *La esfera  $S^n$  admite un campo de vectores continuo tangente a  $S^n$  que no se anula en ningún punto de  $S^n$  si y solo si  $n$  es impar.*

*Demostración.* Si  $n$  es impar entonces  $n + 1 = 2k$  es par. Un elemento de  $S^n$  es un vector de  $\mathbb{R}^{n+1} = \mathbb{R}^{2k}$ ;  $x = (x_1, x_2, \dots, x_{2k-1}, x_{2k})$  tal que  $x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{2k-1}^2 + x_{2k}^2 = 1$ . A cada  $x \in S^n$  asociamos el vector  $v(x) \in T_x S^n$  dado por  $v(x) = (x_2, -x_1, \dots, x_{2k}, -x_{2k-1})$ . Se cumple que  $v(x) \in T_x S^n$  pues  $\langle x, v(x) \rangle = 0$ . Es claro que  $v(x)$  varía continuamente con  $x$  y no se anula pues  $\|v(x)\| = \|x\| = 1$ .

Recíprocamente, supongamos ahora que existe en  $S^n$ ,  $v(x)$  un campo de vectores continuo que no se anula. Dividiendo entre la norma de  $v(x)$  que será un número positivo resulta que podemos suponer que  $v(x)$  es un campo de versores continuo,  $x \in S^n$ . Definimos ahora una homotopía  $H : S^n \times [0, 1] \rightarrow S^n$  por

$$H(x, t) = x \cos(\pi t) + v(x) \operatorname{sen}(\pi t).$$

Es claro que dado que  $\langle x, v(x) \rangle = 0$

$$\|H(x, t)\|^2 = \langle x \cos(\pi t) + v(x) \operatorname{sen}(\pi t), x \cos(\pi t) + v(x) \operatorname{sen}(\pi t) \rangle = 1$$

de donde  $H$  está bien definida. Además es continua y para  $t = 0$   $H(x, 0) = id : S^n \rightarrow S^n$  y para  $t = 1$ ,  $H(x, 1) = -x = a(x)$  la aplicación antípoda. Pero  $\deg(id) = 1$  y  $\deg(a) = (-1)^{n+1}$ . Luego  $id \simeq a$  implica  $(-1)^{n+1} = 1$  o lo que es lo mismo,  $n$  impar.  $\square$

El resultado anterior se conoce folclóricamente como que "no se puede peinar la esfera" (se refiere a  $S^2$ ). En el sentido de que identificando un cabello con un vector tangente a  $S^2$ , no podemos darle en todo  $S^2$  una dirección (campo de vectores) que varíe continuamente sin que se anule en algún lado. En alguna parte deberá formarse

un "remolino de cabello" lo que representa que no podemos darles una dirección continua en ese punto. Es claro que localmente podemos peinarlos de vuelta para "corregir" el defecto del remolino. Pero este se va a formar en otro sitio. Hablando más formalmente, siempre podemos, usando un mapa coordenado local  $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ , identificar  $U \subset S^n$  con  $\mathbb{R}^n$ . El espacio euclideo  $\mathbb{R}^n$  "puede peinarse", alcanza con definir el campo vectorial constante

$$(\dot{x}_1(t), \dot{x}_2(t), \dots, \dot{x}_n(t)) = (1, 0, \dots, 0).$$

Luego llevamos por la parametrización inversa del mapa local el campo vectorial a  $S^n$ . Pero no podremos extenderlo a todo  $S^n$  en forma continua sin que se anule (si  $n$  es par). Se trata pues de un resultado global.

### Ejercicios:

- Definir en el toro  $\mathbf{T}^2$  campos vectoriales tangentes que no se anulen en ningún punto de  $\mathbf{T}^2$ . Definir pares de campos vectoriales tangentes  $(v(x), w(x))$ ,  $x \in \mathbf{T}^2$ , que varíen continuamente y que en cada punto sean linealmente independientes (y por tanto una base de  $T_x\mathbf{T}^2$ ).
- Un espacio topológico  $X$  se dice simplemente conexo si toda aplicación  $S^1 \xrightarrow{\phi} X$  es homotópica a una aplicación constante.  
Un espacio topológico  $X$  es contráctil si  $id : X \rightarrow X$  es homotópica a una constante  $cte : X \rightarrow X$ .
  - Probar que si  $X$  es contráctil entonces es simplemente conexo.
  - Probar que la esfera  $S^k$ ,  $k > 1$ , es simplemente conexa. [Pista: Probar que para toda curva  $\gamma : S^1 \rightarrow S^k$  diferenciable existe  $p \in S^k \setminus \gamma(S^1)$ . Hacer la proyección estereográfica desde  $p$ ].  
¿Es la esfera  $S^k$  un espacio contráctil?
- Sea  $a : S^k \rightarrow S^k$  la aplicación antipodal:  $a(x) = -x$ ,  $S^k = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} / \|x\| = 1\}$ . Probar que si  $k$  es impar entonces  $id \simeq a$ . [Pista: para  $k = 1$  considerar la familia de aplicaciones de  $S^1$  dadas por las matrices:

$$\begin{pmatrix} \cos(\pi t) & -\text{sen}(\pi t) \\ \text{sen}(\pi t) & \cos(\pi t) \end{pmatrix}; \quad t \in [0, 1].$$

#### 4. Teorema de Perron-Frobenius

Sea  $A$  una matriz  $n \times n$  con entradas no negativas. Entonces  $A$  tiene un valor propio no negativo con un vector propio no negativo

$$\vec{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n); \quad v_j \geq 0 \forall j = 1, \dots, n.$$

[Pista: Usar el Teorema del Punto Fijo de Brouwer. Si  $A$  es no singular definir

$$\varphi_A : S^{n-1} \rightarrow S^{n-1}; \varphi_A(x) = \frac{Ax}{\|Ax\|};$$

usar que si  $x \in S^{n-1}$  es no negativo entonces  $\varphi_A(x)$  también].

5. Hallar mapas continuos del toro sólido  $D^2 \times S^1$  en si mismo sin puntos fijos. ¿Donde falla la demostración del teorema del punto fijo de Brouwer?
6. Supongamos que  $f : M^n \rightarrow N^n$  continua,  $M$  compacta y  $N$  conexa, tiene grado módulo 2 no nulo.

- a) Mostrar que  $f$  es sobreyectiva.
- b) Mostrar que si  $N$  no es compacta entonces  $deg_2(f) = 0$ .
- c) Mostrar que si  $f : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$  es un polinomio con coeficientes complejos de grado impar, entonces tiene una raíz: existe  $z_0 \in \mathcal{C}$  tal que  $f(z_0) = 0$ . [Pista: compactificar  $\mathcal{C}$  agregándole el punto al infinito  $\infty$ ;  $\mathcal{C} \cup \{\infty\} = \Sigma$ . La topología de  $\Sigma$  está dada por la base de entornos  $\{w \in \mathcal{C} / |w-z| < \epsilon\}$  para  $\epsilon > 0$ ,  $z \in \mathcal{C}$  y para  $\infty$  por  $|w| > K > 0$ ,  $w \in \mathcal{C}$ . Con esta topología resulta que  $\Sigma \cong S^2$ . Para verlo usar la proyección estereográfica desde el polo norte  $N = (0, 0, 1)$ . Definir  $\hat{f} : \Sigma \rightarrow \Sigma$  como  $\hat{f}(z) = f(z)$  para  $z \in \mathcal{C}$  y  $\hat{f}(\infty) = \infty$ . Ver que  $\hat{f}$  es continua en la topología de  $\Sigma$ ].

7. Probar que existe un complejo  $z_0$  que es solución de

$$z^7 + \cos |z^2|(1 + 93z^4) = 0.$$

8. Una función racional en  $\mathcal{C}$  es un cociente de dos polinomios  $f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$ .
  - a) Extender  $f$  a  $\Sigma$ .
  - b) Probar que la extensión  $\hat{f} : \Sigma \rightarrow \Sigma$  de  $f : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$  o es constante o es sobreyectiva. [Pista: si  $f$  no es constante entonces existe  $z \in \mathcal{C}$  tal que  $f'(z) \neq 0$ . Mostrar (ecuaciones de Cauchy-Riemann) que  $\det(Df_z) \neq 0$ . Luego  $f$  es un difeomorfismo local en  $U(z)$ ].

9. Generalización del Teorema Fundamental del Algebra.

Sea  $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  una función propia (preimagen de un compacto es compacta) con  $U$  abierto no vacío. Supongamos que fuera de un compacto  $K \subset U$  se cumple que  $\det Df$  no es idénticamente nulo y no cambia de signo. Probar que  $f$  es sobreyectiva y que, en particular,  $f(z) = 0$  tiene solución.

10. Se considera la ecuación diferencial autónoma

$$\frac{dx}{dt} = \dot{x} = f(x), \quad f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \text{ continua.}$$

Un punto de equilibrio es una solución constante,  $x(t) = x_0 \in \mathbb{R}^n$  para todo  $t \in \mathbb{R}$ . Esto ocurre si y solo si  $f(x_0) = 0$ . Supongamos que existe  $R > 0$  tal que

$$\forall x \in \{\|x\| = R\}, \quad \forall k \neq 0, \quad f(x) \neq kx.$$

Probar que entonces existe  $x_0 \in \{\|x\| \leq R\}$  tal que es de equilibrio para la ecuación diferencial.

11. Sea  $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  una función continua y tal que  $f(x, t)$  es Lipschitziana en  $x \in \mathbb{R}^n$  y periódica en  $t \in \mathbb{R}$ :  $f(x, t + 1) = f(x, t)$  para todo  $(x, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ . Para cada  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  consideremos la ecuación diferencial ordinaria

$$\dot{x} = f(x, t); \quad x(0) = x_0;$$

y el mapa  $x(0) \xrightarrow{\varphi} x(1)$  de  $\mathbb{R}^n$  en  $\mathbb{R}^n$ .

- a) Probar que el mapa  $\varphi$  está bien definido (i.e.: existe y es única  $x(t)$  que puede extenderse hasta  $t = 1$ ).
  - b) Supongamos que existe  $D \subset \mathbb{R}^n$  homeomorfo a una bola tal que  $\varphi/D : D \rightarrow D$ . Mostrar que la ecuación diferencial tiene una solución periódica.
12. Teorema de Rothe.

Sea  $x \in B^n \subset \mathbb{R}^n$  y  $f : B^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  continua. Aquí  $B^n$  es la bola euclídeana cerrada de centro  $0 \in \mathbb{R}^n$  y radio 1. Supongamos que  $\|f(x)\| \leq 1$  si  $\|x\| = 1$  pero no supongamos que  $\|f(x)\| \leq 1$  si  $\|x\| < 1$ .

- a) Probar que existe un punto fijo de  $f$  en  $B^n$ . [Pista: Definir  $g(x) = x/\|x\|$  si  $\|x\| \geq 1$  y  $g(x) = x$  si  $\|x\| < 1$ . Estudiar  $g \circ f$ ].
  - b) Extender el teorema de Rothe a cualquier cuerpo convexo de  $\mathbb{R}^n$ .
13. Se considera un fluido estacionario (o sea: la velocidad  $v$  de cada partícula de fluido depende de la posición de la partícula pero no del tiempo;  $v = v(x, t) = v(x)$ ) que fluye continuamente circulando dentro de un toro. Probar que existe al menos una línea de corriente cerrada, o sea: existe  $x(t)$  periódica. Aquí  $x(t)$  representa la posición de la partícula del fluido que en  $t = 0$  ocupaba la posición  $x_0 = x(0)$ .

14. El Teorema del Punto Fijo de Brouwer es falso en dimensión infinita.

Sea  $l^2(\mathbb{R})$  el espacio de Hilbert de las sucesiones reales  $x = \{x_j\}_{j \in \mathbb{N}^+} = (x_1, x_2, x_3, \dots)$  tales que  $\sum_{j=1}^{\infty} x_j^2 < \infty$ . Definimos la norma de  $x$  justamente como  $\|x\| = \sum_{j=1}^{\infty} x_j^2$ . Para  $x$  en la bola unidad  $B = \{\|x\| \leq 1\}$  definimos el mapa

$$x \in B \xrightarrow{\varphi} y$$

por  $y_1 = (1 - \|x\|^2)^{1/2}$ ,  $y_2 = x_1$ ,  $y_3 = x_2$ ,  $y_4 = x_3$ , etc. Probar que  $\varphi : B \rightarrow B$ , que  $\varphi$  es continua respecto a la norma de  $l^2(\mathbb{R})$  y que  $\varphi$  no tiene puntos fijos<sup>3</sup>.

