

Métodos Computacionales Aplicados al Cálculo Estructural

Apuntes de Tema 1: Elemento de barra

Pablo Castrillo - 30 de agosto de 2016

Dpto. de Estructuras, Instituto de Estructuras y Transporte
Facultad de Ingeniería, Universidad de la República

Sobre los materiales teóricos de MCACE 2016 Este documento forma parte de los apuntes de teórico del curso Métodos Computacionales Aplicados al Cálculo Estructural (MCACE) 2016. Este material es una guía de apoyo que no sustituye los contenidos dictados en clase y se encuentra en proceso de revisión. Las referencias bibliográficas centrales son los libros Oñate [2013] y Canelas [2015], por otra parte a lo largo del material se citan otras referencias también relevantes para la comprensión de cada tema.

Índice del capítulo

1. Elemento de barra	2
1.1. Introducción	2
1.2. Marco para el método de elementos finitos	3
1.2.1. Formulación fuerte	3
1.2.2. Principio de Hamilton	6
1.2.3. Equivalencia: Hamilton - Formulación fuerte	9
1.2.4. Aplicación del Método de los Elementos Finitos (MEF)	12
1.3. Elemento finito de barra de dos nodos 3D	15
1.3.1. Cambio de coordenadas	19
1.3.2. Grados de libertad y ensamblaje de matriz de rigidez	20
1.3.3. Utilización de Octave	24
1.3.4. Utilización de SAP2000	27
1.4. Elemento finito de barra de tres nodos	38

Capítulo 1

Elemento de barra

Este material es una guía para las clases uno y dos del teórico. Se abordan tres temas centrales: Marco para el método de elementos finitos, elemento finito de barra de dos nodos 3D y elemento finito de barra de tres nodos.

1.1. Introducción

En esta sección recordaremos algunos puntos importantes sobre la teoría de elasticidad lineal, para un detalle más extenso de los mismos se recomienda fuertemente ver el apunte de clase Canelas [2015].

El problema de elasticidad lineal consiste en hallar la función desplazamiento \mathbf{u} , el tensor de deformaciones \mathbf{D} y el tensor de tensiones \mathbf{T} en cualquier punto del cuerpo en estudio que ocupa una región Ω abierta.

Teorema 2.1. (Teorema de Cauchy: existencia del tensor de tensiones de Cauchy) Dado un punto $P \in \Omega$, existe un tensor $\mathbf{T}(P) \in \text{Lin}$, que llamaremos *tensor de tensiones*, que cumple:

$$\mathbf{f}(P, \mathbf{n}) = \mathbf{T}(P)\mathbf{n}. \quad (1.1)$$

Llamaremos *tensor* a una transformación lineal que se define de \mathcal{V}_3 en \mathcal{V}_3 , y Lin al conjunto de los tensores, es decir:

$$\text{Lin} = \{\mathbf{L} : \mathcal{V}_3 \rightarrow \mathcal{V}_3 | \mathbf{L} \text{ es lineal}\}.$$

En los temas básicos del curso (temas no avanzados) asumiremos dos hipótesis importantes:

- **Pequeños desplazamientos:** Asumiremos que las ecuaciones de equilibrio pueden plantearse en la configuración de referencia. Esto implica realizar una cierta aproximación, dado que, estrictamente, las ecuaciones de equilibrio sólo podrían ser planteadas en la configuración deformada, en la cual aparecen las tensiones internas de acuerdo con el comportamiento constitutivo del material.
- **Pequeñas deformaciones:** Esta aproximación es la que hace que el tensor de deformaciones infinitesimales caracterice los cambios de forma en el entorno de una partícula de Ω .

1.2. Marco para el método de elementos finitos

Esta sección describe el sistema de ecuaciones que gobiernan los problemas a tratar en el curso. Se tratarán principios variacionales y la formulación de elementos finitos a utilizar. Ésta sección servirá como el marco para el desarrollo de los capítulos siguientes.

1.2.1. Formulación fuerte

Dado un cuerpo que ocupa la región $\Omega \subset \mathcal{E}_3$, siendo \mathcal{E}_3 el espacio euclidiano tridimensional, llamaremos $\bar{\Omega}$ a la clausura de Ω , es decir, el menor dominio cerrado que contiene a Ω , esto es $\bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$. La *formulación clásica*, también llamada *formulación fuerte* del problema de elasticidad lineal consiste en hallar los campos

$$\begin{aligned} \mathbf{u} : \mathbb{R} \times \bar{\Omega} &\rightarrow \mathcal{V}_3, & \text{con } \mathbf{u} &\in C^0(\mathbb{R} \times \bar{\Omega}, \mathcal{V}_3), & \mathbf{u} &\in C^2(\mathbb{R} \times \Omega, \mathcal{V}_3), \\ \mathbf{D} : \mathbb{R} \times \bar{\Omega} &\rightarrow \text{Sim}, & \text{con } \mathbf{D} &\in C^0(\mathbb{R} \times \bar{\Omega}, \text{Sim}), & \mathbf{D} &\in C^1(\mathbb{R} \times \Omega, \text{Sim}), \\ \mathbf{T} : \mathbb{R} \times \bar{\Omega} &\rightarrow \text{Sim}, & \text{con } \mathbf{T} &\in C^0(\mathbb{R} \times \bar{\Omega}, \text{Sim}), & \mathbf{T} &\in C^1(\mathbb{R} \times \Omega, \text{Sim}), \end{aligned} \quad (1.2)$$

que satisfacen las siguientes ecuaciones [Wu and Gu, 2012]:

$$\text{Equilibrio puntual: } \rho \ddot{\mathbf{u}}(t, \mathbf{x}) - \nabla \cdot \mathbf{T}(t, \mathbf{x}) = \mathbf{b}(t, \mathbf{x}), \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega \text{ y } \forall t \in \mathbb{R}^+. \quad (1.3)$$

$$\text{Cond. iniciales: } \mathbf{u}(0, \mathbf{x}) = \mathbf{u}_c^0(0, \mathbf{x}), \quad \dot{\mathbf{u}}(0, \mathbf{x}) = \mathbf{u}_c^1(0, \mathbf{x}), \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega. \quad (1.4)$$

$$\text{Cond. de borde cinemáticas: } \mathbf{u}(t, \mathbf{x}) = \mathbf{u}_c(t, \mathbf{x}), \quad \forall \mathbf{x} \in \partial\Omega_u \text{ y } \forall t \in \mathbb{R}^+ \quad (1.5)$$

$$\text{Cond. de borde mecánicas: } \mathbf{T}(t, \mathbf{x}) \mathbf{n} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}), \quad \forall \mathbf{x} \in \partial\Omega_f \text{ y } \forall t \in \mathbb{R}^+ \quad (1.6)$$

$$\text{Ecuación constitutiva: } \mathbf{T}(t, \mathbf{x}) = \mathbb{C}(\mathbf{D}(t, \mathbf{x})), \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega \text{ y } \forall t \in \mathbb{R}^+. \quad (1.7)$$

$$\text{Relación Deformación-Desplazamiento: } \mathbf{D}(t, \mathbf{x}) = \mathbb{F}(\mathbf{u}(t, \mathbf{x})), \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega \text{ y } \forall t \in \mathbb{R}^+. \quad (1.8)$$

$$\partial\Omega = \bar{\partial\Omega}_u \cup \bar{\partial\Omega}_f. \quad (1.9)$$

En la Ecuación 1.2 se debe definir el conjunto de los tensores simétricos

$$\text{Sim} = \{\mathbf{L} \in \text{Lin} \mid \mathbf{L} = \mathbf{L}^T\}.$$

En la Figura 1.1 se describe un caso general reflejado por las ecuaciones anteriores, donde:

- $\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$.
- ρ representa la densidad de masa por unidad de volumen.
- \mathbf{T} representa el tensor de tensiones.
- \mathbf{D} representa el tensor de deformaciones.
- \mathbf{b} representa las fuerzas de volumen.
- \mathbf{u}_c^0 representa los desplazamientos iniciales.

- \mathbf{u}_c^1 representa las velocidades iniciales.
- \mathbf{u}_c son los desplazamientos conocidos en el borde $\partial\Omega_u$.
- \mathbf{f} representa las fuerzas de superficie aplicadas en el borde $\partial\Omega_f$.
- \mathbf{n} representa la normal saliente para la frontera que corresponda $\partial\Omega$.
- en el curso utilizaremos que $\mathbb{C}(\mathbf{D}(t, \mathbf{x})) = \nabla U_0(\mathbf{D}(t, \mathbf{x}))$ donde U_0 es la *densidad de energía de deformación*. Asumiendo así que el material es hiperelástico lineal, esto equivale a que la relación entre tensiones y deformaciones sea lineal. Esta hipótesis no se cumple en materiales como el hormigón ó en el acero a partir de ciertos valores de la deformación. La función U_0 cumple las siguientes condiciones:

$$U_0(\mathbf{0}) = 0, \quad (1.10)$$

$$U_0(\mathbf{D}) > 0 \quad \forall \mathbf{D} \neq \mathbf{0} \text{ (}\mathbf{0} \text{ es el tensor nulo)}, \quad (1.11)$$

$$\nabla U_0(\mathbf{D}) = \mathbb{C}(\mathbf{D}). \quad (1.12)$$

Si se cumple que el material es isótropo, \mathbb{C} es simétrico, se tiene que:

$$U_0(\mathbf{D}) = \frac{1}{2} \mathbf{D} : \mathbb{C}(\mathbf{D}). \quad (1.13)$$

- en el curso utilizaremos que $\mathbb{F}(\mathbf{u}(t, \mathbf{x})) = \mathbf{D}(t, \mathbf{x}) = \frac{\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T}{2}$, considerando así pequeñas deformaciones.