### 3. Índice de un campo de vectores Teorema de Poincaré-Hopf

Sea  $M = M^n$  una variedad encajada en  $\mathbb{R}^k$ . Un campo de vectores continuo (diferenciable)  $v = v(x)$  es una función continua (resp.: diferenciable)  $v : M \rightarrow \mathbb{R}^k$ , con dominio  $M$  que a cada  $x \in M$  asocia un vector  $v(x) \in T_x M$  del espacio tangente a  $M$  en el punto  $x$ . Supondremos salvo aviso en contrario que  $v$  es diferenciable. Si  $v(x)$  es un campo vectorial diferenciable definido en una variedad compacta  $M$ , llamamos flujo asociado a ese campo a una función  $\phi : M \times \mathbb{R} \rightarrow M$  que cumple

$$\frac{d\phi_x(t)}{dt} = v(\phi_x(t)).$$

Si  $M \subset \mathbb{R}^n$  es una variedad de dimensión  $n$ , un campo vectorial es simplemente una función vectorial  $v : M \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ . En este caso la expresión anterior del flujo es la solución de la ecuación diferencial  $\dot{x} = v(x)$  definida en un subconjunto de  $\mathbb{R}^n$ . Es conocido que la solución que pasa por  $x$  existe y es única, si  $v(x)$  es diferenciable, y está definida para  $t \in (\alpha_x, \omega_x)$  donde  $\alpha_x$  y  $\omega_x$  dependen de  $x$ . Más aun,  $\phi_x(t)$  en donde está definida depende diferenciablemente de  $x$  y de  $t$ .

Si  $v(z) = 0$  es fácil ver que la función constante  $\phi_z(t) = z$  satisface  $\frac{d\phi_z(t)}{dt} = v(\phi_z(t))$  y está definida para todo  $t \in \mathbb{R}$  ( $\alpha_z = -\infty$ ,  $\omega_z = +\infty$ ). Así que los puntos donde se anula el campo de vectores se asocian a las soluciones de equilibrio del flujo asociado al campo. Más aun, si la solución  $\phi_x(t) \in \mathbb{R}^n$  permanece acotada, entonces está definida para todo  $t \in \mathbb{R}$ , siendo las soluciones de equilibrio un caso particular.

Usando un mapa coordenado podemos representar localmente un campo vectorial

<sup>3</sup>La mera continuidad no alcanza para extender el teorema de Brouwer a dimensión infinita. Es necesario asumir hipótesis adicionales ( $f : B \rightarrow B$  debe ser un operador compacto). Esa extensión se conoce como el Teorema del Punto Fijo de Schauder.

en una variedad de dimensión  $n$  como un campo vectorial en  $\mathbb{R}^n$ . De ese modo la teoría local de existencia y unicidad de ecuaciones diferenciales se traslada al caso de variedades diferenciales. Se puede probar también que el flujo  $\phi_x(t)$  de un campo vectorial  $v(x)$  definido en una variedad compacta  $M$  resulta definido para todo  $t \in \mathbb{R}$ . Esto no es simple de probar.

Los campos de vectores son triviales excepto allí donde se anulan. En efecto, si consideramos en un abierto  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  la ecuación diferencial  $\dot{x} = v(x)$  y para  $p \in \Omega$   $v(p) \neq 0$ , consideremos el hiperplano  $H$  que pasa por  $p$  y es ortogonal a  $v(p)$ , en ecuaciones:  $H = \{x \in \mathbb{R}^n / \langle x - p, v(p) \rangle = 0\}$ .  $H$  tiene dimensión  $n - 1$ . Eligiendo  $n - 1$  vectores linealmente independientes  $w_1, w_2, \dots, w_{n-1}$ , ortogonales a  $v(p)$  podemos escribir los puntos  $x \in H$  como  $x = p + a_1 w_1 + \dots + a_{n-1} w_{n-1}$ . Sea  $\phi_x(t)$  la solución de la ecuación diferencial en tiempo  $t$  que para  $t = 0$  pasa por  $x$ . Como  $v(x)$  es diferenciable resulta que existe y es única  $\phi_x(t)$ . Derivando  $\phi_x(t)$  respecto a  $x$  para  $t = 0$  nos queda la derivada de la identidad  $id(x)$  que es ella misma. Respecto a  $t$  obtenemos  $v(x)$ , ya que  $\phi_x(t)$  es justamente la solución de la ecuación diferencial.

Consideremos un cubo  $n$  dimensional  $K \subset \Omega$  de lados paralelos a los ejes conteniendo a  $p$  en su centro. Por compacidad existe  $\delta > 0$  tal que la solución  $\phi(x, t)$  esta definida para todo  $t \in (-\delta, \delta)$ . Achicando  $K$  podemos suponer que todos sus lados tienen longitud menor que  $\delta$ . Consideremos la transformación

$$F : (-\delta, \delta) \times (H \cap K) \rightarrow \mathbb{R}^n \text{ dada por } F(t, a_1, \dots, a_{n-1}) = \phi_{p+a_1 w_1 + \dots + a_{n-1} w_{n-1}}(t).$$

Se cumple que la matriz jacobiana de esta transformación no se anula en  $p$ . Al derivar respecto a  $a_j$  va a darnos como columna a  $w_j$ . Derivando respecto a  $t$  nos da  $v(p)$ . Los  $w_j$  constituyen un sistema linealmente independiente y  $v(p)$  es ortogonal a ellos y no se anula. Entonces  $F$  es un difeomorfismo local en un entorno de  $p$ .  $F^{-1}$  lleva una solución de la ecuación diferencial definida en un abierto conteniendo a  $p \in \mathbb{R}^n$  sobre el segmento de recta paralelo al eje  $0x_1$  en un abierto conteniendo el origen de coordenadas de  $\mathbb{R}^n$ . Estas son justamente las solución de la ecuación diferencial  $\dot{x} = e_1$  en un entorno de  $0 \in \mathbb{R}^n$ . Escribiendo en coordenadas:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 1 \\ \dot{x}_2 = 0 \\ \vdots \\ \dot{x}_n = 0 \end{cases} \quad (3)$$

Así las soluciones locales de una ecuación diferencial son triviales en un entorno de un punto  $p$  en donde el campo vectorial  $v(x)$  no se anula.

Hemos probado el resultado conocido como el Teorema del Flujo Tubular: dada la

ecuación diferencial  $\dot{x} = f(x)$ ,  $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$  tal que  $f(x_0) \neq 0$ , existe un entorno  $U(x_0) \subset \Omega$  tal que en él la ecuación es equivalente al sistema dado por (3).

En cambio en donde se anula el campo este puede presentar cambios abruptos motivados justamente por no tener una dirección definida en el punto de anulación. Los puntos en donde se anula el campo vectorial serán llamados singularidades o ceros del campo. Así  $z$  es una singularidad de  $v(x)$  si  $v(z) = 0$ . Si existe un entorno de  $z$  en donde  $v$  no se anula salvo en  $z$ , diremos que la singularidad  $z$  es aislada. Lo dicho para  $\mathbb{R}^n$  se traslada a una variedad  $M^n$  cualquiera usando un mapa coordenado.

Usando el fibrado tangente  $TM$  podemos también definir un campo vectorial en una variedad como una función que a cada punto  $x$  de  $M$  asocia un elemento  $v$  de  $TM$  con la particularidad de que ese elemento está en  $T_xM$ . O sea, un campo vectorial es una función  $V : M \rightarrow TM$  tal que

$$x \xrightarrow{V} V(x) = (x, v(x)) \in TM, v(x) \in T_xM.$$

Sea  $U$  un abierto de  $\mathbb{R}^k$  y sea  $v : U \rightarrow \mathbb{R}^k$  un campo vectorial (en este caso  $T_xU = \mathbb{R}^k, \forall x \in U$ , así que un campo vectorial es simplemente una función que asocia a cada punto de  $U$  un vector de  $\mathbb{R}^k$ ). Supongamos que  $v(x) \neq 0$  en  $U$  excepto posiblemente en  $z \in U$ . En ese caso, dada una bola  $B(z, r)$  de radio  $r > 0$  centrada en  $z$  y contenida en  $U$ , el campo  $v(x) \neq 0$  para todo

$$x \in \partial B(z, r) = S(z, r) = \{x \in \mathbb{R}^k / \|x - z\| = r\}.$$

Está definida entonces la aplicación  $\hat{v}_r$  de  $S(z, r)$  en  $S^{r-1}$  dada por

$$\hat{v}_r(x) = \frac{v(x)}{\|v(x)\|} \forall x \in S(z, r).$$

**Definición 3.0.5.** *Definimos el índice de  $v$  respecto a  $z \in U$  como  $\deg(\hat{v}_r)$  y lo escribimos  $I(v, z)$ .*

$$I(v, z) = \deg(\hat{v}_r) = \deg\left(\frac{v(x)}{\|v(x)\|} \mid x \in S(z, r)\right).$$

La definición no depende de  $r > 0$  siempre que en  $B(z, r) \setminus \{z\}$  no se anule  $v$ . En efecto, si  $0 < r' < r$  entonces como  $v$  no se anula en la cáscara esférica  $\{x \in \mathbb{R}^k / r' \leq \|x - z\| \leq r\}$ , las funciones  $\hat{v}_r$  y  $\hat{v}_{r'}$  se extienden a toda la cáscara esférica. Definamos a partir de  $\hat{v}_r$  una nueva función  $V_1 : S^{n-1} \rightarrow S^{n-1}$  como  $V_1(x) = \hat{v}_r(rx)$ . Es claro que

$$V_1 = v_r \circ (\text{homotecia de razón positiva})$$

por lo que el grado de  $V_1 : S^{n-1} \rightarrow S^{n-1}$  coincide con el de  $\hat{v}_r : S(z, r) \rightarrow S^{n-1}$  desde que  $\det(\text{homotecia}) > 0$ . Del mismo modo definimos  $V_2(x) = \hat{v}_{r'}(r'x)$  y también aquí tendremos  $\deg(V_2) = \deg(\hat{v}_{r'})$ . Ahora observamos que  $V_1 \simeq V_2$  por la homotopía  $H : S^{n-1} \times [0, 1] \rightarrow S^{n-1}$  dada por

$$H(x, t) = \hat{v}_{(1-t)r'+tr}(((1-t)r' + tr)x),$$

donde

$$\hat{v}_{(1-t)r'+tr}(((1-t)r' + tr)x) = \frac{v(((1-t)r' + tr)x)}{\|v(((1-t)r' + tr)x)\|}, \quad x \in S^{n-1}$$

Se concluye que  $\deg(V_1) = \deg(V_2)$  lo que termina la demostración de que la definición de índice no depende de  $r$ .

Supongamos ahora que  $v$  no tiene ninguna singularidad en  $U$  (o sea, para todo  $x \in U$ ,  $v(x) \neq 0$ , en particular para  $z$ ). En ese caso  $I(v, z) = 0$ . En efecto, si  $v(z) \neq 0$  existe un entorno  $B(z, r)$  de  $z$  tal que para todo  $x \in B(z, r)$  la dirección de  $v(x)/\|v(x)\|$  difiere muy poco de la de  $v(z)/\|v(z)\|$ . Esto implica en particular que  $\hat{v}_r : S(z, r) \rightarrow S^{n-1}$  no es sobreyectiva. Luego  $\deg(\hat{v}_r) = 0$  o, lo que es lo mismo,  $I(v, z) = 0$ . Luego el índice del campo respecto a un punto que no sea una singularidad no da mayor información; esto lo podíamos haber previsto a partir de que el flujo asociado al campo en un entorno de  $z$  va a ser equivalente al dado por el sistema (3) por el Teorema del Flujo Tubular.

El recíproco es falso, puede el campo  $v$  anularse en  $z$  y ser  $I(v, z) = 0$ . De todos modos el resultado anterior nos muestra que si el índice de un campo nos va a dar alguna información debemos considerar solamente los ceros del campo.

Sea ahora  $f : M^n \rightarrow N^n$  un difeomorfismo,  $M, N \subset \mathbb{R}^k$ . Si tenemos definido un campo vectorial  $v$  en  $M$  podemos por medio de  $f$  definir un campo en  $N$  como sigue:

Sea  $y \in N$ , existe único  $x \in M$  tal que  $f(x) = y$ . Para  $x$  está definido el campo  $v(x) \in T_x M$ . El mapa tangente  $Df_x : T_x M \rightarrow T_y N$  lleva el vector  $v(x)$  en  $Df_x(v(x)) \in T_y N$ . Esto define un campo vectorial  $w$  en  $N$  dado por

$$w(y) = Df_{f^{-1}(y)}(v(f^{-1}(y))) \quad w = Df \circ v \circ f^{-1}.$$

El campo  $w : N \rightarrow \mathbb{R}^k$  se llama el pull-back de  $v : M \rightarrow \mathbb{R}^k$ .

En el caso particular que  $M = U$  es un abierto de  $\mathbb{R}^k$  y que tenemos  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^k$  un difeomorfismo obtenemos

**Lema 3.0.1.** *Sea  $v : U \rightarrow \mathbb{R}^k$  un campo vectorial y  $w : f(U) \rightarrow \mathbb{R}^k$  su pull-back,  $w = Df \circ v \circ f^{-1}$ . Si  $z \in U$  es un cero aislado de  $v$  entonces  $w(f(z))$  es un cero aislado de  $w$ . Más aun,  $I(v, z) = I(w, f(z))$ . O sea, el índice no cambia al hacer el pull-back.*

El lema 3.0.1 nos permite definir el índice de un campo vectorial  $w$  definido sobre una variedad  $M^n$  respecto a una singularidad aislada  $z$ . Sea  $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  un mapa coordenado local donde  $z \in U \subset M$  es la única singularidad en  $U$ . Definimos  $I(w, z) = I(D\varphi \circ w \circ \varphi^{-1})$ . Si ahora  $\psi : V \rightarrow \mathbb{R}^n$  es otro mapa coordenado local tal que  $z \in V$  es la única singularidad de  $w$  en  $V$ , entonces en  $W = U \cap V \ni z$

$$\psi \circ \varphi^{-1} : \varphi(W) \rightarrow \psi(W)$$

define un difeomorfismo. Si  $X = D\varphi \circ w \circ \varphi^{-1}$  e  $Y = D\psi \circ w \circ \psi^{-1}$ , entonces

$$Y = D(\psi \circ \varphi^{-1}) \circ X \circ (\varphi \circ \psi^{-1})$$

o sea,  $Y$  es el pullback de  $X$  y como  $\psi \circ \varphi^{-1}$  es un difeomorfismo tenemos  $I(X, \varphi(z)) = I(Y, \psi(z))$ .