Supondremos que las superficies $\partial\Omega_u$ y $\partial\Omega_f$ son abiertas respecto de $\partial\Omega$, $\partial\Omega_u \cap \partial\Omega_f = \emptyset$ y $\overline{\partial\Omega_u} \cup \overline{\partial\Omega_f} = \partial\Omega$, es decir, **donde se conocen los desplazamientos no se conocen las fuerzas de superficie y viceversa** (ver Ejemplo 2.1). Consideraremos $\mathbf{u}_c \in C^0(\overline{\partial\Omega_u}, \mathcal{V}_3)$ y $\mathbf{f}_c \in C^0(\overline{\partial\Omega_f}, \mathcal{V}_3)$. Note que en el problema de elasticidad lineal, las regiones Ω , $\partial\Omega_u$ y $\partial\Omega_f$ son consideradas conocidas.

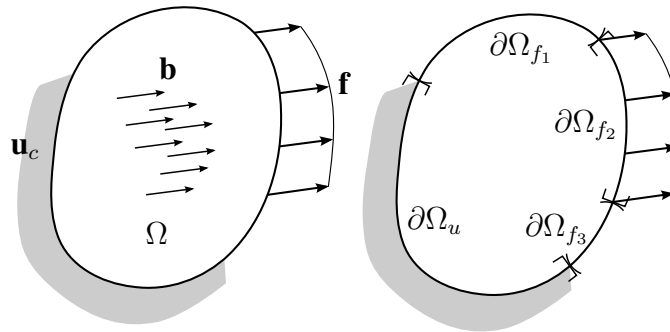
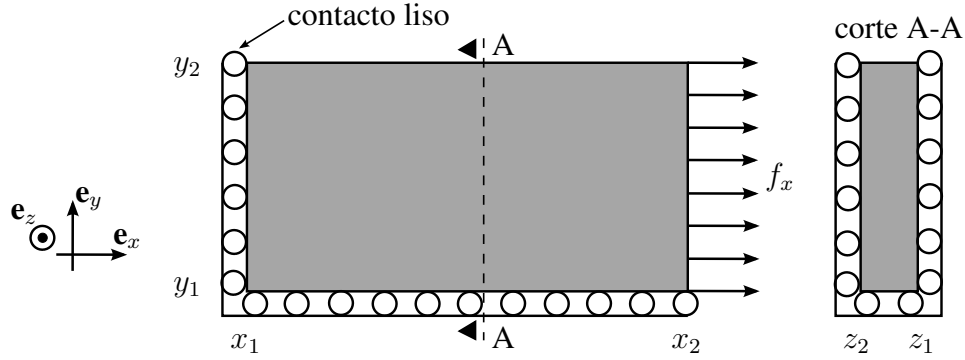


Figura 1.1: Formulación fuerte.

En la Figura 1.1 se tiene que $\partial\Omega_f = \partial\Omega_{f1} \cup \partial\Omega_{f2} \cup \partial\Omega_{f3}$.

Ejemplo 2.1.

Definimos las siguientes regiones:

- $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 < x < x_2, y_1 < y < y_2, z_1 < z < z_2\}$
- $\partial\Omega_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 < x < x_2, y = y_1, z_1 < z < z_2\}$
- $\partial\Omega_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = x_2, y_1 < y < y_2, z_1 < z < z_2\}$
- $\partial\Omega_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 < x < x_2, y = y_2, z_1 < z < z_2\}$
- $\partial\Omega_4 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = x_1, y_1 < y < y_2, z_1 < z < z_2\}$
- $\partial\Omega_5 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 < x < x_2, y_1 < y < y_2, z = z_1\}$
- $\partial\Omega_6 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 < x < x_2, y_1 < y < y_2, z = z_2\}$

Según cada dirección se tiene que:

- Según \mathbf{e}_x : $\partial\Omega_4 \subset \partial\Omega_u$ y $\partial\Omega_i \subset \partial\Omega_f$ con $i = 1, 2, 3, 5$ y 6 .
- Según \mathbf{e}_y : $\partial\Omega_1 \subset \partial\Omega_u$ y $\partial\Omega_i \subset \partial\Omega_f$ con $i = 2, 3, 4, 5$ y 6 .
- Según \mathbf{e}_z : $\partial\Omega_5, \partial\Omega_6 \subset \partial\Omega_u$ y $\partial\Omega_i \subset \partial\Omega_f$ con $i = 1, 2, 3$ y 4 .

Siendo $\mathbf{u} = u_x \mathbf{e}_x + u_y \mathbf{e}_y + u_z \mathbf{e}_z$, para cada región se tiene que:

- En $\partial\Omega_1$: $u_y = 0$, $\mathbf{e}_x^T \mathbf{T}(-\mathbf{e}_y) = 0$ y $\mathbf{e}_z^T \mathbf{T}(-\mathbf{e}_y) = 0$.
- En $\partial\Omega_2$: $\mathbf{T} \mathbf{e}_x = f_x \mathbf{e}_x$.
- En $\partial\Omega_3$: $\mathbf{T} \mathbf{e}_y = \mathbf{0}$.
- En $\partial\Omega_4$: $u_x = 0$, $\mathbf{e}_y^T \mathbf{T}(-\mathbf{e}_x) = 0$ y $\mathbf{e}_z^T \mathbf{T}(-\mathbf{e}_x) = 0$.
- En $\partial\Omega_5$: $u_z = 0$, $\mathbf{e}_x^T \mathbf{T}(-\mathbf{e}_z) = 0$ y $\mathbf{e}_y^T \mathbf{T}(-\mathbf{e}_z) = 0$.
- En $\partial\Omega_6$: $u_z = 0$, $\mathbf{e}_x^T \mathbf{T} \mathbf{e}_z = 0$ y $\mathbf{e}_y^T \mathbf{T} \mathbf{e}_z = 0$.

1.2.2. Principio de Hamilton

En mecánica analítica la cantidad más importante es el trabajo realizado por las fuerzas para realizar desplazamientos arbitrarios infinitesimales. Se define entonces el funcional de “acción” \mathcal{L} como:

$$\mathcal{L} = \int_{t_1}^{t_2} L dt = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{T} - \Pi dt, \quad (1.14)$$

donde:

- L : Es el *lagrangiano*.
- \mathcal{T} : Es la energía cinética.
- Π : Es la energía potencial total. $\Pi = U + V$
 - U : Energía de deformación.
 - V : Energía de potencial por las fuerzas externas.

En un **sistema de partículas o un sistema con un número finito de grados de libertad** se pueden definir las coordenadas generalizadas $\mathbf{q}(t) = (q_1(t), \dots, q_n(t))$, con $i = 1, \dots, n$, donde n es el número de grados de libertad y las coordenadas generalizadas q_i son independientes. Con lo anterior L queda definido como:

$$L = L(\mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t), t). \quad (1.15)$$

En un **sistema continuo o un sistema con un número no finito de grados de libertad** se debe definir la *densidad lagrangiana*, \mathcal{L} , siendo $\phi(\mathbf{x}, t)$ el movimiento de una partícula de coordenadas iniciales \mathbf{x} en un instante t .

$$L = \int_{\Omega} \mathcal{L}(\phi(\mathbf{x}, t), \phi_t(\mathbf{x}, t), \phi_x(\mathbf{x}, t), \mathbf{x}, t) dV, \quad (1.16)$$

donde $\phi_t(\mathbf{x}, t) = d\phi(\mathbf{x}, t)/dt$ y $\phi_x(\mathbf{x}, t)$ se puede interpretar como el gradiente de deformación \mathbf{F} donde $\mathbf{F}_{ij} = \partial\phi_i(\mathbf{x}, t)/\partial x_j$ (donde el índice i se refiere a la componente del campo ϕ) (En este curso no se considerará el sistema continuo).

El postulado principal de la mecánica analítica es un principio variacional, conocido como el principio de Hamilton, el cual establece que: De todos los posibles recorridos que puede realizar un sistema mecánico entre una configuración inicial y una final conocidas, el recorrido que efectivamente realiza el sistema es el que hace estacionaria la acción \mathcal{L} del sistema. Con lo cual \mathcal{L} tendrá un valor estacionario en el recorrido real.

Para obtener el valor estacionario, es necesario imponer que la variación $\delta_{\mathbf{v}}\mathcal{L}$ sea 0 para cualquier dirección \mathbf{v} , es aquí que debemos introducir el concepto de *derivada direccional* para funcionales, como es el caso de \mathcal{L} . La notación $\delta_{\mathbf{v}}$ refiere precisamente a la derivada direccional según

la dirección \mathbf{v} .