Para la prueba del lema 3.0.1 usaremos el siguiente resultado.

**Lema 3.0.2.** *Todo difeomorfismo  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  que preserva la orientación es difeotópico a la  $id : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ .*

*Demostración.* Sea  $f(0) = z_0$ . Componiendo con una traslación  $T$  podemos enviar de vuelta  $z_0$  a 0,  $T \circ f(0) = 0$ .  $T(x) = x - z_0$ . La familia de traslaciones  $T_t$  dada por  $T_t(x) = x - tz_0$  es la identidad para  $t = 0$  y coincide con  $T$  para  $t = 1$ .  $T_t$  es una difeotopía entre  $f$  y  $T \circ f$ .

Supongamos entonces que  $f(0) = 0$ . Se cumple por definición

$$Df_0(x) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(tx) - f(0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(tx)}{t}.$$

Definimos la aplicación  $F : \mathbb{R}^n \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$  por

$$F(x, t) = \begin{cases} \frac{f(tx)}{t} & \text{si } t \neq 0, \\ Df_0(x) & \text{si } t = 0. \end{cases}$$

Si  $t \neq 0$  es claro que  $F(x, t)$  es un difeomorfismo al serlo  $f = f_1$ . Lo mismo pasa con  $Df_0$  que es una transformación lineal invertible cuyo determinante es positivo ya que  $f$  preserva la orientación de  $\mathbb{R}^n$ . Para ver que  $F : \mathbb{R}^n \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$  es diferenciable escribamos:  $f(x) - f(0) = \int_0^1 Df_{sx}(x) ds$ .<sup>4</sup>

Si  $f = (f_1, \dots, f_n)$  entonces

$$Df = \begin{pmatrix} \nabla f_1 \\ \nabla f_2 \\ \vdots \\ \nabla f_n \end{pmatrix}$$

---

<sup>4</sup>Para  $x \in \mathbb{R}^n$  fijo definamos  $\Phi(s) = f(sx)$ . Su derivada es (regla de la cadena)  $\frac{d\Phi}{ds} = Df_{sx}(x)$ . Integrando entre 0 y 1 se obtiene  $\Phi(1) - \Phi(0) = f(x) - f(0)$ .

De aquí que la integral  $\int_0^1 Df_{sx}(x)ds$  se escribe (teniendo en cuenta que  $x = (x_1, \dots, x_n)$ )

$$\int_0^1 Df_{sx}(x)ds = \sum_{i=1}^n g_i(x)x_i,$$

donde

$$g_i(x) = \int_0^1 (i\text{-ésima columna de } Df_{sx})ds.$$

Resulta entonces si  $t \neq 0$

$$F(x, t) = \frac{f(tx)}{t} = \sum_{i=1}^n g_i(tx)x_i$$

de donde es claro que  $F$  es  $C^\infty$  si  $f$  lo es. Pero además

$$\lim_{t \rightarrow 0} g_i(tx) = \int_0^1 (i\text{-ésima columna de } Df_0)ds = i\text{-ésima columna de } Df_0.$$

Probamos entonces que  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  es difeotópico a  $Df_0 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ .

Para terminar solo resta ver que si  $T$  es una transformación lineal invertible que preserva la orientación del espacio entonces  $T$  y  $id$  son difeotópicas. Lo que sigue es Algebra Lineal. Recordemos que dada  $T$  invertible podemos escribirla (descomposición polar) como el producto de una transformación ortogonal  $V$  por una autoadjunta definida positiva  $P$ :  $T = VP$ . Si  $P = U^* \text{diag}(\mu_1, \dots, \mu_n)U$  entonces está definida  $B = \log(P) = U^* \text{diag}(\log(\mu_1), \dots, \log(\mu_n))U$  el logaritmo real de  $P$  pues  $\log(\mu_j)$  es un número real al ser  $\mu_j > 0$ . Se cumple  $\exp(B) = P$ .

Como  $V$  es unitaria y preserva orientación pues lo hace  $T$ , existe una difeotopía  $V(t)$  que lleva  $id$  en  $V$ . Para verlo razonar por inducción en la dimensión  $n$ . Para  $n = 2$  una base ortonormal positivamente orientada (la dada por las columnas de  $V$ ) se lleva a la base canónica de  $\mathbb{R}^2$ ,  $(1, 0), (0, 1)$ , por un giro  $R_\theta$ . La difeotopía está dada en este caso por  $V(t) = R_{t(-\theta)}$ ,  $t \in [0, 1]$ , para  $t = 0$  es la identidad, para  $t = 1$  coincide con  $V$ . En el caso general  $n > 2$ , consideramos una transformación ortogonal positiva (por ejemplo el producto de dos simetrías respecto a hiperplanos convenientes) que lleve el vector canónico  $e_n$  en el último vector columna  $v_n$  de  $V$ . Esa transformación, al ser ortogonal, llevará  $e_n^\perp$  en  $v_n^\perp$ . El problema se reduce entonces de dimensión, ya que  $e_n^\perp = v_n^\perp \cong \mathbb{R}^{n-1}$ .

La difeotopía buscada entre  $T$  y la  $id$  se escribe entonces como  $T(t) = \exp(Bt)V(t)$ . □

He aquí una prueba de la descomposición polar. Si  $T^*$  representa la adjunta de  $T$  y  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  es el producto interno usual de  $\mathbb{R}^n$  entonces  $T^*T$  es autoadjunta

pues  $(T^*T)^* = T^*(T^*)^* = T^*T$ . Además  $\langle T^*T(x), x \rangle = \langle T(x), T(x) \rangle \geq 0$ . Y como  $T$  es invertible resulta  $\langle T(x), T(x) \rangle > 0$  si  $x \neq 0$ . Luego  $T^*T$  es definida positiva y por el teorema espectral se diagonaliza en una base ortonormal teniendo todos sus valores propios  $\lambda_j$ ,  $j = 1, \dots, n$  positivos. Queda entonces  $T^*T = U^*DU$  con  $U$  ortogonal y  $D$  diagonal. Existe entonces una única raíz cuadrada positiva de  $D$  (y por lo tanto de  $T^*T$ ). Si  $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  la raíz cuadrada de  $D$  es  $\hat{P} = \text{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n})$ . Si  $P = U^*\hat{P}U$  tenemos que

$$P^2 = U^*\hat{P}U U^*\hat{P}U = U^*\hat{P}\hat{P}U = U^*DU = T^*T.$$

Sea  $V = TP^{-1}$  o lo que es lo mismo  $T = VP$ . La transformación  $V$  es ortogonal pues

$$\begin{aligned} V^*V &= (TP^{-1})^*TP^{-1} = (P^{-1})^*T^*TP^{-1} = \\ &= (P^*)^{-1}T^*TP^{-1} = P^{-1}T^*TP^{-1} = P^{-1}P^2P^{-1} = Id. \end{aligned}$$

Probemos ahora el lema 3.0.1.

*Demostración.* (Del lema 3.0.1)

Sea entonces  $v : U \rightarrow \mathbb{R}^k$  un campo vectorial y  $w : f(U) \rightarrow \mathbb{R}^k$  su pull-back,  $w = Df \circ v \circ f^{-1}$  como en la hipótesis del lema, donde  $U$  y  $f(U)$  son abiertos de  $\mathbb{R}^k$  y sean  $I(v, z)$  e  $I(w, f(z))$  los respectivos índices. Podemos suponer que  $U \ni 0 = z$  y que  $f(0) = 0 \in f(U)$ . En efecto, basta componer con traslaciones convenientes de  $\mathbb{R}^k$  y es fácil ver que el índice de  $v(x)$  en el cero  $z$  es el mismo que el de  $0$  en  $v'(x) = v(x + z)$ . Análogamente, el índice de  $w(x)$  en  $f(z) = f(0)$  es el mismo que el de  $w'(x) = w(x + f(0))$ .

Más aun, podemos asumir que  $U$  es una bola abierta centrada en  $0$ . Basta reducir el dominio de definición de  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^k$ . Si ahora  $f$  preserva la orientación, la difeotopía dada por el lema 3.0.2 nos da una familia  $f_t : U \rightarrow \mathbb{R}^k$ ,  $t \in [0, 1]$ , tal que  $f_0 = id$ ,  $f_1 = f$  y  $f_t(0) = 0 \forall t \in [0, 1]$ . Sea  $v_t = Df_t \circ v \circ f_t^{-1}$  el campo vectorial definido en  $f_t(U)$  por el pull-back de  $v$ . Cada campo tiene en  $0 \in \mathbb{R}^k$  una singularidad aislada. Como  $f_t(0) = 0$ , por compacidad existe  $\delta_1 > 0$  tal que para todo  $x \in B(0, \delta_1)$  se cumple que  $x \in f_t(U)$  para todo  $t \in [0, 1]$  (las imágenes de  $U$  por  $f_t$  contienen todas un mismo entorno). Para ver esto consideremos una bola  $B(0, R)$ ,  $R > 0$  tal que su clausura esté contenida en  $U$ . Para cada  $t \in [0, 1]$  consideramos la distancia  $r_t > 0$  de  $0$  a  $\partial f_t(B(0, R))$ . La compacidad de  $[0, 1]$  y la continuidad de  $f_t$  respecto a las variables  $(x, t)$  garantiza que existe  $\delta_1 > 0$  tal que  $r_t \geq r$ ,  $\forall t \in [0, 1]$ . No es difícil de ver, dado que el borde de  $\partial f_t(B(0, R))$  separa  $\mathbb{R}^k$  (Teorema de Jordan-Brouwer), que  $B(0, \delta_1) \subset \cap_{t \in [0, 1]} f_t(B(0, R))$ .

Existe  $\delta_2$ ,  $0 < \delta_2 \leq \delta_1$  tal que para todo  $t$ ,  $v_t$  solo se anula en  $0$  en  $B(0, \delta_2)$  (en realidad podíamos haber elegido de antemano  $R > 0$  tal que en  $B(0, R)$   $v(x)$  ya no

tuviera ninguna singularidad diferente de  $0 \in \mathbb{R}^k$ ). Podemos entonces definir para un  $\delta > 0$ ,  $\delta < \delta_2$ , la función  $H : S(0, \delta) \times [0, 1] \rightarrow S^{k-1}$  por

$$H(x, t) = \frac{v_t(x)}{\|v_t(x)\|}, \quad x \in S(0, \delta), \quad t \in [0, 1].$$

$H$  es una homotopía lo que implica que  $I(v, 0) = I(v_t, 0)$ . En particular para  $t = 1$   $v_t = w$ .

Si ahora  $f$  invierte la orientación de  $\mathbb{R}^k$ , escribimos  $f = \rho \circ g$ , donde  $\rho$  es una reflexión respecto a un hiperplano. Por ejemplo  $\rho(x_1, x_2, \dots, x_k) = (-x_1, x_2, \dots, x_k)$ . Entonces  $g = \rho \circ f$  preserva la orientación y por el lema 3.0.2 existe una familia  $g_t$ ,  $t \in [0, 1]$ , con  $g_0 = id$  y  $g_1 = g$  (asumimos como antes lo hicimos que  $f(0) = 0$  y que  $0$  es la singularidad de  $v$  en  $U$ ). Definamos  $f_t = \rho \circ g_t$  y definamos  $v_t$  como lo hicimos antes. Resulta por lo ya probado para el caso en que  $f$  preserva orientación aplicado a  $g$ , que  $I(v_t, 0) = I(v_0, 0) = I(D\rho \circ v \circ \rho^{-1}, 0)$ . Como  $\rho$  es una isometría lineal involutiva queda  $I(\rho \circ v \circ \rho, 0)$ . La prueba culminará entonces probando que  $I(v, 0) = I(\rho \circ v \circ \rho, 0)$ . Pero

$$I(\rho \circ v \circ \rho, 0) = \deg\left(\frac{\rho \circ v \circ \rho}{\|\rho \circ v \circ \rho\|}\right)$$

que es claro que coincide con el grado de  $\hat{v} = \frac{v}{\|v\|}$ . □

Nos dirigimos a probar el siguiente resultado:

Sea  $M \subset \mathbb{R}^k$  una variedad diferenciable compacta de dimension  $m$  y  $w$  un campo vectorial diferenciable con ceros aislados. Entonces la suma de los índices  $\sum_{j=1}^h I(w, z_j)$  de los ceros  $\{z_1, \dots, z_h\}$  del campo  $w$  en  $M$  es igual a la característica de Euler  $\chi(M)$  de la variedad  $M$ .

$$\sum_{j=1}^h I(w, z_j) = \chi(M) = \sum_{i=0}^m \text{rango}(H_i(M)).$$

Aquí  $H_i(M)$  es el  $i$ -ésimo grupo de homología de  $M$ .