Definición 2.1. Sea $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, en donde $\Omega \subseteq A$ y A es una subvariedad afín de V con espacio director V_0 . Sea P un punto algebraicamente interior de Ω (en A). La función de variable vectorial F admite *derivada direccional* en $P \in \Omega$, según la dirección $\mathbf{v} \in V_0$, si la función real $\alpha \rightarrow F(P + \alpha\mathbf{v})$ es derivable en $\alpha = 0$. El valor de la derivada direccional lo denotaremos por $\delta_{\mathbf{v}}F(P)$. De la definición se deduce que:

$$\delta_{\mathbf{v}}F(P) := \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{F(P + \alpha\mathbf{v}) - F(P)}{\alpha} = \left. \frac{d}{d\alpha} F(P + \alpha\mathbf{v}) \right|_{\alpha=0}$$

En el caso de un sistema discreto se tiene que dados \mathbf{Q}_1 y \mathbf{Q}_2 , configuración inicial y final respectivamente, la solución es $\mathbf{q}(t)$ que satisface que $\mathbf{q}(t_1) = \mathbf{Q}_1$ y $\mathbf{q}(t_2) = \mathbf{Q}_2$ y hace estacionario el funcional $\mathcal{L}(\mathbf{q})$. Para este caso el espacio afín A y el espacio vectorial director V_0 son tales que:

$$A = \{\mathbf{q} / \mathbf{q}(t_1) = \mathbf{Q}_1 \text{ y } \mathbf{q}(t_2) = \mathbf{Q}_2\}, \quad (1.17)$$

$$V_0 = \{\mathbf{v} / \mathbf{v}(t_1) = \mathbf{0} \text{ y } \mathbf{v}(t_2) = \mathbf{0}\}. \quad (1.18)$$

Para el sistema discreto el funcional \mathcal{L} queda definido por la siguiente expresión:

$$\mathcal{L}(\mathbf{q}) = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{L}(\mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t), t) dt. \quad (1.19)$$

Es importante recordar que $\mathbf{q}(t)$ representa el vector de \mathbb{R}^n : $(q_1(t), \dots, q_n(t))$, lo mismo sucede con $\dot{\mathbf{q}}(t)$, por tanto $\mathbf{L} : \mathbb{R}^{2n+1} \rightarrow \mathbb{R}$.

$$\mathcal{L}(\mathbf{q} + \alpha\mathbf{v}) = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{L}(\mathbf{q}(t) + \alpha\mathbf{v}(t), \dot{\mathbf{q}}(t) + \alpha\dot{\mathbf{v}}(t), t) dt, \quad (1.20)$$

por lo tanto, utilizando la definición de derivada direccional:

$$\begin{aligned} \delta_{\mathbf{v}}\mathcal{L}(\mathbf{q}) &= \left. \frac{d}{d\alpha} \mathcal{L}(\mathbf{q} + \alpha\mathbf{v}) \right|_{\alpha=0} = \left. \frac{d}{d\alpha} \left(\int_{t_1}^{t_2} \mathbf{L}(\mathbf{q}(t) + \alpha\mathbf{v}(t), \dot{\mathbf{q}}(t) + \alpha\dot{\mathbf{v}}(t), t) dt \right) \right|_{\alpha=0} \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \left. \frac{d}{d\alpha} \mathbf{L}(\mathbf{q}(t) + \alpha\mathbf{v}(t), \dot{\mathbf{q}}(t) + \alpha\dot{\mathbf{v}}(t), t) \right|_{\alpha=0} dt \quad (1.21) \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^{i=n} \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial q_i} v_i(t) + \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \dot{q}_i} \dot{v}_i(t) + \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial \alpha} dt. \end{aligned}$$

Como $\partial t / \partial \alpha = 0$ se tiene que (se quitará la dependencia del tiempo para simplificar la notación):

$$\delta_{\mathbf{v}}\mathcal{L}(\mathbf{q}) = \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^{i=n} \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial q_i} v_i + \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \dot{q}_i} \dot{v}_i dt = \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^{i=n} \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial q_i} v_i dt + \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^{i=n} \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \dot{q}_i} \dot{v}_i dt. \quad (1.22)$$

Utilizando integración por partes en la segunda integral de la última expresión se tiene que:

$$\int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^{i=n} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \dot{v}_i dt = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} v_i \Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^{i=n} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) v_i dt = - \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^{i=n} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) v_i dt, \quad (1.23)$$

donde se utilizó que $\mathbf{v}(t_1) = \mathbf{v}(t_2) = \mathbf{0}$ por lo definido en 1.18. Por lo tanto:

$$\delta_{\mathbf{v}} \mathcal{L}(\mathbf{q}) = \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^{i=n} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) \right] v_i dt. \quad (1.24)$$

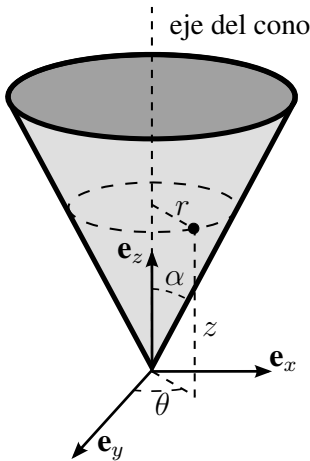
Si elegimos $v_i / v_i = \gamma(t) \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) \right]$ donde $\gamma(t)$ es una función estrictamente positiva en el intervalo (t_1, t_2) tal que $\gamma(t_1) = \gamma(t_2) = 0$, de la igualdad $\delta_{\mathbf{v}} \mathcal{L}(\mathbf{q}) = 0$ se obtiene que:

$$\int_{t_1}^{t_2} \gamma(t) \sum_{i=1}^{i=n} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) \right]^2 dt = 0 \Rightarrow \gamma(t) \sum_{i=1}^{i=n} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) \right]^2 = 0, \quad (1.25)$$

con lo cual

$$\boxed{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) = 0 \quad \forall t \in (t_1, t_2) \quad \text{e} \quad i = 1, \dots, n.} \quad (1.26)$$

Ejemplo 2.2. Consideremos una partícula de masa m limitada a moverse sobre la superficie de un cono de semiángulo α y sometida a la acción de la gravedad. Como se puede ver en la figura el eje del cono se encuentra sobre el eje \mathbf{e}_z y su vértice coincide con el origen. Se puede obtener la expresión de ligadura $z = r \cot(\alpha)$ donde $\cot(\alpha) = 1/\tan(\alpha)$. Con lo anterior se tiene que las coordenadas generalizadas del problema son $\mathbf{q} = (q_1, q_2) = (r, \theta)$.



En este caso se tiene que la posición de la partícula es $\mathbf{x} = r(t) \mathbf{e}_r + z(t) \mathbf{e}_z$, por lo tanto la velocidad es $\mathbf{v} = \dot{r} \mathbf{e}_r + r \dot{\theta} \mathbf{e}_\theta + \dot{z} \mathbf{e}_z$ (donde se omitió la dependencia de t para simplificar la notación). Utilizando la ligadura entre z y r se tiene que:

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = \dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + \dot{z}^2 = \frac{\dot{r}^2}{\sin^2(\alpha)} + r^2 \dot{\theta}^2 = \dot{r}^2 \csc^2(\alpha) + r^2 \dot{\theta}^2,$$

por tanto:

$$\mathcal{T} = \frac{1}{2} m \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = \frac{m}{2} \left(\dot{r}^2 \csc^2(\alpha) + r^2 \dot{\theta}^2 \right), \quad \mathcal{V} = m g z = m g r \cot(\alpha).$$

Queda así definido el Lagrangiano \mathcal{L} como:

$$\mathcal{L} = \mathcal{T} - \mathcal{V} = \frac{m}{2} \left(\dot{r}^2 \csc^2(\alpha) + r^2 \dot{\theta}^2 \right) - m g r \cot(\alpha).$$

Continúa ejemplo 2.2. Utilizando la expresión 1.26 se obtiene:

$$\frac{\partial L}{\partial r} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} \right) = m r \dot{\theta}^2 - m g \cot(\alpha) - m \ddot{r} \csc^2(\alpha) = 0,$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) = 0 - m (2r\dot{\theta} + r^2\ddot{\theta}) = 0,$$

Reordenando el sistema anterior se tiene:

$$\ddot{r} - r \dot{\theta}^2 \sin^2(\alpha) + g \cos(\alpha) \sin(\alpha) = 0,$$

$$2r\dot{\theta} + r^2\ddot{\theta} = 0,$$

de la segunda ecuación se puede obtener que $m r^2 \dot{\theta} = \text{cte} = k$ con lo cual:

$$m^2 r^3 \ddot{r} - k^2 \sin^2(\alpha) + m^2 r^3 g \cos(\alpha) \sin(\alpha) = 0.$$

es la ecuación del movimiento para la coordenada r .

1.2.3. Equivalencia: Hamilton - Formulación fuerte

De la Ecuación 1.14 se puede obtener que la variación respecto a \mathbf{v} es:

$$\delta_{\mathbf{v}} \mathcal{L} = \delta_{\mathbf{v}} \int_{t_1}^{t_2} L dt = \delta_{\mathbf{v}} \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{T} dt - \delta_{\mathbf{v}} \left(\int_{t_1}^{t_2} U + \int_{t_1}^{t_2} V dt \right). \quad (1.27)$$

La energía de deformación, la energía potencial de las fuerzas externas conservativas y la energía cinética se definen como:

- $U(\mathbf{u}(t)) = \int_{\Omega} U_0(\mathbf{D}(\mathbf{u}(t))) dV$, siendo U_0 la densidad de energía de deformación.
- $V(\mathbf{u}(t)) = - \int_{\Omega} \mathbf{b} \cdot \mathbf{u}(t) dV - \int_{\partial\Omega_f} \mathbf{f} \cdot \mathbf{u}(t) dA$, siendo \mathbf{b} las fuerzas por unidad de volumen y \mathbf{f} las fuerzas por unidad de área.
- $\mathcal{T}(\dot{\mathbf{u}}(t)) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \rho (\dot{\mathbf{u}}(t))^2 dV$.

Con lo anterior la energía potencial queda definida por (en lo que sigue se quitará la dependencia del tiempo para simplificar la notación):

$$\Pi(\mathbf{u}) = U(\mathbf{u}) + V(\mathbf{u}) = \int_{\Omega} U_0(\mathbf{D}(\mathbf{u})) dV - \int_{\Omega} \mathbf{b} \cdot \mathbf{u} dV - \int_{\partial\Omega_f} \mathbf{f} \cdot \mathbf{u} dA. \quad (1.28)$$

Las variación de U se puede expresar como:

$$\begin{aligned}\delta_{\mathbf{v}} \int_{t_1}^{t_2} U(\mathbf{u}) \, dt &= \int_{t_1}^{t_2} \left(\int_{\Omega} \frac{d}{d\alpha} U_0(\mathbf{D}(\mathbf{u} + \alpha \mathbf{v})) \Big|_{\alpha=0} dV \right) dt, \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \left(\int_{\Omega} \nabla U_0(\mathbf{D}(\mathbf{u})) : \mathbf{D}(\mathbf{v}) \, dV \right) dt.\end{aligned}\quad (1.29)$$

Las variación de V se puede expresar como:

$$\begin{aligned}\delta_{\mathbf{v}} \int_{t_1}^{t_2} V(\mathbf{u}) \, dt &= - \int_{t_1}^{t_2} \left(\int_{\Omega} \frac{d}{d\alpha} \mathbf{b} \cdot (\mathbf{u} + \alpha \mathbf{v}) \Big|_{\alpha=0} dV \right) dt - \int_{t_1}^{t_2} \left(\int_{\partial\Omega_f} \frac{d}{d\alpha} \mathbf{f} \cdot (\mathbf{u} + \alpha \mathbf{v}) \Big|_{\alpha=0} dA \right) dt, \\ &= - \int_{t_1}^{t_2} \left(\int_{\Omega} \mathbf{b} \cdot \mathbf{v} \, dV \right) dt - \int_{t_1}^{t_2} \left(\int_{\partial\Omega_f} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} \, dA \right) dt.\end{aligned}\quad (1.30)$$

Las variación de la energía cinética se puede expresar como:

$$\begin{aligned}\delta_{\mathbf{v}} \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{T}(\dot{\mathbf{u}}) &= \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{1}{2} \int_{\Omega} \frac{d}{d\alpha} \rho (\dot{\mathbf{u}} + \alpha \dot{\mathbf{v}})^2 \Big|_{\alpha=0} dV \right) dt, \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{1}{2} \int_{\Omega} 2\rho (\dot{\mathbf{u}} + \alpha \dot{\mathbf{v}}) \cdot \dot{\mathbf{v}} \Big|_{\alpha=0} dV \right) dt, \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \left(\int_{\Omega} \rho \dot{\mathbf{u}} \cdot \dot{\mathbf{v}} \, dV \right) dt = \int_{\Omega} \left(\int_{t_1}^{t_2} \rho \dot{\mathbf{u}} \cdot \dot{\mathbf{v}} \, dt \right) dV, \\ &= \int_{\Omega} \left(\rho \dot{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{v} \Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \rho \ddot{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{v} \, dt \right) dV, \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \left(- \int_{\Omega} \rho \ddot{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{v} \, dV \right) dt.\end{aligned}\quad (1.31)$$

Donde se asumió que $\mathbf{v}(t_1) = \mathbf{v}(t_2) = \mathbf{0}$ como hipótesis del principio de Hamilton. Utilizando la ecuación constitutiva se tiene que:

$$\begin{aligned}\delta_v \mathcal{L}(\mathbf{u}) &= \int_{t_1}^{t_2} \left(- \int_{\Omega} \rho \ddot{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{v} \, dV \right) dt - \int_{t_1}^{t_2} \left(\int_{\Omega} \mathbf{T}(\mathbf{u}) : \mathbf{D}(\mathbf{v}) \, dV \right) dt \\ &\quad + \int_{t_1}^{t_2} \left(\int_{\Omega} \mathbf{b} \cdot \mathbf{v} \, dV \right) dt + \int_{t_1}^{t_2} \left(\int_{\partial\Omega_f} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} \, dA \right) dt = 0.\end{aligned}\quad (1.32)$$

Utilizando la definición de la relación entre desplazamientos y deformaciones (ver Sección 1.2.1) en el segundo término del lado derecho de la Ec. 1.32 se obtiene que:

$$\int_{t_1}^{t_2} \left(\int_{\Omega} \mathbf{T}(\mathbf{u}) : \mathbf{D}(\mathbf{v}) \, dV \right) dt = \int_{t_1}^{t_2} \left(\int_{\Omega} \mathbf{T}(\mathbf{u}) : \frac{\nabla \mathbf{v} + (\nabla \mathbf{v})^T}{2} \, dV \right) dt \quad (1.33)$$

Propiedad 2.1. Sea \mathbf{T} un campo tensorial y \mathbf{v} un campo vectorial. Se cumple que:

$$\nabla \cdot (\mathbf{T}^T \mathbf{v}) = (\nabla \cdot \mathbf{T}) \cdot \mathbf{v} + \mathbf{T} : \nabla \mathbf{v},$$

donde “:” representa el producto escalar de tensores, definido por:

$$\mathbf{A} : \mathbf{B} = \text{tr}(\mathbf{A}\mathbf{B}^T) = \text{tr}(\mathbf{A}^T\mathbf{B}) = \sum_{i,j=1}^3 \mathbf{A}_{ij}\mathbf{B}_{ij}.$$

Dado que $\mathbf{T}(\mathbf{u})$ es simétrico se puede probar que: $\mathbf{T}(\mathbf{u}) : \nabla \mathbf{v} = \mathbf{T}(\mathbf{u}) : (\nabla \mathbf{v})^T$, utilizando este resultado en la Ecuación. 1.33 se obtiene:

$$\int_{t_1}^{t_2} \left(\int_{\Omega} \mathbf{T}(\mathbf{u}) : \mathbf{D}(\mathbf{v}) \, dV \right) dt = \int_{t_1}^{t_2} \left(\int_{\Omega} \mathbf{T}(\mathbf{u}) : \nabla \mathbf{v} \, dV \right) dt, \quad (1.34)$$

utilizando la Propiedad 2.1 (con \mathbf{T} simétrico) se tiene que:

$$\int_{t_1}^{t_2} \left(\int_{\Omega} \mathbf{T}(\mathbf{u}) : \mathbf{D}(\mathbf{v}) \, dV \right) dt = \int_{t_1}^{t_2} \left(\int_{\Omega} \nabla \cdot (\mathbf{T}(\mathbf{u})\mathbf{v}) \, dV - \int_{\Omega} (\nabla \cdot \mathbf{T}(\mathbf{u})) \cdot \mathbf{v} \, dV \right) dt. \quad (1.35)$$

Teorema 2.2. (de Gauss de la divergencia) Sea Ω un sólido simple de \mathbb{R}^3 y $\partial\Omega$ su borde, orientado con la normal unitaria saliente \mathbf{n} . Sea $F : \Omega \rightarrow \mathcal{V}_3$ un campo vectorial de clase C^1 , entonces:

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot F \, dV = \int_{\partial\Omega} F \cdot \mathbf{n} \, dA$$

Utilizando el teorema de Gauss en la expresión definida por la Ecuación 1.35 se obtiene que:

$$\int_{t_1}^{t_2} \left(\int_{\Omega} \mathbf{T}(\mathbf{u}) : \mathbf{D}(\mathbf{v}) \, dV \right) dt = \int_{t_1}^{t_2} \left(\int_{\partial\Omega_f} \mathbf{T}(\mathbf{u})\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, dA - \int_{\Omega} (\nabla \cdot \mathbf{T}(\mathbf{u})) \cdot \mathbf{v} \, dV \right) dt, \quad (1.36)$$

donde se utilizó que: $\mathbf{v}(P) = \mathbf{0} \quad \forall P \in \partial\Omega_u$. Por lo anterior se tiene que $\delta_v \mathcal{L}(\mathbf{u})$ es

$$\int_{t_1}^{t_2} \left(- \int_{\Omega} \rho \ddot{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{v} \, dV - \int_{\partial\Omega_f} \mathbf{T}(\mathbf{u})\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, dA + \int_{\Omega} (\nabla \cdot \mathbf{T}(\mathbf{u})) \cdot \mathbf{v} \, dV + \int_{\Omega} \mathbf{b} \cdot \mathbf{v} \, dV + \int_{\partial\Omega_f} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} \, dA \right) dt, \quad (1.37)$$

agrupando en términos de dV y dA y usando que \mathbf{T} es simétrico, obtenemos:

$$\int_{t_1}^{t_2} \left(\int_{\Omega} [\nabla \cdot \mathbf{T}(\mathbf{u}) + \mathbf{b} - \rho \ddot{\mathbf{u}}] \cdot \mathbf{v} \, dV + \int_{\partial\Omega_f} [\mathbf{f} - \mathbf{T}(\mathbf{u})\mathbf{n}] \cdot \mathbf{v} \, dA \right) dt = 0. \quad (1.38)$$

Dado que dicha expresión es válida $\forall \mathbf{v}$, el mismo se puede elegir arbitrariamente, por ejemplo $\mathbf{v} = \gamma [\nabla \cdot \mathbf{T}(\mathbf{u}) + \mathbf{b} - \rho \ddot{\mathbf{u}}]$ donde γ es la distancia del punto \mathbf{x} al borde $\partial\Omega_f$ (por lo tanto vale 0 en él) se obtiene que:

$$\nabla \cdot \mathbf{T}(\mathbf{u}) + \mathbf{b} - \rho \ddot{\mathbf{u}} = \mathbf{0} \quad \text{en } \Omega \times \mathbb{R}^+, \quad (1.39)$$

misma expresión que la presentada en la formulación fuerte, ver Ecuación 1.3.