No suponemos que el lector conozca la teoría de Homología, así que nos contentaremos, por ahora, con decir que la suma **no** depende del campo vectorial, sino solo de la topología de la variedad  $M$ .

Para superficies compactas orientables la característica de Euler se puede calcular fácilmente.

Supongamos conocido que las superficies compactas orientables se clasifican según el número de asas o agujeros, la esfera  $S^2$  no tiene ningún agujero y su género es  $g = 0$ , el toro  $T^2$  tiene uno su género es  $g = 1$ , el bitoro tiene dos agujeros y su género es  $g = 2$ , etc. Entonces la característica de Euler de una superficie compacta

conexa y orientable  $S$  se calcula como  $\chi(S) = 2(1 - g)$ . Para superficies no orientables la característica de Euler se calcula con  $\chi(S) = 1 - g$ . Incidentalmente, otra manera de ver el género  $g$  de una superficie  $S$  es como el mayor número de curvas de Jordan (curvas cerradas simples) que pueden tomarse sobre  $S$  **sin** desconectar  $S$ . En la esfera  $S^2$  no puedo tomar ninguna (Teorema de la curva de Jordan), en el toro  $T^2$  puedo tomar una sola, en el bitoro puedo tomar dos, etc. (ver figura).

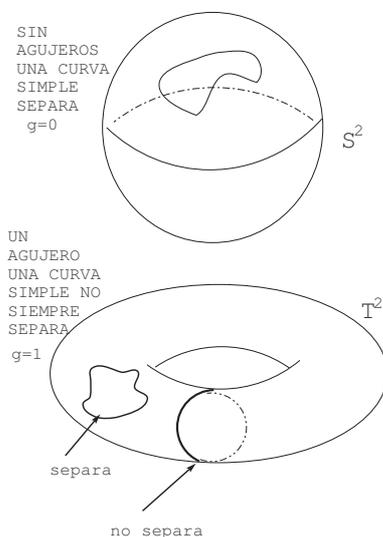
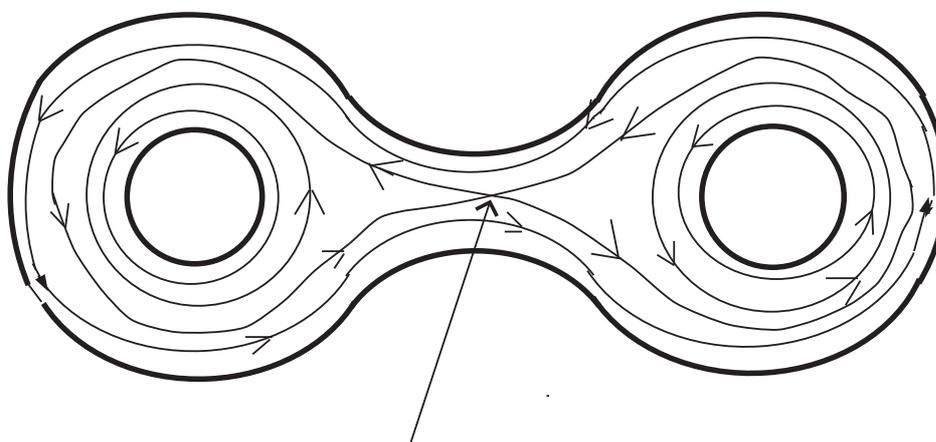


Figura 2: Esfera  $g = 0$  y toro  $g = 1$

Mostremos en un dibujo cómo en superficies orientables  $S$  de género mayor que 1 se puede construir un campo vectorial que tenga como suma de índices de sus singularidades la característica de Euler de dicha superficie  $\chi(S)$ . Tomemos como ejemplo el bitoro. Imaginemos que es de goma. Cortándolo longitudinalmente y "planchando" los dos pedazos obtenidos obtenemos dos superficies planas como en la figura.

En cada una colocamos un campo vectorial  $v(x)$  que genera un flujo  $\varphi$  solución de la ecuación diferencial  $\dot{x} = v(x)$ . La única singularidad se genera en la cruz de la figura ocho que separa los dos tipos de curvas solución: aquellas que dan vueltas



singularidad  
aislada de  
índice  $-1$

Figura 3: campo vectorial sobre "medio" bitoro

alrededor de los dos agujeros  $A_1$  y  $A_2$  y aquellas que dan vueltas alrededor de uno solo. El índice de la singularidad es  $-1$ , ya que localmente podemos construir el campo de modo que puede ser llevado por el pullback asociado a un difeomorfismo que transforme un entorno conveniente de la singularidad en el disco de centro el origen de  $\mathbb{R}^2$  y radio 1, con el campo lineal dado por

$$\begin{cases} \dot{x} = -x \\ \dot{y} = y \end{cases}$$

El índice de la singularidad es entonces  $-1$ . Dos copias del medio bitoro pegadas de modo de reconstruir, el bitoro, cada una con un campo de ese tipo darán lugar a un campo en el bitoro que tendrá entonces dos singularidades, y solo dos, cada una con índice  $-1$ . La suma de los índices será  $-2$  que coincide con la característica de Euler del bitoro  $B$ ,  $\chi(B) = 2(1 - g) = 2(1 - 2) = -2$ .

El mismo procedimiento permite construir campos en el tritoro, etc. Para el caso de la esfera  $S^2$  y del toro  $T^2$  se propone en los ejercicios hallar campos, en el primer

caso con singularidades aisladas cuya suma dé 2, y en el segundo sin singularidades. Lo anterior nos da una comprobación, aceptando el hecho de que la característica de Euler es la que dijimos para el caso de superficies, de que existen campos vectoriales en esas superficies que tienen ceros aislados y tales que la suma de los índices de esos ceros es la característica de Euler. Si probamos que la suma de esos índices no depende del campo  $v$  particular, la demostración (al menos para superficies) estará completa.

Sea  $X \subset \mathbb{R}^m$  una variedad diferenciable compacta y conexa de dimensión  $m$  con borde. Dado que el borde  $M = \partial X$ , siendo una variedad de dimensión  $m - 1$  en  $\mathbb{R}^m$ , separa a  $\mathbb{R}^m$ , tiene sentido hablar de normal exteriora  $M$ : localmente, el teorema del entorno tubular asegura que un segmento centrado en  $x \in M$  y de dirección normal a  $T_x M$  en  $\mathbb{R}^m$  no corta a  $M$  nada más que en  $x$  mismo. De ese segmento una mitad quedará en el interior y la otra en el exterior. Elegimos la normal  $g(x)$  de dirección y sentido de modo que la parametrización del semi-segmento que está en el exterior sea positiva.

El mapa de Gauss asocia a cada  $x \in \partial X$  ese versor normal exterior  $g(x)$ ;  $g : \partial X \rightarrow S^{m-1}$ . El mapa tangente  $Dg_x : T_x(\partial X) \rightarrow T_{g(x)}S^{m-1}$ , puede verse como un mapa de  $T_x(\partial X)$  en sí mismo. En efecto,  $T_x(\partial X)$  es ortogonal a  $g(x)$  porque justamente  $g(x)$  es la normal a  $T_x(\partial X)$ . Por otro lado, el espacio tangente  $T_{g(x)}S^{m-1}$  es normal a  $g(x) \in S^{m-1}$ . En efecto, si  $y \in S^{m-1}$  y  $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow S^{m-1}$  es un arco de curva tal que  $\gamma(0) = y$  y  $\dot{\gamma}(0) = v \in T_y S^{m-1}$ , entonces resulta  $\langle \gamma(t), \dot{\gamma}(t) \rangle = 0$  y derivando respecto a  $t$  en  $t = 0$  queda  $2 \langle \gamma(0), \dot{\gamma}(0) \rangle = 0$  o sea  $\langle y, v \rangle = 0$  de donde  $y \in S^{m-1}$  es normal a su espacio tangente  $T_y S^{m-1}$ .

El estudio del mapa de Gauss da información sobre la "curvatura" de  $M = \partial X$ . Por ejemplo, si  $g$  es constante en un entorno,  $\partial X$  va a ser localmente (en ese entorno) un hiperplano. Una gran variación de  $g$  en cambio implica que la variedad "se curva" mucho. Estas consideraciones intuitivas pueden formalizarse. Como siempre, es más fácil estudiar las aproximaciones lineales para medir la variación de una función, en este caso  $Dg$ . El determinante de la transformación lineal  $Dg$  se llama la curvatura de Gauss de  $M$ .

Dado un campo vectorial  $v(x)$  en  $X$ , decimos que apunta hacia afuera en  $M = \partial X$  si  $\langle v(x), g(x) \rangle > 0$  para todo  $x \in M$ . En particular si  $v$  apunta hacia afuera en  $\partial X$  entonces no se anula en  $\partial X$ .

**Lema 3.0.3.** *Sea  $X \subset \mathbb{R}^m$  una variedad diferenciable compacta y conexa de dimensión  $m$  con borde. Si  $v : X \rightarrow \mathbb{R}^m$  es un campo vectorial diferenciable con ceros aislados y  $v$  apunta hacia afuera en  $\partial X$ , entonces la suma de los índices de las singularidades del campo es una constante que depende solo de  $X$  y coincide con el grado del mapa de Gauss  $g : \partial X \rightarrow S^{m-1}$ .*

*Demostración.* La compacidad de  $X$  implica que el número de singularidades es finito al ser todas aisladas, sean éstas  $\{z_1, z_2, \dots, z_h\}$ . Como el campo  $v$  apunta hacia afuera en  $\partial X$  todas las singularidades están en el interior de  $X$ ,  $\text{int}(X)$ . Para cada  $z_i$  consideremos una bola abierta de centro  $z_i$  y radio  $r_i > 0$  tal que para cada  $i = 1, \dots, h$   $\overline{B(z_i, r_i)} \subset \text{int}(X)$ ,  $\overline{B(z_i, r_i)} \cap \overline{B(z_j, r_j)} = \emptyset$  si  $i \neq j$ , y tal que la única singularidad de  $v$  en  $\overline{B(z_i, r_i)}$  sea el punto  $z_i$ . Definiendo

$$X' = X \setminus (B(z_1, r_1) \cup B(z_2, r_2) \cup \dots \cup B(z_h, r_h))$$

obtenemos que  $X'$  es una variedad diferenciable de dimensión  $m$ , compacta con borde

$$\partial X' = \partial X \cup S(z_1, r_1) \cup S(z_2, r_2) \cup \dots \cup S(z_h, r_h)$$

tal que el campo vectorial  $v$  no se anula en  $X'$ . Aquí hemos escrito  $\partial B(z_i, r_i) = S(z_i, r_i)$ , la esfera de centro  $z_i$  y radio  $r_i$ . Entonces  $\hat{v}(x) = \frac{v(x)}{\|v(x)\|}$  es un campo vectorial que de  $\partial X'$  puede extenderse a todo  $X'$ . Se concluye que  $\text{deg}(\hat{v}) = 0$  donde  $\hat{v} : \partial X' \rightarrow S^{m-1}$  con la orientación borde de  $\partial X'$ . Para cada  $x \in \partial X$  elegimos entonces una base  $\{u_2, \dots, u_m\}$  de  $T_x M = T_x \partial X$  tal que  $\{g(x), u_2, \dots, u_m\}$  tenga la orientación positiva de  $\mathbb{R}^m$ . Análogamente, la normal  $n(x)$  exterior a  $X'$  en los puntos  $x \in S(z_j, r_j)$  apunta hacia el centro de  $B(z_j, r_j)$ . y completamos la base de  $\mathbb{R}^m$  tal que si  $\{v_2, \dots, v_m\}$  es una base de  $T_x S(z_j, r_j)$  entonces  $\{n(x), v_2, \dots, v_m\}$  tiene la orientación positiva de  $\mathbb{R}^m$ . Por ser  $X$  conexa resulta  $X'$  conexa (¡demostrarlo!) y si  $x \in S(z_j, r_j)$  e  $y \in \partial X$ , existe un camino diferenciable  $\gamma : [0, L] \rightarrow X'$  parametrizado por la longitud de arco, que une  $x = \gamma(0)$  con  $y = \gamma(1)$  en  $X'$  tal que el versor tangente  $\vec{t}(s)$  es normal a  $\partial X$  para  $t = 1$  y a  $S(z_j, r_j)$  para  $t = 0$ . Orientando  $\gamma$  de modo que el versor  $\vec{t}(s)$  apunte hacia afuera en  $\gamma(1) = y$  (coincida con  $g(y)$ ) vemos que es posible trasladar la base  $\{g(x), u_2, \dots, u_m\}$  a lo largo de  $\gamma$  de modo de obtener una base positiva en  $s = 0$  (comparar con el lema 2.1.3). Pero esa base tendrá como primer vector a  $-n(x) = \vec{t}(0)$ . En consecuencia la orientación de  $\{v_2, \dots, v_m\}$  es la opuesta de la orientación de la base trasladada a lo largo de  $\gamma$ . En consecuencia

$$\text{deg}(\hat{v}) = 0 = - \sum_{j=1}^h I(v, z_j) + \text{deg}(\hat{v}/M)$$

debido a que  $\text{deg}(\hat{v})/S(z_j, r_j) = -I(v, z_j)$ , el signo de menos debido justamente a que  $\{v_2, \dots, v_m\}$  tiene la orientación contraria a la dada al definir índice (en ese caso la normal a la esfera apuntaba hacia fuera de ésta).

Para completar hay que ver que en  $\partial X = M$  tenemos que  $\text{deg}(\hat{v}) = \text{deg}(g)$ . Para ello definimos la homotopía  $H : \partial X \times [0, 1] \rightarrow S^{m-1}$  entre  $\hat{v}$  y  $g$  por:

$$H(x, t) = \frac{g(x) \cos(\pi t/2) + \hat{v}(x) \text{sen}(\pi t/2)}{\|g(x) \cos(\pi t/2) + \hat{v}(x) \text{sen}(\pi t/2)\|}, \quad x \in \partial X, t \in [0, 1].$$

Dado que  $\langle \hat{v}(x), g(x) \rangle > 0$  la homotopía está bien definida (¡comprobarlo!).  $\square$

**Definición 3.0.6.** Sea  $v : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  un campo vectorial con una singularidad  $z \in U$ . Decimos que la singularidad  $z$  es no degenerada (o simple) y que el campo  $v$  es no degenerado en  $z$  si la transformación lineal  $Dv_z$  es no singular.

Una consecuencia inmediata de la definición es que si  $z$  es una singularidad no degenerada entonces es aislada. En efecto: si  $Dv_z : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  es no singular entonces es un isomorfismo lineal, de donde por el Teorema de la Función Inversa  $v$  es un difeomorfismo entre un abierto  $V(z) \subset U$  de  $\mathbb{R}^n$  y un abierto  $V(0) \ni v(z) = 0$ . Entonces  $v$  no se anula en  $V(z)$  salvo en  $z$ .

**Lema 3.0.4.** Sea  $v : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  un campo vectorial con una singularidad  $z \in U$  no degenerada. Entonces

$$I(v, z) = \text{sig}(\det(Dv_z))$$

*Demostración.* Sea  $v(z) = 0$ , componiendo con una traslación  $T$  tal que  $T(0) = z$ , obtenemos  $v \circ T(0) = 0$ . Como

$$D(v \circ T)_0 = Dv_z \circ DT_0 = Dv_z \circ id = Dv_z$$

podemos suponer directamente que  $z = 0$ . Dado que  $0$  es una singularidad no degenerada de  $v$  tenemos que existe una bola  $B = B(0, r)$  con  $r > 0$  tal que  $v/B$  es un difeomorfismo sobre su imagen  $V(B) \ni 0$ . Por el lema 3.0.2 tenemos que si  $v/B$  preserva la orientación de  $\mathbb{R}^n$ , entonces es difeotópica a la identidad  $id$  y si no es difeotópica a una reflexión  $\rho$ . En el primer caso  $I(v, 0) = I(id, 0) = 1$  en el segundo  $I(v, 0) = I(\rho, 0) = -1$ . Y en el primer caso  $\text{sig}(\det(Dv_0)) = 1$  y en el segundo  $\text{sig}(\det(Dv_0)) = -1$ .  $\square$

Sea ahora una variedad compacta, conexa y orientable de dimensión  $m$  encajada en  $\mathbb{R}^k$ . El espacio tangente  $T_x M$  a un punto  $x \in M$  puede verse como un subespacio vectorial de  $\mathbb{R}^k$ .

**Lema 3.0.5.** Sea  $w : M \rightarrow \mathbb{R}^k$  un campo vectorial diferenciable ( $w(x) \in T_x M$  para todo  $x \in M$ ), tal que  $w(z) = 0$ . Entonces  $Dw_z : T_z M \rightarrow \mathbb{R}^k$  tiene imagen contenida en  $T_z M$ ,  $\text{Im}(Dw_z) \subset T_z M$ .

*Demostración.* Sea  $X : U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^k$  una parametrización local,  $z \in X(U)$ . Como  $w$  es diferenciable, por definición,  $w \circ X : U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^k$  lo es, supongamos que  $X(0) = z$ ,  $0 \in \mathbb{R}^m$ . Localmente el campo  $w$  se ve por medio de la parametrización  $X$  como el campo  $v(u) = DX_{X(u)}^{-1} \circ w \circ X(u)$ ,  $u \in U$ ,  $v : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ . O sea,  $DX_u \circ v(u) = w \circ X(u)$ . Entonces  $D(DX \circ v)_u(y) = D(w \circ X)_u(y)$ ,  $y \in \mathbb{R}^m$ . Sea

$\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$  un arco de curva diferenciable tal que  $\gamma(0) = z$ ,  $\dot{\gamma}(0) = \xi \in T_z M$ .  
Sea  $y$  tal que  $DX_0(y) = \xi$ . Se cumple

$$\frac{d(w \circ \gamma)}{dt}(t) = Dw_{\gamma(t)}(\dot{\gamma}(t))$$

lo que evaluado en  $t = 0$  da

$$\frac{d(w \circ \gamma)}{dt}(0) = Dw_z(\xi).$$

Por otro lado podemos tomar como arco  $\gamma$  a la imagen por  $X$  de la curva  $\alpha(t) = yt$ ,  $t \in (-\epsilon, \epsilon)$ . Usando que  $D(DX \circ v)_u = D(w \circ X)_u$  obtenemos evaluando en  $t = 0$ :

$$\begin{aligned} \frac{d(w \circ \gamma)}{dt}(0) &= \frac{d(w \circ X \circ \alpha)}{dt}(0) = \\ &= D(w \circ X)_0(\dot{\alpha}(0)) = D(w \circ X)_0(y) = D(DX \circ v)_0(y) = \\ &= \frac{d(DX \circ v \circ \alpha)}{dt}(0) \stackrel{(\text{def})}{=} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{DX_{ty}(v(ty)) - DX_0(v(0))}{t} = \end{aligned}$$

(dado que se cumple que  $v(0) = 0$  ya que  $w(z) = 0$ )

$$\begin{aligned} &= \lim_{t \rightarrow 0} (DX_{ty} - DX_0) \left( \frac{v(ty) - v(0)}{t} \right) + \lim_{t \rightarrow 0} DX_0 \left( \frac{v(ty) - v(0)}{t} \right) = \\ &DX_0(\dot{v}(0)) \in T_z M. \end{aligned}$$

El primer sumando tiende a 0 pues  $\frac{v(ty)-v(0)}{t}$  está acotado y  $DX_{ty} - DX_0 \rightarrow 0$  cuando  $t \rightarrow 0$ . Esto es lo que queríamos demostrar.  $\square$

**Observación 3.0.1.** En particular probamos que  $Dw_z \circ DX_0(y) = DX_0 \circ Dv_0(y)$ .

**Corolario 3.0.1.** En las condiciones anteriores, si  $z$  es un cero no degenerado,  $I(w, z) = \text{sig}(\det(Dw_z))$ .

*Demostración.* Como  $Dw_z \circ DX_0 = DX_0 \circ Dv_0$  tenemos que  $\det(Dw_z) = \det(Dv_0)$ . Por lo tanto

$$I(w, z) \stackrel{(\text{def})}{=} I(v, 0) = \det(Dv_0) = \det(Dw_z)$$

si  $z$  es cero simple.  $\square$

**Teorema 3.0.3.** Teorema de Poincaré- Hopf

Sea  $M$  una variedad diferenciable compacta, orientable sin borde encajada en  $\mathbb{R}^k$  y  $w : M \rightarrow \mathbb{R}^k$  un campo vectorial diferenciable definido en  $M$  con ceros no degenerados. Entonces la suma de los índices de los ceros de  $w$  es un invariante de  $M$ , no depende del campo vectorial  $w$  particular.

*Demostración.* Sean  $z_1, \dots, z_h$  los ceros del campo vectorial  $w$ . Por el teorema 2.1.1, Teorema del Entorno Tubular, existe  $\epsilon > 0$  tal que definiendo

$$N_\epsilon = \{x \in \mathbb{R}^k / \text{dist}(x, M) \leq \epsilon\}$$

resulta  $N_\epsilon$  una variedad diferenciable de dimensión  $k$ , con borde

$$\partial N_\epsilon = \{x \in \mathbb{R}^k / \text{dist}(x, M) = \epsilon\}.$$

Vamos a probar que

$$\sum_{i=1}^h I(v, z_i) = \text{deg}(g : \partial N_\epsilon \rightarrow S^{k-1},$$

donde  $g$  es el mapa de Gauss. Recordemos que existe  $p : N_\epsilon \rightarrow M$  que es una retracción, o sea  $p/M = id_M$ , tal que si  $x \in N_\epsilon$  entonces  $(x - p(x)) \perp T_{p(x)}M$ . Sea  $\varphi : N_\epsilon \rightarrow \mathbb{R}$  la función real tal que  $\varphi(x) = \|x - p(x)\|^2$ . Entonces  $\nabla\varphi(x) = 2(x - p(x)) \perp T_{p(x)}M$ .

En efecto: consideremos una base de  $\mathbb{R}^k$  dada por  $\{v_1, \dots, v_m\}$  base de  $T_{p(x)}M$  y  $\{v_{m+1}, \dots, v_k\}$  base de  $T_{p(x)}M^\perp$ . Escribiendo  $x \in \mathbb{R}^k$  en esta base,  $x = (x_1, \dots, x_m, x_{m+1}, \dots, x_k)$  y derivando respecto a  $x_j$  obtenemos si  $j > m$

$$Dp_x(0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0) = \frac{\partial p}{\partial x_j} = 0$$

pues  $p(x + tv_j) = p(x)$  si  $v_j \in T_{p(x)}M^\perp$ . Si ahora  $1 \leq j \leq m$

$$Dp_x(0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0) = \frac{\partial p}{\partial x_j} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{p(x + tv_j) - p(x)}{t} \in T_x M$$

pues  $p(x + tv_j)$  es una curva en  $M$ ,  $t \in (-\epsilon, \epsilon)$ . Concluimos que  $\langle \frac{\partial p}{\partial x_j}, x - p(x) \rangle = 0$  pues o vale 0 o está en  $T_{p(x)}M$  y entonces es normal a  $x - p(x)$ . Como

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} &= \frac{\partial}{\partial x_j} \langle x - p(x), x - p(x) \rangle = \\ &= 2 \langle (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0) - Dp(0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0), x - p(x) \rangle = \\ &= 2 \langle (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0), x - p(x) \rangle - 2 \langle Dp(0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0), x - p(x) \rangle \end{aligned}$$

resulta de lo antes visto que

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_j} = 2 \langle (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0), x - p(x) \rangle$$

de donde  $\nabla\varphi(x) = 2(x - p(x))$ .

Se ve que  $\partial N_\epsilon = \varphi^{-1}(\epsilon^2)$  de donde  $\nabla\varphi(x) \perp \partial N_\epsilon$  en cada punto  $x \in \partial N_\epsilon$  y el mapa de Gauss  $g(x)$  puede escribirse como

$$g(x) = \frac{\nabla\varphi(x)}{\|\nabla\varphi(x)\|} = \frac{\nabla\varphi(x)}{2\epsilon}.$$

Extendamos el campo vectorial  $w$  a todo  $N_\epsilon$  definiendo para  $x \in N_\epsilon$  el campo  $v : N_\epsilon \rightarrow \mathbb{R}^k$  por

$$v(x) = w(p(x)) + \nabla\varphi(x).$$

Observamos que  $v(x) = 0$  si y solo si  $\|v(x)\|^2 = 0$ . Pero por Pitágoras

$$\|v(x)\|^2 = \|w(p(x))\|^2 + \|\nabla\varphi(x)\|^2$$

de donde  $\nabla\varphi(x) = 2(x - p(x)) = 0$  lo que implica  $x = p(x) \in M$ . Se deduce que  $x = z_j$ , alguno de los ceros de  $w$ . Así los ceros de  $v$  son aislados. Como  $N_\epsilon \subset \mathbb{R}^k$  es una variedad con borde de dimensión  $k$  y  $v$  apunta hacia afuera (verificarlo), por el lema 3.0.3, se cumple que

$$\sum_{j=1}^h I(v, z_j) = \deg(g : \text{partial}N_\epsilon) \rightarrow S^{k-1}.$$

Pero del hecho de que  $z$  sea un cero no degenerado de  $w$  resulta que  $z$  es cero no degenerado de  $v$  pues

$$Dv_z = Dw_z + D(\nabla\varphi)_z.$$

El primer sumando del lado derecho de la igualdad es una transformación lineal cuya imagen está contenida en  $T_zM$  (por el lema 3.0.5) y coincide con  $T_zM$  (pues  $z$  es no degenerado de donde el rango de  $Dw_z$  es  $m$ ). Como  $\nabla\varphi(x) = 2(x - p(x))$  tomando una base de  $\mathbb{R}^k$  como más arriba vemos que la matriz de  $D(\nabla\varphi)_z$  en esa base es  $2(id - Dp_z)$  de donde en  $T_zM^\perp$  es  $2id$  y se anula en  $T_zM$ .