Si elegimos $\mathbf{v} = \mathbf{f} - \mathbf{T}(\mathbf{u})\mathbf{n}$ se puede obtener la condición de la Ecuación 1.6.

$$\mathbf{f} - \mathbf{T}(\mathbf{u})\mathbf{n} = \mathbf{0} \text{ en } \partial\Omega_f \times \mathbb{R}^+. \quad (1.40)$$

1.2.4. Aplicación del Método de los Elementos Finitos (MEF)

Utilizando las definiciones presentadas al inicio de la Sección 1.2.3 y la Ecuación 1.14 se obtiene que:

$$\mathcal{L}(\mathbf{u}) = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{1}{2} \int_{\Omega} \rho (\dot{\mathbf{u}}(t))^2 dV - \int_{\Omega} U_0(\mathbf{D}(\mathbf{u})) dV + \int_{\Omega} \mathbf{b} \cdot \mathbf{u} dV + \int_{\partial\Omega_f} \mathbf{f} \cdot \mathbf{u} dA \right) dt. \quad (1.41)$$

Recordando la definición vista en el curso Elasticidad,

$$U_0(\mathbf{D}(\mathbf{u})) = \frac{1}{2} \mathbf{D}(\mathbf{u}) : \mathbb{C}(\mathbf{D}(\mathbf{u})) = \frac{1}{2} \mathbf{D}(\mathbf{u}) : \mathbf{T}(\mathbf{u}) \quad (1.42)$$

Se obtiene que:

$$\mathcal{L}(\mathbf{u}) = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{1}{2} \int_{\Omega} \rho (\dot{\mathbf{u}}(t))^2 dV - \int_{\Omega} \frac{1}{2} \mathbf{D}(\mathbf{u}) : \mathbf{T}(\mathbf{u}) dV + \int_{\Omega} \mathbf{b} \cdot \mathbf{u} dV + \int_{\partial\Omega_f} \mathbf{f} \cdot \mathbf{u} dA \right) dt. \quad (1.43)$$

Se puede discretizar entonces el campo de desplazamientos \mathbf{u} en el cuerpo Ω , mediante la utilización de elementos finitos. Diremos entonces que: $\mathbf{u} = \tilde{\mathbf{N}}_{\mathbf{u}}\mathbf{U}$ y por lo tanto $\dot{\mathbf{u}} = \tilde{\mathbf{N}}_{\mathbf{u}}\dot{\mathbf{U}}$.

■ $\mathbf{u} = \tilde{\mathbf{N}}_{\mathbf{u}}\mathbf{U}$

Recordando que

$$\mathcal{B}\mathbf{D}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} \\ D_{12} & D_{22} & D_{23} \\ D_{13} & D_{23} & D_{33} \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathcal{B}\mathbf{T}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{12} & T_{22} & T_{23} \\ T_{13} & T_{23} & T_{33} \end{pmatrix}$$

se tiene que

- al discretizar el problema \mathbf{D} suele escribirse de forma vectorial utilizando la notación de Voigt, $\boldsymbol{\varepsilon} = (D_{11}, D_{22}, D_{33}, 2D_{23}, 2D_{13}, 2D_{12})^T$. $\boldsymbol{\varepsilon}$ se escribe en función de \mathbf{U} como $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) = \tilde{\mathbf{B}}\mathbf{U}$.
- Al igual que con las deformaciones el tensor de tensiones suele escribirse también con la notación de Voigt, $\boldsymbol{\sigma} = (T_{11}, T_{22}, T_{33}, T_{23}, T_{13}, T_{12})^T$. $\boldsymbol{\sigma}$ se escribe en función de \mathbf{U} como $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) = \mathbb{C}(\mathbf{D}(\mathbf{u})) = \tilde{\mathbf{C}}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) = \tilde{\mathbf{C}}\tilde{\mathbf{B}}\mathbf{U}$.

Notar que se cumple que $\mathbf{D}(\mathbf{u}) : \mathbf{T}(\mathbf{u}) = \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \boldsymbol{\sigma}$. Es importante destacar también que solo se calculan los términos de $\boldsymbol{\varepsilon}$ y $\boldsymbol{\sigma}$ que sobreviven del producto escalar (se verá en los ejemplos).

■ $\dot{\mathbf{u}} = \tilde{\mathbf{N}}_{\mathbf{u}}\dot{\mathbf{U}}$

$\tilde{\mathbf{N}}_{\mathbf{u}}$, $\tilde{\mathbf{B}}$, $\tilde{\mathbf{C}}$ son matrices globales (definidas en todo Ω), las cuales se pueden interpretar como:

- $\tilde{\mathbf{N}}_{\mathbf{u}}$: Es la matriz de funciones de interpolación globales para el campo de desplazamientos, el tamaño de la misma depende de la discretización que se realice para el campo de desplazamientos.
- $\tilde{\mathbf{B}}$: Es la matriz de derivadas de las funciones de interpolación utilizadas para el campo de desplazamientos.
- $\tilde{\mathbf{C}}$: Es la matriz constitutiva (recordar que se toma en cuenta solo los términos que sobreviven en el producto escalar de ε y σ).

Podemos definir así el funcional \mathcal{L} en función de \mathbf{U} , con lo cual estaría definido de forma “discreta”, similar a tener un sistema de partículas.

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\mathbf{U}) = & \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{1}{2} \dot{\mathbf{U}}^T \left(\int_{\Omega} \rho \tilde{\mathbf{N}}_{\mathbf{u}}^T \tilde{\mathbf{N}}_{\mathbf{u}} dV \right) \dot{\mathbf{U}} - \frac{1}{2} \mathbf{U}^T \left(\int_{\Omega} \tilde{\mathbf{B}}^T \tilde{\mathbf{C}} \tilde{\mathbf{B}} dV \right) \mathbf{U} \right) dt \\ & + \int_{t_1}^{t_2} \left(\int_{\Omega} \mathbf{b} \cdot \tilde{\mathbf{N}}_{\mathbf{u}} \mathbf{U} dV + \int_{\partial\Omega_f} \mathbf{f} \cdot \tilde{\mathbf{N}}_{\mathbf{u}} \mathbf{U} dA \right) dt, \end{aligned} \quad (1.44)$$

en la Ecuación 1.44 la expresión de L es:

$$\begin{aligned} L(\mathbf{U}, \dot{\mathbf{U}}, t) = & \frac{1}{2} \dot{\mathbf{U}}^T \left(\int_{\Omega} \rho \tilde{\mathbf{N}}_{\mathbf{u}}^T \tilde{\mathbf{N}}_{\mathbf{u}} dV \right) \dot{\mathbf{U}} - \frac{1}{2} \mathbf{U}^T \left(\int_{\Omega} \tilde{\mathbf{B}}^T \tilde{\mathbf{C}} \tilde{\mathbf{B}} dV \right) \mathbf{U} \\ & + \int_{\Omega} \mathbf{b} \cdot \tilde{\mathbf{N}}_{\mathbf{u}} \mathbf{U} dV + \int_{\partial\Omega_f} \mathbf{f} \cdot \tilde{\mathbf{N}}_{\mathbf{u}} \mathbf{U} dA. \end{aligned} \quad (1.45)$$

Utilizando la Ecuación 1.26 en la Ecuación 1.45 se obtiene que:

$$-\ddot{\mathbf{U}}^T \int_{\Omega} \rho \tilde{\mathbf{N}}_{\mathbf{u}}^T \tilde{\mathbf{N}}_{\mathbf{u}} dV - \mathbf{U}^T \int_{\Omega} \tilde{\mathbf{B}}^T \tilde{\mathbf{C}} \tilde{\mathbf{B}} dV + \int_{\Omega} \mathbf{b}^T \tilde{\mathbf{N}}_{\mathbf{u}} dV + \int_{\partial\Omega_f} \mathbf{f}^T \tilde{\mathbf{N}}_{\mathbf{u}} dA = 0. \quad (1.46)$$

Trasponiendo la expresión anterior y ordenando los términos se obtiene:

$$\left[\int_{\Omega} \rho \tilde{\mathbf{N}}_{\mathbf{u}}^T \tilde{\mathbf{N}}_{\mathbf{u}} dV \right] \ddot{\mathbf{U}} + \left[\int_{\Omega} \tilde{\mathbf{B}}^T \tilde{\mathbf{C}} \tilde{\mathbf{B}} dV \right] \mathbf{U} = \int_{\Omega} \tilde{\mathbf{N}}_{\mathbf{u}}^T \mathbf{b} dV + \int_{\partial\Omega_f} \tilde{\mathbf{N}}_{\mathbf{u}}^T \mathbf{f} dA. \quad (1.47)$$

Es usual en el manejo de los elementos finitos utilizar la expresión anterior elemento a elemento.

$$\left[\int_{\Omega_e} \rho \mathbf{N}_{\mathbf{u}}^T \mathbf{N}_{\mathbf{u}} dV \right] \ddot{\mathbf{U}}^e + \left[\int_{\Omega_e} \mathbf{B}^T \mathbf{C} \mathbf{B} dV \right] \mathbf{U}^e = \int_{\Omega_e} \mathbf{N}_{\mathbf{u}}^T \mathbf{b} dV + \int_{\partial\Omega_e} \mathbf{N}_{\mathbf{u}}^T \mathbf{f} dA \quad (1.48)$$

Cabe destacarse que al ensamblar las matrices de rigidez, ver Sección 1.3.2, solo es necesario calcular la integral de $\mathbf{N}_{\mathbf{u}}^T \mathbf{f}$ en la superficie $\partial\Omega_e \cap \partial\Omega_f$.