Resulta pues que la matriz de  $Dv_z$  cumple

$$((Dv_z)) = \left( \left( \begin{array}{cc} Dw_z & 0 \\ 0 & Id \end{array} \right) \right).$$

Resulta entonces que  $\det(Dv_z) = \det(Dw_z)$ . Pero por el corolario 3.0.1, como todos los ceros se suponen no degenerados resulta

$$\begin{aligned} \deg(g : \partial N_\epsilon \rightarrow S^{k-1}) &= \sum_{j=1}^h I(v, z_j) = \\ &= \sum_{j=1}^h \text{sig}(\det(Dv_{z_j})) = \sum_{j=1}^h \text{sig}(\det(Dw_{z_j})) = \sum_{j=1}^h I(w, z_j). \end{aligned}$$

□

### 3.1. Transversalidad

El concepto de valor regular de una aplicación diferenciable entre dos variedades diferenciales  $M = M^n, N = N^n, f : M \rightarrow N$  admite una extensión que precisamos a continuación. Este concepto sistematiza y hace precisa la idea de que dos figuras geométricas se cortan en "posición general". Pongamos ejemplos: dadas dos circunferencias en el plano  $\mathbb{R}^2$ , "lo general" es que ellas o bien no se corten o bien si lo hacen lo hagan en dos puntos distintos. Excepcionalmente van a ser tangentes una con la otra. Lo mismo puede decirse de una recta y una circunferencia en el plano. Si ahora tomamos dos circunferencias en el espacio  $\mathbb{R}^3$ , "lo general" es que no se corten, el hecho de que lo hagan es una rareza. Lo mismo para dos rectas en el espacio. Si nos dan sus ecuaciones y resolvemos el sistema que conduce a hallar su punto de intersección, esperamos que en general nos dé un sistema incompatible, sin solución. Si en cambio nos damos una recta y un plano en  $\mathbb{R}^3$  esperamos que "en general" se corten en un solo punto. Lo mismo si damos dos planos en  $\mathbb{R}^3$  por sus ecuaciones, lo más común va a ser que se corten en una recta, raro va a ser que los planos coincidan. Estas nociones, "lo más común", "lo general", etc., es lo que intenta definir en forma precisa el concepto de transversalidad. La definición de transversalidad es debida a Thom.

**Definición 3.1.1.** *Dada una aplicación diferenciable  $f : M^m \rightarrow N^n$  entre variedades diferenciables, y una subvariedad  $P^p \subset N^n$  decimos que  $f$  es transversal a  $P$  en un punto  $f(x) = y \in S$  si*

$$Df_x(T_xM) + T_yP = T_yN.$$

*Si  $f$  es transversal a  $P$  en todo punto  $y \in S$  tal que  $f(x) = y$ , decimos que  $f$  es transversal a  $P$ . Denotaremos que  $f$  es transversal con  $P$  en  $N$  con la notación  $f \overline{\cap}_N P$ .*

Observar que si  $f(M) \cap P = \emptyset$  automáticamente  $f$  es transversal a  $P$ . Si  $m+p < n$  es la única manera de que  $f$  y  $P$  sean transversales.

Si  $m+p = n$  la suma de subespacios  $Df_x(T_xM)$  y  $T_yP$  deberá ser directa para que exista transversalidad:  $Df_x(T_xM) \oplus T_yP = T_yN$ , o, lo que es lo mismo tratándose de dos subespacios, que  $Df_x(T_xM) \cap T_yP = \{0\}$ . Esto da la idea de que la intersección tiene que ser de dimensión 0, o sea reducirse al punto  $y = f(x)$ . Es lo que sucede con una recta y un plano en el espacio.

Hay un caso particular importante que en el fondo está presente en los ejemplos anteriores y es cuando  $f = \iota$  es la inclusión  $\iota : M \hookrightarrow N$  de la variedad  $M$  como subvariedad inmersa en  $N$ . En ese caso diremos que  $M$  es transversal con  $P$  en  $N$  y lo escribiremos  $M \overline{\cap}_N P$ .

Si la variedad  $N$  con la que trabajamos ha sido fijada, omitiremos el sufijo  $N$  escribiendo simplemente  $f \bar{\cap} P$  y  $M \bar{\cap} P$  en lugar de  $f \bar{\cap}_N P$  y  $M \bar{\cap}_N P$ .

**Observación 3.1.1.** *Debe observarse que la noción de transversalidad depende de la variedad  $N$ , además de depender de  $M$  y  $P$  (y de la aplicación  $f$ ). Si tomamos dos circunferencias en  $\mathbb{R}^2$  que se corten en dos puntos distintos, serán transversales. Las mismas circunferencias, pensadas en  $\mathbb{R}^2$  identificado con el plano horizontal  $Oxy$  de  $\mathbb{R}^3$  no son más transversales.*

Llamamos codimensión de la subvariedad  $P^p \subset N^n$  al número  $n - p$ .

**Teorema 3.1.1.** *Sea  $f : M^m \rightarrow N^n$  tal que  $f \bar{\cap} P^p$  en  $N$ ,  $P$  una subvariedad de  $N$ . Entonces  $f^{-1}(P)$  es una subvariedad de  $M$  tal que su codimensión como subvariedad de  $M$  es igual a la codimensión de  $P$  como subvariedad de  $N$ . O sea,  $\dim(f^{-1}(P)) = m - n + p$ .*

*Demostración.* Sea  $y \in P$ . Si  $x \in M$  es tal que  $f(x) = y$ , tomemos cartas locales en  $N$ ,  $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  tal que  $y \in U \subset N$ ; y en  $P$ ,  $\psi : V \rightarrow \mathbb{R}^p$   $y \in V \subset P$ .  $V$  un abierto de  $P$  y  $U$  un abierto de  $N$ . Sea  $F$  la aplicación diferenciable definida por

$$F = \varphi \circ \psi^{-1} : \psi(V) \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \varphi(U) \subset \mathbb{R}^n.$$

El rango de  $F$  es  $p$  y  $F$  se extiende a un difeomorfismo  $\hat{F}$  de un abierto de  $\mathbb{R}^n$  en un abierto de  $\mathbb{R}^n$  (Teorema de la función Inversa). Esto proporciona un mapa coordenado  $G = \hat{F} \circ \varphi$ ,

$$y \xrightarrow{G} (y_1, \dots, y_p, \dots, y_n)$$

en donde  $P$  se expresa localmente por las ecuaciones  $y_{p+1} = 0, \dots, y_n = 0$ . Proyectando en las  $n - p$  últimas coordenadas,  $\Pi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n-p}$ ,  $P$  queda expresado por  $g(y) = \Pi \circ G(y) = 0$ , donde escribimos  $g = \Pi \circ G$ . Calculando  $Dg$  vemos que  $0 \in \mathbb{R}^{n-p}$  es un valor regular de  $g$ . Si  $x$  es un punto regular de  $f$  tenemos que  $g \circ f$  tiene a  $0 \in \mathbb{R}^{n-p}$  como valor regular, o lo que es lo mismo, componiendo con un mapa coordenado local  $\phi : W \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $x \in W$ ,

$$g \circ f \circ \phi^{-1} : \phi(W) \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^{n-p},$$

la preimagen de 0 es una subvariedad de dimensión  $m - n + p$ . (Ver teorema 1.3.2).  $\square$

Sea  $f : M^m \rightarrow N^n$  una aplicación diferenciable de clase  $C^k$  donde  $M, N$  son variedades diferenciables paracompactas (ver lema 2.1.1). Sean  $\psi_j : V_j \rightarrow \mathbb{R}^n$  mapas coordenados locales con  $V = \{V_j\}$  un cubrimiento localmente finito de  $N$ . Denotemos a la familia de tales mapas coordenados por  $\Psi = (\psi_j, V_j)$ . Análogamente sean

$\varphi_i : U_i \rightarrow \mathbb{R}^m$  mapas coordenados locales con  $U = \{U_i\}$  un cubrimiento localmente finito de  $M$ . Supongamos que para cada  $i$  existe  $j = j(i)$  tal que  $f(\text{Cl}(U_i)) \subset V_{j(i)}$ . Esto último siempre es posible de pedir dado que  $f$  es continua. Sea  $\varepsilon : M \rightarrow \mathbb{R}$  una función positiva y continua definida en  $M$ .

**Definición 3.1.2.** *El conjunto  $\mathcal{N}_{(U, \Psi, \varepsilon, k)}(f)$  es el conjunto de todas las aplicaciones de clase  $C^k$   $g : M \rightarrow N$  tales que cumplen las condiciones:*

1.  $g(\text{Cl}(U_i)) \subset V_j$  toda vez que  $f(\text{Cl}(U_i)) \subset V_j$ .
2. Para  $i, j$  tales que  $f(\text{Cl}(U_i)) \subset V_j$  sean

$$\psi_j \circ f \circ \varphi_i^{-1} = (f_1^{i,j}, \dots, f_n^{i,j})$$

$$\psi_j \circ g \circ \varphi_i^{-1} = (g_1^{i,j}, \dots, g_n^{i,j})$$

entonces para cada  $0 \leq \alpha \leq k$ , cada  $h = 1, \dots, n$  y cada  $i, j$  la derivada parcial  $(\alpha_1, \dots, \alpha_m)$ -ésima,  $\alpha = \alpha_1 + \dots + \alpha_m$ , de cada  $g_h^{i,j}(u)$  está a distancia de la derivada parcial  $(\alpha_1, \dots, \alpha_m)$ -ésima de  $f_h^{i,j}(u)$  menor que  $\varepsilon(\varphi_i^{-1}(u))$ .

Le definición dice, hablando groseramente, que  $\mathcal{N}_{(U, \Psi, \varepsilon, k)}(f)$  es el conjunto de las aplicaciones  $g$  de clase  $C^k$  tales que sus derivadas parciales distan poco (a menos de  $\varepsilon(x)$ ) de las correspondientes derivadas de  $f$  en cada punto  $x \in M$ . Esto define una base de entornos, y por tanto una topología en el espacio de las aplicaciones diferenciables de clase  $C^k$  de  $M$  en  $N$ . Si  $M$  es una variedad compacta es equivalente considerar  $\varepsilon > 0$  una constante como una función continua  $\varepsilon(x) > 0$  que varíe con  $x \in M$  en el sentido que la topología definida es la misma. Se puede probar que la topología no depende de los cubrimientos paracompactos de  $M$  y  $N$ .

Elegida la función  $\varepsilon$ , decimos para  $g \in \mathcal{N}_{(U, \Psi, \varepsilon, k)}(f)$  que está  $\varepsilon - C^k$ -cerca de  $f$ . Hablando más informalmente todavía diremos a veces que  $g$  esta  $C^k$ -cerca de  $f$ . Si  $M$  es compacta y consideramos  $\varepsilon > 0$  una constante diremos que  $f$  y  $g$  están a distancia menor que  $\varepsilon$  en la topología  $C^k$ .

**Teorema 3.1.2.** Teorema de Transversalidad de Thom

Sea  $f : M^m \rightarrow N^n$  una aplicación diferenciable de clase  $C^k$  donde  $k > \dim(M) - \dim(N)$  es un entero positivo. Supongamos que  $M$  es compacta. Sea  $P^p$  una subvariedad de  $N$ . Para todo  $(U, \Psi, \varepsilon, k)$ , existe  $g \in \mathcal{N}_{(U, \Psi, \varepsilon, k)}(f)$  tal que  $g \bar{\cap}_N P$ . Más aun, si  $X \subset M$  es un conjunto cerrado tal que  $f \bar{\cap}_N P$  para todo  $x \in X$  podemos elegir  $g$  tal que  $g(x) = f(x)$  para todo  $x \in X$ .

Más aun, si  $f$  es un difeomorfismo sobre su imagen podemos elegir  $g$  un difeomorfismo sobre su imagen.

La suposición de que  $M$  es compacta es para simplificar los argumentos, el resultado vale sin esa hipótesis. Como ya dijimos, y no es difícil de ver, en el caso de variedades compactas podemos elegir  $\varepsilon(x) = \text{constante} > 0$ .

*Demostración.* Por el Teorema de Whitney<sup>5</sup> podemos suponer que  $N$  está encajada en  $\mathbb{R}^k$ . Sean  $\psi_j : S_j \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $j \in \mathbb{N}$ , un sistema de coordenadas locales en  $N$  conteniendo a  $f(M)$ , de modo que  $\psi_j(S_j \cap P)$  es el conjunto de los puntos de  $\mathbb{R}^n$  para los que las últimas  $n - p$  coordenadas son nulas. Una prueba de que un tal sistema de coordenadas existe está contenida en la demostración del Teorema 3.1.1. Observemos que el conjunto de los puntos de  $f^{-1}(P) \subset M$  en los que  $f$  es transversal a  $P$  es abierto en  $f^{-1}(P)$ . Esto se deduce de la definición de transversalidad. Existe entonces un abierto  $U \subset M$  tal que  $X \subset U$  y  $f$  es transversal a  $P$  en todos los puntos de  $\text{Cl}(U) \cap f^{-1}(P)$ . Sea  $\varphi_i : U_i \rightarrow \mathbb{R}^m$  un sistema de mapas coordenados locales de  $M \setminus U$  tales que  $U_i \cap X = \emptyset$ . Podemos suponer que  $\varphi_i(U_i) = B(3)$ , y que existen entornos coordenados  $W_i \subset V_i \subset U_i$  tales que  $\varphi_i(W_i) = B(1)$ ,  $\varphi_i(V_i) = B(2)$ , y que la unión de los entornos  $W_i$  cubre  $M \setminus U$ . Por compacidad existe una familia finita  $W_1, W_2, \dots, W_r$  que cubre  $M \setminus U$ . Consideremos funciones reales de clase  $C^\infty$  definidas en  $M$  y con valores en  $[0, 1]$ ,  $b_1, b_2, \dots, b_r$  tales que  $b_i/W_i = 1$  y  $b_i/(M \setminus V_i) = 0$ . Dado que  $f$  es continua podemos elegir también  $U_i$  de modo que para cada  $i$  exista  $j(i)$  tal que  $\psi_{j(i)}(f(U_i)) \subset S_{j(i)}$ . A efectos de disminuir la recarga de la notación renumeraremos  $S_j$  y  $\psi_j$  de modo que tengamos  $\psi_i(f(U_i)) \subset S_i$ . Definiremos para  $i = 0, 1, \dots, r$ , inductivamente una sucesión de funciones  $f_0 = f, f_1, \dots, f_r$  de modo que  $f_{i+1}$  estará a distancia  $C^1$  de  $f_j$  menor que  $\varepsilon/2^{i+1}$  y tal que  $f_{i+1} = f_i$  en  $M \setminus U_{i+1}$  y  $f_{i+1}$  sea transversal a  $P$  en  $f^{-1}(P) \cap (U \cup U_1 \cup \dots \cup U_{i+1})$ . De ese modo  $g = f_r$  será transversal a  $P$  en todo  $M$  y estará a distancia  $C^1$  de  $f$  menor que  $\varepsilon$ . En cada paso elegiremos un vector  $\vec{u}_i \in \mathbb{R}^n$  con las  $p$  primeras coordenadas nulas.  $\vec{u}_i$  será tal que cumplirá todos los requisitos de la tesis de inducción.