Fuerzas puntuales En el análisis anterior no se consideraron fuerzas “puntuales”. Dado que son utilizadas para el caso de barras y pórticos aceptaremos que la expresión en tal caso será:

$$\left[\int_{\Omega_e} \rho \mathbf{N}_u^T \mathbf{N}_u dV \right] \ddot{\mathbf{U}}^e + \left[\int_{\Omega_e} \mathbf{B}^T \mathbf{C} \mathbf{B} dV \right] \mathbf{U}^e = \int_{\Omega_e} \mathbf{N}_u^T \mathbf{b} dV + \int_{\partial\Omega_e} \mathbf{N}_u^T \mathbf{f} dA + \sum_{i=1}^{i=n} \mathbf{F}_{p,i}, \quad (1.49)$$

donde i representa cada nodo donde existen fuerzas puntuales aplicadas (ver Sección 1.3 y apunte teórico de vigas).

Una expresión usual y simple para la ecuación de un elemento es la que sigue:

$$\boxed{\mathbf{M}^e \ddot{\mathbf{U}}^e + \mathbf{K}^e \mathbf{U}^e = \mathbf{F}_b^e + \mathbf{F}_f^e + \mathbf{F}_p^e}, \quad (1.50)$$

donde:

$$\mathbf{M}^e = \int_{\Omega_e} \rho \mathbf{N}_u^T \mathbf{N}_u dV, \quad \mathbf{K}^e = \int_{\Omega_e} \mathbf{B}^T \mathbf{C} \mathbf{B} dV \quad (1.51)$$

$$\mathbf{F}_b^e = \int_{\Omega_e} \mathbf{N}_u^T \mathbf{b} dV, \quad \mathbf{F}_f^e = \int_{\partial\Omega_e} \mathbf{N}_u^T \mathbf{f} dA, \quad \mathbf{F}_p^e = \sum_{i=1}^{i=n_e} \mathbf{F}_{p,i}. \quad (1.52)$$

1.3. Elemento finito de barra de dos nodos 3D

En esta sección consideraremos piezas cuya sección transversal posea dimensiones mucho menores que la longitud de las mismas, que llamaremos barras. Por tanto, idealizaremos a una barra como un elemento unidimensional, ilustrando esta idealización en la Figura 1.2.

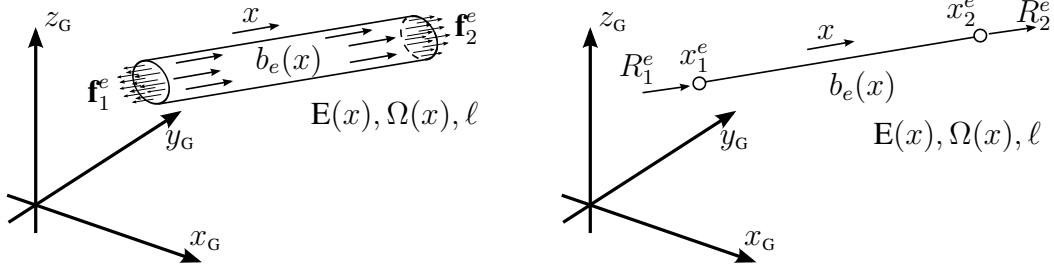


Figura 1.2: Idealización de una barra.

En la Figura 1.3 se muestra una barra con una carga de volumen $b_e(x)\mathbf{e}_x$ donde x está definido en el intervalo $I_e = [x_1^e, x_2^e]$. R_1^e y R_2^e pueden interpretarse como fuerzas de contacto o fuerzas puntuales externas aplicadas en los extremos de la barra.

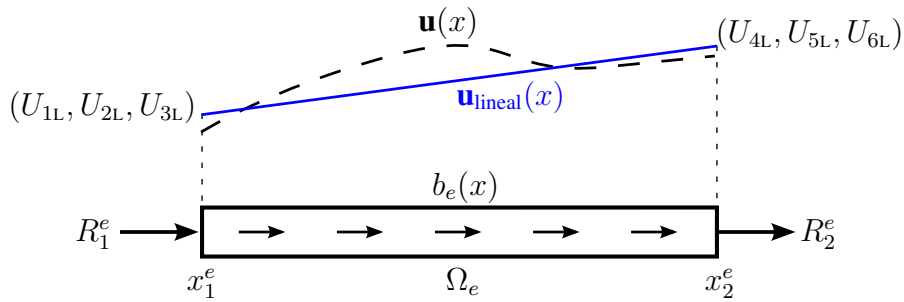


Figura 1.3: Elemento de barra.

Por la definición de barra diremos que $\mathbf{u}(x, y, z) = \mathbf{u}(x, 0, 0)$. Las coordenadas (x, y, z) serán llamadas coordenadas locales y la base ortonormal $\mathcal{B}_L = \{\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z\}$ será llamada base local (donde \mathbf{e}_x es colineal al eje de la barra). En esta sección se interpolará el campo de desplazamientos linealmente, y obtendremos entonces una solución $\mathbf{u}_{\text{lineal}}(x)$ que en principio es aproximada. Dado que se utilizan dos nodos diremos que:

$$\mathbf{u}(x, y, z) = \mathbf{N}_u \mathbf{U}_L = \begin{bmatrix} N_1(x) & 0 & 0 & N_2(x) & 0 & 0 \\ 0 & N_1(x) & 0 & 0 & N_2(x) & 0 \\ 0 & 0 & N_1(x) & 0 & 0 & N_2(x) \end{bmatrix} \mathbf{U}_L \quad (1.53)$$

donde $\mathbf{U}_L = [U_{1L} \ U_{2L} \ U_{3L} \ U_{4L} \ U_{5L} \ U_{6L}]^T$ son los desplazamientos nodales (en coordenadas locales), en principio desconocidos, y $N_1(x)$ y $N_2(x)$ son las funciones de interpolación utilizadas para la interpolación del campo de desplazamientos en el elemento ($N \neq \tilde{N}$).

Impondremos que $N_1(x_1^e) = N_2(x_2^e) = 1$ y $N_1(x_2^e) = N_2(x_1^e) = 0$ con lo cual:

$$N_1(x) = \frac{x - x_2^e}{x_1^e - x_2^e}, \quad N_2(x) = \frac{x - x_1^e}{x_2^e - x_1^e}. \quad (1.54)$$

En barras se tiene que:

$${}_{\mathcal{B}_L} \mathbf{T}(x)_{\mathcal{B}_L} = \begin{pmatrix} T_{11}(x) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow {}_{\mathcal{B}_L} \mathbf{D}(x)_{\mathcal{B}_L} = \begin{pmatrix} D_{11}(x) & 0 & 0 \\ 0 & D_{22}(x) & 0 \\ 0 & 0 & D_{33}(x) \end{pmatrix}. \quad (1.55)$$

Omitiremos la notación ${}_{\mathcal{B}} \mathbf{T}(x)_{\mathcal{B}}$, utilizando simplemente $\mathbf{T}_{\mathcal{B}}$, lo mismo con el tensor $\mathbf{D}_{\mathcal{B}}$

$$\Rightarrow U_0 = \frac{1}{2} \mathbf{T}_{\mathcal{B}_L} : \mathbf{D}_{\mathcal{B}_L} \Rightarrow \frac{1}{2} \text{tr} (\mathbf{D}_{\mathcal{B}_L}^T \mathbf{T}_{\mathcal{B}_L}) = \frac{1}{2} D_{11}(x) T_{11}(x). \quad (1.56)$$

Con lo anterior podemos ver que sólo nos interesa la entrada (1, 1) de los tensores $\mathbf{T}_{\mathcal{B}_L}$ y $\mathbf{D}_{\mathcal{B}_L}$ para resolver nuestro problema. Se tendrá entonces que $\varepsilon = D_{11}$ y $\sigma = T_{11}$. Utilizando la ecuación constitutiva, se obtiene que: $\sigma(x) = E(x) \varepsilon(x)$ (por tanto $\mathbf{C} = E(x)$) y por la relación de deformaciones y desplazamientos se cumple que:

$$\varepsilon(x) = \frac{\partial u_x}{\partial x}(x) = \frac{\partial}{\partial x} (N_1(x)U_{1L} + N_2(x)U_{4L}) = \frac{\partial N_1}{\partial x}(x)U_{1L} + \frac{\partial N_2}{\partial x}(x)U_{4L}, \quad (1.57)$$

$$\varepsilon(x) = B_1(x)U_{1L} + B_2(x)U_{4L} = \mathbf{B}U_L, \quad (1.58)$$

donde

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1(x)}{\partial x} & 0 & 0 & \frac{\partial N_2(x)}{\partial x} & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (1.59)$$

Para introducir en el modelo la fuerza de volumen $b_e(x)$ existen diferentes métodos, se puede interpolar dicha función (similar a lo que se hace con el desplazamiento) o utilizar otros métodos para el cálculo numérico de \mathbf{F}_b^e , por ejemplo cuadratura de Gauss.

Si observamos las expresiones de las Ecuaciones 1.51-1.52 se puede observar que al realizar las integrales en cada uno de los dominios que se definen, para cada elemento utilizado serían en principio diferentes las matrices obtenidas aunque utilicemos las mismas funciones de interpolación para cada elemento. Es de interés entonces construir un cambio de variable que permita realizar los cálculos de dichas expresiones de forma genérica y sencilla. Como muestra la Figura 1.4 podemos utilizar una transformación de variable, que lleva el intervalo $I_0 = [-1, 1]$ en el intervalo $I_e = [x_1^e, x_2^e]$ correspondiente al elemento número e . La transformación de variable será entonces dada por la función $\hat{x} : I_0 \rightarrow I_e$ que puede expresarse en la forma:

En general es de interés utilizar una transformación simple, tal como una lineal. Esto es:

$$\begin{aligned} \hat{x} &= a \hat{\eta} + b, \\ \hat{x}(-1) &= x_1^e, \quad \hat{x}(1) = x_2^e, \\ a &= \frac{x_2^e - x_1^e}{2} = \frac{\ell}{2}, \quad b = \frac{x_2^e + x_1^e}{2}. \end{aligned} \quad (1.60)$$

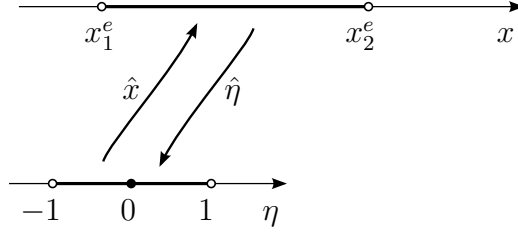


Figura 1.4: Elemento lineal.

Esta transformación será útil para realizar todas las integrales en el intervalo $[-1, 1]$. En el caso que se defina esta transformación utilizando las mismas funciones de interpolación N_1 y N_2 se dirá que se utiliza un *elemento isoparamétrico* y se llamarán *funciones de forma* a N_1 y N_2 . Será de utilidad obtener la derivada de la función \hat{x} (Jacobiana del cambio de variable) y de su inversa $\hat{\eta}$:

$$\mathbf{J} = \frac{d\hat{x}}{d\eta}, \quad \mathbf{J}^{-1} = \frac{d\hat{\eta}}{dx}. \quad (1.61)$$

Las Ecuaciones 1.51-1.52 (sin considerar en este capítulo la matriz de masa) pueden calcularse de la forma:

$$\mathbf{K}_L^e = \int_{\Omega_e} \mathbf{B}^T \mathbf{C} \mathbf{B} dV = \int_{I_e} E \Omega \mathbf{B}^T \mathbf{B} dx = \int_{I_0} J_0 E \Omega \mathbf{B}^T \mathbf{B} d\eta \quad (1.62)$$

$$\mathbf{F}_b^e = \int_{\Omega_e} \mathbf{N}_u^T \mathbf{b} dV = \int_{I_e} \Omega \mathbf{N}_u^T \mathbf{b} dx = \int_{I_0} J_0 \Omega \mathbf{N}_u^T \mathbf{b} d\eta \quad (1.63)$$

$$\mathbf{F}_p = \sum_{i=1}^{i=n} \mathbf{F}_{p,i} = [R_1^e, 0, 0, 0, 0, 0]^T + [0, 0, 0, R_2^e, 0, 0]^T \quad (1.64)$$

donde J_0 es el determinante de la matriz Jacobiana (llamado Jacobiano) del cambio de variable dado por $J_0 = |\mathbf{J}|$, en este caso $J_0 = \ell/2$. Utilizando el cambio de variable definido en la Ecuación 1.60 en la expresión de las funciones de interpolación definidas en la Ecuación 1.54 se obtiene que:

$$N_1(\eta) = \frac{1-\eta}{2}, \quad N_2(\eta) = \frac{1+\eta}{2}, \quad (1.65)$$

y para las derivadas

$$\mathbf{B} = \mathbf{J}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1(\eta)}{\partial \eta} & 0 & 0 & \frac{\partial N_2(\eta)}{\partial \eta} & 0 & 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{\ell} [-1, 0, 0, 1, 0, 0]. \quad (1.66)$$

Es común realizar una interpolación de la función \mathbf{b} en el elemento, en particular con la mismas funciones de interpolación que se utilizan para el campo de desplazamientos, supongamos entonces que $b_e(x)$ es una fuerza de volumen lineal en el elemento, con lo cual sería exacto aproximarla como $b_e(x) = N_1(x)b_1 + N_2(x)b_2 \Rightarrow \mathbf{b} = \mathbf{N}_u \mathbf{b}_e$ con

$$\mathbf{b}_e = [b_1 \ 0 \ 0 \ b_2 \ 0 \ 0]^T, \quad (1.67)$$

por lo tanto la Ecuación 1.63 tiene la expresión:

$$\mathbf{F}_b^e = \int_{I_0} J_0 \Omega \mathbf{N}_u^T \mathbf{b} \, d\eta = \int_{I_0} J_0 \Omega \mathbf{N}_u^T \mathbf{N}_u \, d\eta \mathbf{b}_e. \quad (1.68)$$

Utilizando la expresión de la Ecuación 1.62 junto con la Ecuación 1.66 se tiene la expresión de la matriz de rigidez del elemento \mathbf{K}^e :

$$\mathbf{B}^T \mathbf{B} = \frac{1}{\ell^2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{K}_L^e = \frac{E\Omega}{\ell} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (1.69)$$

donde se supuso que E y Ω no varían a lo largo de la barra.

$$\mathbf{N}_u^T \mathbf{N}_u = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} (1-\eta)^2 & 0 & 0 & 1-\eta^2 & 0 & 0 \\ 0 & (1-\eta)^2 & 0 & 0 & 1-\eta^2 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\eta)^2 & 0 & 0 & 1-\eta^2 \\ 1-\eta^2 & 0 & 0 & (1+\eta)^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1-\eta^2 & 0 & 0 & (1+\eta)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\eta^2 & 0 & 0 & (1+\eta)^2 \end{pmatrix} \quad (1.70)$$

por lo tanto:

$$\mathbf{F}_b^e = \frac{\Omega \ell}{6} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ 0 \\ 0 \\ b_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{si } b_1 = b_2 = b \Rightarrow \mathbf{F}_b^e = b \frac{\Omega \ell}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (1.71)$$

Ejercicio 2.1. ¿Qué modificaciones se deben realizar a los cálculos antes propuestos en caso de que el área de la sección y/o el material de la barra variaran a lo largo de la misma?

Notar que si bien una barra es un elemento unidimensional se consideró el caso 3D debido a que las estructuras construidas con barras (reticulados) son 3D y por lo que se verá en las siguientes secciones son útiles las consideraciones de esta sección. Sin embargo, para el estudio de una barra y/o de elementos estructurales unidimensionales que puedan ser modelados bajo algunas hipótesis como barras (ej: pilares) es útil ver que en el caso 1D los resultados de esta sección se simplifican por:

$$\mathbf{N}_u = [N_1(x) \quad N_2(x)], \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1(x)}{\partial x} & \frac{\partial N_2(x)}{\partial x} \end{bmatrix}, \quad (1.72)$$

$$\mathbf{K}_L^e = \frac{E\Omega}{\ell} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{U} = \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F}_b^e = b \frac{\Omega \ell}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (1.73)$$

1.3.1. Cambio de coordenadas

Es de interés obtener los desplazamientos nodales en un sistema de coordenadas globales. Para esto debe realizarse un cambio de coordenadas, entre \mathcal{B}_L y $\mathcal{B}_G = \{\mathbf{e}_{x_G}, \mathbf{e}_{y_G}, \mathbf{e}_{z_G}\}$. Es preciso utilizar el concepto de cambio de base:

$$\text{coord}_{\mathcal{B}_G}(\mathbf{x}) = {}_{\mathcal{B}_G}(I)_{\mathcal{B}_L} \text{coord}_{\mathcal{B}_L}(\mathbf{x}). \quad (1.74)$$

Donde I es la transformación identidad. La i -ésima columna de la matriz ${}_{\mathcal{B}_G}(I)_{\mathcal{B}_L}$ son las coordenadas del i -ésimo elemento de la base \mathcal{B}_L en la base \mathcal{B}_G . Puede ser útil entonces utilizar el esquema representado en la siguiente imagen.

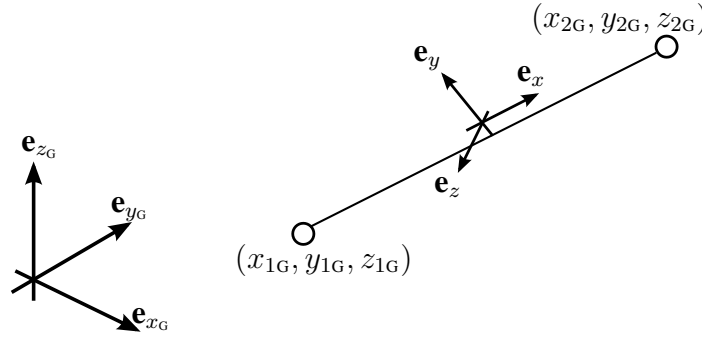


Figura 1.5: Elemento de barra - cambio de base.