Como ya notamos antes, escogeremos  $f_0 = f$  que ya es transversal a  $P$  en  $X \cap f^{-1}(P)$ . A continuación definimos  $f_1$  como

$$\begin{cases} f_1(x) = f_0(x) & \text{si } x \in M \setminus U_1, \\ f_1(x) = \psi_1^{-1}[\psi_1(f_0(x)) + b_1(x)\vec{u}_1] & \text{si } x \in U_1 \end{cases}$$

Elijamos  $\vec{u}_1 \in \mathbb{R}^n$  tan chico en módulo que se cumpla que  $S_1 \ni \psi_1(f_0(x)) + b_1(x)\vec{u}_1$  a efectos de que caiga en el dominio de  $\psi_1^{-1}$ ; y que a la vez  $\|f_1(x) - f_0(x)\| < \varepsilon/2$  y  $\|Df_{1x} - Df_{0x}\| < \varepsilon/2$ , para todo  $x \in M$ .

Para ver que  $S_1 \ni \psi_1(f_0(x)) + b_1(x)\vec{u}_1$  observemos que si  $x \in M \setminus \text{Cl}(V_1)$  entonces

<sup>5</sup>La prueba que dimos supone  $N$  compacta, pero el resultado vale con la hipótesis de  $N$  paracompacta

$b_1(x) = 0$  por lo que ciertamente  $f_0(x) + b_1(x)\vec{u}_1$  cae en  $S_1$ . Si ahora  $x \in \text{Cl}(V_1)$ , como  $\psi_1(f(U_1)) \subset S_1$ , el compacto  $\psi_1(f(\text{Cl}(V_1)))$  está a distancia positiva del borde de  $S_1$ ,  $\partial S_1$ . Elegiremos entonces  $\vec{u}_1$  de módulo menor que esa distancia.

Para ver que  $\|f_1(x) - f_0(x)\| < \varepsilon/2$  (norma de  $\mathbb{R}^k \supset N$ ), observamos que fuera de  $U_1$  nada hay que probar ya que ambas funciones coinciden. En  $U_1$  escribimos

$$\|f_1(x) - f_0(x)\| = \|\psi_1^{-1}(\psi_1(f_0(x)) + b_1(x)\vec{u}_1) - \psi_1^{-1}(\psi_1(f_0(x)))\|.$$

Si ahora  $x \in U_1 \setminus V_1$   $b_1(x) = 0$  y la desigualdad es trivial. Si no, como la función  $\psi_1^{-1}$  es continua será uniformemente continua en un compacto conteniendo estrictamente  $\psi_1(f_0(\text{Cl}(V_1)))$  y contenido en  $\psi_1(f_0(U_1)) \subset S_1 \subset \mathbb{R}^n$ . Elijamos un tal compacto  $K_1$  de modo que  $\partial K_1$  esté a distancia positiva tanto de  $\psi_1(f_0(\text{Cl}(V_1)))$  como de  $\partial S_1$ . Existe entonces un  $\delta_1 > 0$  tal que si  $b_1(x)\vec{u}_1$  tiene norma (en  $\mathbb{R}^n$ ) menor que  $\delta_1$ , resultará por una parte que  $\psi_1(f_0(x)) + b_1(x)\vec{u}_1 \in K_1$  y que

$$\|\psi_1^{-1}(\psi_1(f_0(x)) + b_1(x)\vec{u}_1) - \psi_1^{-1}(\psi_1(f_0(x)))\| < \varepsilon/2.$$

Para ver que también podemos escoger  $\vec{u}$  tal que  $\|Df_{1x} - Df_{0x}\| < \varepsilon/2$  tomemos un versor  $v \in T_x M$  y acotemos  $\|Df_{1x}(v) - Df_{0x}(v)\|$ . Si  $x \in M \setminus V_1$  entonces  $Df_{1x} = Df_{0x}$ . Si por otra parte tenemos  $x \in \text{Cl}(V_1)$  calculando  $Df_{1x}(v)$  vemos que por la regla de la cadena

$$Df_{1x}(v) = D\psi_1^{-1} \circ (D\psi_1 \circ Df_{0x}(v) + Db_{1x}(v)\vec{u}_1)$$

Aplicando linealidad queda entonces

$$Df_{1x}(v) = Df_{0x}(v) + D\psi_1^{-1} \circ Db_{1x}(v)\vec{u}_1$$

resulta entonces que

$$\|Df_{1x}(v) - Df_{0x}(v)\| = \|D\psi_1^{-1} \circ Db_{1x}(v)\vec{u}_1\| \leq \|D\psi_1^{-1}\| \|Db_{1x}\| \|u_1\|.$$

Por compacidad de  $\text{Cl}(V_1)$  y de su imagen por  $\psi_1 \circ f$  resulta que  $\|D\psi_1^{-1}\|$  y  $\|Db_{1x}\|$  están acotados. Finalmente vemos que existe  $\vec{u}_1 \neq 0$  de norma menor que el inverso del producto de esas cotas y cumpliendo además los requisitos previos (hemos mostrado que todos pueden cumplirse a la vez achicando la norma de  $\vec{u}_1$  en cada paso si fuera preciso).

Veamos que podemos elegir  $\vec{u}_1$  tal que  $f_1$  es transversal a  $P$  en  $f^{-1}(P) \cap (U \cup U_1)$ . Como  $f_1 = f_0$  en  $M \setminus \text{Cl}(V_1)$  y  $f_0$  es transversal a  $P$  en  $f^{-1}(P) \cap \text{Cl}(U)$ , solo hay que mostrar que  $f_1 \bar{\cap}_N P$  en  $f^{-1}(P) \cap \text{Cl}(W_1)$  y en  $f^{-1}(P) \cap \text{Cl}(U) \cap \text{Cl}(V_1)$ . Para el caso de  $\text{Cl}(W_1)$  sea  $\Pi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n-p}$  la proyección en las  $n-p$  últimas coordenadas. Para que  $f_1 \bar{\cap}_N P$  en  $f^{-1}(P) \cap \text{Cl}(W_1)$ , alcanza con elegir  $\hat{u}_1 = \Pi(\vec{u}_1)$  tal que  $-\hat{u}_1$

sea valor regular de  $\Pi \circ \psi_1 \circ f_0 : U_1 \rightarrow \mathbb{R}^{n-p}$ . En efecto:  $f_1 \bar{\rho}_N P$  en  $f^{-1}(P) \cap \text{Cl}(W_1)$  si y solo si  $Df_{1x}(T_x M) + T_{f_1(x)} P = T_{f_1(x)} N$ . Ahora,  $f_1(x) \in P$  con  $x \in \text{Cl}(W_1)$  si y solo si  $\psi_1^{-1}(\psi_1(f_0(x)) + \vec{u}_1) \in P$  si y solo si  $\psi_1(f_0(x)) + \vec{u}_1 \in E_p$  donde escribimos

$$E_p = \{v = (v_1, \dots, v_p, v_{p+1}, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n / v_{p+1} = \dots = v_n = 0\}.$$

Y la última equivalencia ocurre si y solo si  $\Pi(\psi_1(f_0(x)) + \vec{u}_1) = 0 \in \mathbb{R}^{n-p}$ . Como  $\Pi$  es lineal podemos escribir  $\Pi(\psi_1(f_0(x))) = -\Pi(\vec{u}_1) = -\hat{u}_1$ . Sea  $\hat{u}_1$  un valor regular de  $\Pi \circ \psi_1 \circ f_0 : \text{Cl}(W_1) \rightarrow \mathbb{R}^{n-p}$ . Entonces para toda preimagen  $x$  por  $\Pi \circ \psi_1 \circ f_0$  de  $-\hat{u}_1$  se tiene

$$D(\Pi \circ \psi_1 \circ f_0)_x(T_x M) = D\Pi \circ D\psi_1 \circ Df_{0x}(T_x M) = \mathbb{R}^{n-p} \quad (4)$$

Por otra parte en  $\text{Cl}(W_1)$  la función  $b_1 \equiv 1$  y resulta para  $v \in T_x M$ :

$$Df_{1x}(v) = D\psi_1^{-1} \circ (D\psi_1 \circ Df_{0x}(v) + Db_{1x}(v)\vec{u}_1) = Df_{0x}(v).$$

En consecuencia queda  $Df_{0x}(T_x M) + T_{f_1(x)} P = T_{f_1(x)} N$  en caso de existir transversalidad. Componiendo con  $D\psi_1$  que es un isomorfismo con  $\mathbb{R}^n$  de  $T_{f_1(x)} N$ , queda  $D\psi_1(Df_{0x}(T_x M)) + D\psi_1(T_{f_1(x)} P) = \mathbb{R}^n$ . Pero  $D\psi_1(T_{f_1(x)} P) = E_p$ . Finalmente, componiendo con la proyección  $\Pi$  y teniendo en cuenta que  $\Pi(E_p) = 0$  queda que  $f_1 \bar{\rho}_N P$  en  $f^{-1}(P \cap \text{Cl}(W_1))$  si y solo si

$$\Pi(D\psi_1(Df_{0x}(T_x M))) = \Pi(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}^{n-p}$$

Y esta condición es la obtenida en la ecuación (4) teniendo en cuenta que  $D\Pi = \Pi$  por ser lineal.

Por último, si  $x \in \text{Cl}(V_1) \cap \text{Cl}(U) \cap f^{-1}(P)$ ,  $f_0$  ya es transversal a  $P$  allí, pero podría pasar que al perturbar  $f_0$  obteniendo  $f_1$  se pierda esa propiedad. La condición de  $f_0$  ser transversal a  $P$  se escribe como  $Df_{0x}(T_x M) + T_{f_0(x)} P = T_{f_0(x)} N$ . Como vimos recién, esto equivale a, componiendo con  $\Pi \circ D\psi_1$ , que la matriz jacobiana de  $\Pi \circ D\psi_1 \circ Df_{0x}$  tenga rango  $n - p$  en todo punto  $x \in \text{Cl}(V_1) \cap \text{Cl}(U) \cap f^{-1}(P)$ . La hipótesis de inducción dice que en el compacto  $\text{Cl}(V_1) \cap \text{Cl}(U) \cap f^{-1}(P)$  toda matriz jacobiana de  $\Pi \circ D\psi_1 \circ Df_{0x}$  tiene rango máximo  $n - p$ . Pero la matriz de  $\Pi \circ D\psi_1 \circ Df_{1x}$  difiere de la anterior en  $\Pi(Db_{1x}(v)\vec{u}_1)$ . Como  $\text{Cl}(V_1) \cap \text{Cl}(U) \cap f^{-1}(P)$  es compacto, existe un  $\vec{u}_1$  tan pequeño que al sumar  $\Pi(Db_{1x}(v)\vec{u}_1)$  a una matriz jacobiana de  $\Pi \circ D\psi_1 \circ Df_{0x}$  para algún  $x \in \text{Cl}(V_1) \cap \text{Cl}(U) \cap f^{-1}(P)$  el rango no cambia. Eso termina el primer paso inductivo. En general, construida ya  $f_i$  que es transversal a  $P$  en  $f^{-1}(P) \cap (U \cup U_1 \cup \dots \cup U_i)$ , construimos  $f_{i+1}$  transversal con  $P$  en  $f^{-1}(P) \cap (U \cup U_1 \cup \dots \cup U_i \cup U_{i+1})$ , siguiendo los mismos pasos que en el caso anterior. Esto completa a demostración: en el paso  $r$  tendremos  $f_r = g$  que será transversal a  $P$  en todo  $M$  y distará de  $f$  en la topología  $C^1$  menos que  $\varepsilon$ .

Por último: si  $f$  es un difeomorfismo sobre su imagen, entonces es localmente una inmersión en cada punto de  $f(M)$  y globalmente inyectivo. Del hecho de ser una inmersión concluimos que  $f$  tiene rango máximo  $m = \dim(M)$  en cada punto. Si  $g$  está  $C^1$  cerca de  $f$ , en cada punto de  $M$  el rango será también  $m$ . Por compacidad de  $M$  va a existir un entorno  $\mathcal{N}$  de  $f$  en la topología  $C^1$  tal que si  $g \in \mathcal{N}$  entonces  $g$  es una inmersión. La prueba de que si  $g$  es una inmersión y está suficientemente cerca de  $f$  entonces es un difeomorfismo sobre su imagen es consecuencia de que va a ser globalmente inyectiva. Si así no fuera, existirían puntos  $x_j, x'_j \in M$ ,  $x_j \neq x'_j$  y  $g_j$  a  $C^1$  distancia de  $f$  menor que  $1/j$  tales que  $g_j(x_j) = g_j(x'_j)$ . Como  $M$  es compacta podemos suponer que  $x_j \rightarrow x$  y  $x'_j \rightarrow x'$  cuando  $j \rightarrow \infty$ , y, claro está,  $g_j \rightarrow f$ . Entonces se cumple por continuidad que  $f(x) = f(x')$ . Como  $f$  es un difeomorfismo sobre su imagen  $x = x'$ . Entonces  $x_j, x'_j$  están en un entorno de  $x$  en donde si  $j > 0$  es suficientemente grande,  $g_j$  es inyectiva por ser una inmersión.  $\square$

**Definición 3.1.3.** Sea  $M$  una variedad diferenciable encajada en  $\mathbb{R}^k$ . Decimos que un campo vectorial diferenciable  $v : M \rightarrow \mathbb{R}^k$  es simple, o no degenerado, si para todo  $z \in M$  tal que  $v(z) = 0$  se cumple que  $Dv_z : T_z M \rightarrow \mathbb{R}^k$  es una transformación lineal inyectiva.

Otro modo de expresar lo anterior es decir que localmente, en un entorno de  $z$ ,  $v$  es una inmersión de  $M$  en  $\mathbb{R}^k$ . Como consecuencia los ceros simples son aislados.

Sea  $M = M^m$  una variedad diferenciable encajada en  $\mathbb{R}^k$ . Si  $f : M \rightarrow \mathbb{R}^k$  es el encaje, podemos encajar  $TM$  en  $\mathbb{R}^{2k}$  mediante la aplicación  $F : TM \rightarrow \mathbb{R}^{2k}$  dada por

$$F(x, y) = (f(x), Df_x(y)), \quad x \in M, y \in T_x M.$$

En el caso particular de  $f = \iota$  la inclusión de  $M$  en  $\mathbb{R}^k$ , queda  $D\iota_x(y) = y$ . Sea ahora  $v : M \rightarrow \mathbb{R}^k$  un campo vectorial. A partir de  $v$  construimos una aplicación  $V : M \rightarrow TM$  definida como:  $V(x) = (x, v(x))$ . O sea, a cada punto  $x \in M$  asociamos la pareja formada por  $x$  y  $v(x) \in T_x M$ .

La variedad  $M$  siempre puede verse encajada en  $TM$  de un modo natural:  $\iota : M \rightarrow TM$ ,  $\iota(x) = (x, 0)$ . Claramente  $\iota$  es un difeomorfismo sobre su imagen.

**Lema 3.1.1.** Sea  $M$  una variedad diferenciable compacta encajada en  $\mathbb{R}^k$ . Un campo vectorial  $v : M \rightarrow \mathbb{R}^k$  es simple en  $z \in M$  si y solo si el campo  $V : M \rightarrow TM$  es transversal a  $\iota(M)$  en  $(z, 0) \in TM$ .

*Demostración.* Sea  $v : M \rightarrow \mathbb{R}^k$  un campo vectorial. O sea, para todo  $x \in M$ :  $v(x) \in T_x M \subset \mathbb{R}^k$ . Como más arriba definimos

$$V : M \rightarrow TM, V(x) = (x, v(x)), \quad \iota : M \rightarrow TM, \iota(x) = (x, 0).$$

Obsérvese que si  $\Pi : TM \rightarrow M$  es la proyección canónica que a  $(x, v) \in TM$  asocia  $x \in M$ :  $\Pi(x, v) = x$ , entonces  $\Pi \circ V = id : M \rightarrow M$ ,  $\Pi \circ \iota = id : M \rightarrow M$ . Sea  $P = \iota(M) = \{(x, 0) \in TM / x \in M, 0 \in T_x M\} \subset TM$ . Si  $y \in T_x M$  entonces existe  $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$  tal que

$$\gamma(0) = x, \quad \left. \frac{d\gamma}{dt} \right|_{t=0} = y$$

Entonces  $D\iota_x(y) = \left. \frac{d\iota \circ \gamma}{dt} \right|_{t=0} = (y, 0)$ . Si  $z$  es un cero simple de  $v$  entonces  $Dv_z : T_z M \rightarrow T_z M$  es no singular. Por otro lado  $DV_z : T_z M \rightarrow T_{V(z)}(TM)$  cumple  $DV_z(y) = (y, Dv_z(y))$ . En efecto, si  $V(x) = (x, (v(x)))$  y  $\gamma(t)$  es una curva tangente a  $y \in T_z M$  en  $z$  entonces  $V(\gamma(t))$  es una curva que en  $t = 0$  cumple  $V(\gamma(0)) = (\gamma(0), v(\gamma(0))) = (z, 0)$ , o sea que pasa por  $(z, 0)$ . Luego

$$DV_z(\dot{\gamma}(0)) = \left. \frac{dV \circ \gamma}{dt} \right|_{t=0} = (\dot{\gamma}(0), Dv_z(\dot{\gamma}(0))) = (y, Dv_z(y)).$$

Si  $v$  es tal que  $Dv_z$  es no singular, entonces  $Dv_z(T_z M)$  tiene dimensión  $m$ . En ese caso una base  $e_1, \dots, e_m$  de  $T_z M$  se transforma por  $D\iota$  en  $(e_1, 0), \dots, (e_m, 0)$  base de  $T_{(z,0)}P$  y por  $DV$  en  $(e_1, Dv_z(e_1)), \dots, (e_m, Dv_z(e_m))$ . En el espacio tangente a  $T_{(z,0)}(TM)$  los  $2m$  vectores

$$(e_1, 0), \dots, (e_m, 0), (e_1, Dv_z(e_1)), \dots, (e_m, Dv_z(e_m))$$

forman un conjunto linealmente independiente (escribir en coordenadas locales). Luego  $DV_z(T_z M) + T_{(z,0)}\iota(M) = T_{(z,0)}(TM)$ .

Recíprocamente: Si  $DV_z(T_z M) + T_{(z,0)}\iota(M) = T_{(z,0)}(TM)$ , tomando coordenadas locales y una base de  $T_z M$  como antes, obtenemos vectores de  $\mathbb{R}^{2m}$  que lo generan. Proyectando en las  $m$  últimas coordenadas vemos que los  $m$  primeros se proyectan en el vector nulo. En consecuencia la proyección de los  $m$  últimos debe generar  $\mathbb{R}^m$ . Pero eso es equivalente justamente a que  $Dv_z(e_1), \dots, Dv_z(e_m)$  es de rango  $m$ .  $\square$

**Teorema 3.1.3.** *Sea  $M$  una variedad diferenciable compacta encajada en  $\mathbb{R}^k$  y  $v : M \rightarrow \mathbb{R}^k$  un campo vectorial. Existe  $w : M \rightarrow \mathbb{R}^k$  un campo vectorial arbitrariamente  $C^1$ -cercano a  $v$  tal que  $w$  tiene solo ceros no degenerados (simples). En particular para toda variedad diferenciable compacta  $M$  siempre existe un campo vectorial con ceros aislados.*

*Demostración.* Sean  $V$  y  $P = \iota(M)$  definidos como en el lema 3.1.1. Por el teorema 3.1.2 existe  $G : M \rightarrow TM$  tal que  $G \bar{\cap} TM P$  a  $C^1$  distancia arbitrariamente chica. Si  $G$  fuera un campo vectorial la prueba estaría completa. Pero nada garantiza eso, o sea, podría ocurrir que  $\Pi \circ G \neq id : M \rightarrow M$ , donde  $\Pi : TM \rightarrow M$  es la proyección

canónica. Pero como  $V$  cumple que  $\Pi \circ V = id : M \rightarrow M$  que es un difeomorfismo. Y como  $G$  está cerca de  $V$  y el conjunto de los difeomorfismos es abierto en la topología  $C^1$  (por el teorema 3.1.2), tendremos que  $F = \Pi \circ G : M \rightarrow M$  es un difeomorfismo cercano a  $id : M \rightarrow M$ . Sea ahora  $W = G \circ F^{-1} : M \rightarrow TM$ . Entonces  $\Pi \circ W = \Pi \circ G \circ F^{-1} = id : M \rightarrow M$ . Entonces  $W(x) = (x, w(x)) \in TM \subset \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k$ . Como  $G$  es transversal a  $P$  y  $F^{-1}$  es un difeomorfismo, entonces si  $z \in M$  es tal que  $W(z) \in P$  resultará

$$DW_z(T_z M) + T_{(z,0)}P = DG_{F^{-1}(z)} \circ DF^{-1}_z(T_z M) + T_{(z,0)}P = T_{(z,0)}(TM)$$

ya que  $F^{-1}$  es un difeomorfismo. El campo vectorial  $w : M \rightarrow \mathbb{R}^k$  es entonces un campo que solo tiene ceros no degenerados por el lema 3.1.1.  $\square$

Ejercicios. Recordar que si  $M = M^m \subset \mathbb{R}^k$  es una variedad diferenciable, compacta, sin borde, encajada en  $\mathbb{R}^k$  y  $v : M \rightarrow \mathbb{R}^k$  es un campo vectorial (i.e.:  $\forall x \in M : v(x) \in T_x M$ ) con ceros aislados  $z_1, \dots, z_h$ , entonces vale el Teorema de Poincaré-Hopf:

$$\sum_{j=1}^h I(v, z_j) = \chi(M) = deg(g : \partial N_\epsilon \rightarrow S^{k-1}),$$

donde  $g$  es el mapa de Gauss que asigna a cada punto  $x \in \partial N_\epsilon$  el versor normal a  $T_x(\partial N_\epsilon)$  exterior a  $N_\epsilon$ , y  $N_\epsilon$  es el entorno tubular cerrado de  $M$  de radio  $\epsilon > 0$ .

1. Demostrar que  $\chi(M) = 0$  si  $m = \dim(M)$  es impar.
2. Demostrar que si  $M = S^k$ , la esfera de dimensión  $k$ , entonces

$$\chi(S^k) = \begin{cases} 0 & \text{si } k \text{ es impar} \\ 2 & \text{si } k \text{ es par} \end{cases}$$

3. a) Sean dos campos vectoriales  $v$  y  $w$  definidos en un abierto  $U \subset \mathbb{R}^m$  ambos campos con un único cero  $z \in U$  común tal que existe una esfera  $S \subset U$  con  $z$  en su interior para la que  $v/S$  y  $w/S$  no son nunca opuestos (o sea, para ningún  $x \in S$  vale  $v(x) = -w(x)$ ). Entonces  $I(v, z) = I(w, z)$ .

- b) Sea el campo vectorial plano

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= ax + by + F(x, y), \\ \frac{dy}{dt} &= cx + dy + G(x, y), \end{aligned}$$

donde  $F$  y  $G$  son funciones que son infinitésimos de mayor orden que 1 para  $(x, y) \rightarrow (0, 0)$  y  $(0, 0)$  es singularidad aislada. Mostrar que el índice de  $(0, 0)$  es el mismo que el de la parte lineal:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= ax + by, \\ \frac{dy}{dt} &= cx + dy,\end{aligned}$$

4. Sean  $M = M^m$  y  $N = N^n$  variedades compactas, orientadas y sin borde encajadas en  $\mathbb{R}^q$  tales que  $M \cap N = \emptyset$  y que  $m + n = q - 1$ . Sea  $\psi : M \times N \rightarrow S^{q-1}$  dada por

$$\psi(x, y) = \frac{x - y}{\|x - y\|}, x \in M, y \in N$$

donde  $\|\cdot\|$  es la norma que deriva del producto interno usual de  $\mathbb{R}^q$ . Definimos el número de enlace (o de entrelazamiento) de  $M$  y  $N$  como el grado de  $\psi$ ,  $\deg(\psi)$  y lo denotamos  $l(M, N)$  ( $l$  de *linking number*).

- a) Si

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / z = 0, x^2 + y^2 = 1\}$$

y

$$N = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x = 0, (y - 1)^2 + z^2 = 1\}$$

hallar  $l(M, N)$ .

- b) Idem hallar  $l(M, P)$  donde  $M$  es como en el ítem anterior y

$$P = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x = 0, y^2 + (z - 1)^2 = 1\}.$$

- c) Probar que en el caso general  $l(M, N) = (-1)^{(m+1)(n+1)}l(N, M)$   
d) Probar que si  $M$  se deforma continuamente a un punto en  $\mathbb{R}^q \setminus N$  o, más generalmente, si  $M$  es borde de una variedad  $X$  disjunta de  $N$  entonces  $l(M, N) = 0$ .