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_x &= \frac{(x_{2G}, y_{2G}, z_{2G}) - (x_{1G}, y_{1G}, z_{1G})}{\ell} = \frac{(x_{2G} - x_{1G})\mathbf{e}_{x_G} + (y_{2G} - y_{1G})\mathbf{e}_{y_G} + (z_{2G} - z_{1G})\mathbf{e}_{z_G}}{\ell} \\ &= \frac{\Delta_x}{\ell}\mathbf{e}_{x_G} + \frac{\Delta_y}{\ell}\mathbf{e}_{y_G} + \frac{\Delta_z}{\ell}\mathbf{e}_{z_G}, \end{aligned} \quad (1.75)$$

Por lo tanto podemos decir que:

$$\text{coord}_{\mathcal{B}_G}(\mathbf{e}_x) = \frac{(\Delta_x, \Delta_y, \Delta_z)^T}{\ell}. \quad (1.76)$$

Para el caso de barras las restantes componentes de la base \mathcal{B}_L son arbitrarias, por tanto podemos definirlas con la única condición de que dicha base sea ortonormal:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_y &= -\frac{\Delta_y}{\ell_{xy}}\mathbf{e}_{x_G} + \frac{\Delta_x}{\ell_{xy}}\mathbf{e}_{y_G} + 0\mathbf{e}_{z_G}, \\ \mathbf{e}_z &= -\frac{\Delta_x\Delta_z}{\ell_{xy}\ell}\mathbf{e}_{x_G} - \frac{\Delta_y\Delta_z}{\ell_{xy}\ell}\mathbf{e}_{y_G} + \frac{\ell_{xy}}{\ell}\mathbf{e}_{z_G}, \end{aligned} \quad (1.77)$$

siendo $\ell = \sqrt{\Delta_x^2 + \Delta_y^2 + \Delta_z^2}$ y $\ell_{xy} = \sqrt{\Delta_x^2 + \Delta_y^2}$ la proyección de ℓ en el plano $z_G = 0$. Para lo anterior se supone que $\ell_{xy} \neq 0$. No necesariamente siempre debe cumplirse que $\ell_{xy} \neq 0$, en tal caso se define

$$\mathbf{e}_x = \mathbf{e}_{z_G}, \quad \mathbf{e}_y = \mathbf{e}_{x_G}, \quad \mathbf{e}_z = \mathbf{e}_{y_G}. \quad (1.78)$$

Por lo anterior:

$$\text{Si } \Delta_x^2 = \Delta_y^2 = 0$$

$$\mathcal{B}_G(I)_{\mathcal{B}_L} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (1.79)$$

en el caso contrario

$$\mathcal{B}_G(I)_{\mathcal{B}_L} = \begin{pmatrix} \frac{\Delta_x}{\ell} & -\frac{\Delta_y}{\ell_{xy}} & -\frac{\Delta_x \Delta_z}{\ell_{xy} \ell} \\ \frac{\Delta_y}{\ell} & \frac{\Delta_x}{\ell_{xy}} & -\frac{\Delta_y \Delta_z}{\ell_{xy} \ell} \\ \frac{\Delta_z}{\ell} & 0 & \frac{\ell_{xy}}{\ell} \end{pmatrix}. \quad (1.80)$$

Diremos entonces que el vector de desplazamientos generalizados \mathbf{U}_G en las coordenadas globales y el vector de fuerzas \mathbf{F}_G en las coordenadas globales son:

$$\mathbf{U}_G = \mathbf{Q} \mathbf{U}_L, \quad \mathbf{F}_G = \mathbf{Q} \mathbf{F}_L, \quad (1.81)$$

donde

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} \mathcal{B}_G(I)_{\mathcal{B}_L} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathcal{B}_G(I)_{\mathcal{B}_L} \end{pmatrix}, \quad (1.82)$$

\mathbf{Q} es ortogonal con lo cual $\mathbf{Q}^T = \mathbf{Q}^{-1}$. Cabe destacar que para cada elemento debe calcularse un \mathbf{Q} diferente. Con lo anterior se tiene que la expresión en coordenadas globales de la Ecuación 1.50 es:

$$\mathbf{Q} \mathbf{K}_L^e \mathbf{Q}^T \mathbf{U}_G = \mathbf{F}_{bG}^e + \mathbf{F}_{pG}, \quad (1.83)$$

equivalente a:

$$\mathbf{K}_G^e \mathbf{U}_G = \mathbf{F}_{bG}^e + \mathbf{F}_{pG}. \quad (1.84)$$

La matriz \mathbf{Q} generalmente es cuadrada y cumple ser ortogonal, sin embargo en algunas formulaciones esto puede no ser así. Como ejemplo de esto puede citarse la formulación más simple para cascaras (elemento plano y elemento de losa) donde en coordenadas locales son 5 grados de libertad y en coordenadas globales son 6 y por tanto \mathbf{Q} no es cuadrada.

1.3.2. Grados de libertad y ensamblaje de matriz de rigidez

Es claro que en coordenadas globales \mathbf{U}_G en principio tiene 6 valores desconocidos, 3 por cada nodo del elemento, podemos entonces introducir el concepto de grado de libertad nodal. Diremos, en el caso de barras, que cada nodo tiene n_D grados de libertad, siendo n_D la dimensión que estemos considerando (3, 2 o 1). Para este caso cada elemento tendrá $2 n_D$ grados de libertad.

Es importante utilizar entonces el concepto de grado de libertad del elemento para la interpretación de las matrices \mathbf{M}_G^e y \mathbf{K}_G^e . Para la matriz \mathbf{K}_G^e diremos que las entradas ij representan una rigidez que relaciona una fuerza aplicada en el grado de libertad i con un desplazamiento en el grado de libertad j .

En los casos en que tengamos más de una barra es aún más importante este concepto debido a que los grados de libertad nos permitirán fácilmente obtener la matriz de rigidez y de masa de toda la estructura.

Supongamos tenemos una estructura como se muestra en la Figura 1.6. La misma esta incluida en el plano $z = 0$ y por tanto se podría trabajar como un problema plano (será abordado como un problema en 3 dimensiones igualmente). Cada nodo tendrá 3 grados de libertad y cada elemento tendrá 6 grados de libertad, los cuales pueden enumerarse a continuación:

- $\text{gdl}_{\text{nod}_1} = (1, 2, 3)$, $\text{gdl}_{\text{nod}_2} = (4, 5, 6)$ y $\text{gdl}_{\text{nod}_3} = (7, 8, 9)$
- $\text{gdl}_{\text{elem}_1} = (1, 2, 3, 4, 5, 6)$ y $\text{gdl}_{\text{elem}_2} = (4, 5, 6, 7, 8, 9)$

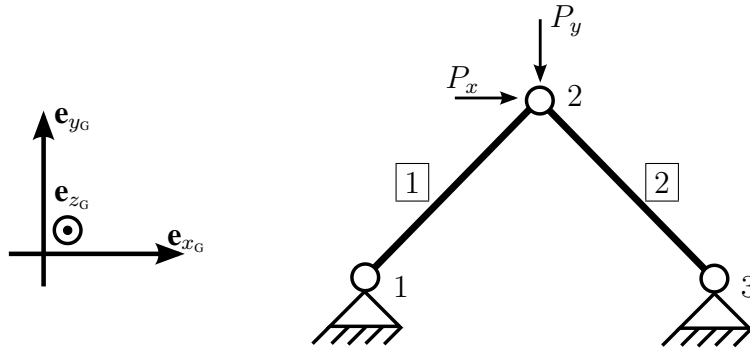


Figura 1.6: 2 elementos de barra.

De forma genérica podrían calcularse los grados de libertad del nodo i como:

$$\begin{aligned} \text{Si } n_D = 3 &\Rightarrow \text{gdl}_{\text{nod}_i} = (n_D i - 2, n_D i - 1, n_D i) \\ \text{Si } n_D = 2 &\Rightarrow \text{gdl}_{\text{nod}_i} = (n_D i - 1, n_D i) \\ \text{Si } n_D = 1 &\Rightarrow \text{gdl}_{\text{nod}_i} = n_D i \end{aligned} \quad (1.85)$$

Los grados de libertad de un elemento dependen de los grados de libertad de los nodos que se encuentran en él y de la orientación del elemento, supongamos que el nodo inicial del elemento j es i_j y el final es f_j , se tiene así que:

$$\text{gdl}_{\text{elem}_j} = \left(\text{gdl}_{\text{nod}_{i_j}}, \text{gdl}_{\text{nod}_{f_j}} \right) \quad (1.86)$$

Con la numeración antes vista se pueden escribir las ecuaciones de rigidez de cada elemento como

sigue, elemento 1:

$$\mathbf{K}_G^1 \mathbf{U}_G^1 = \begin{pmatrix} K_{11}^1 & K_{12}^1 & K_{13}^1 & K_{14}^1 & K_{15}^1 & K_{16}^1 \\ K_{12}^1 & K_{22}^1 & K_{23}^1 & K_{24}^1 & K_{25}^1 & K_{26}^1 \\ K_{13}^1 & K_{23}^1 & K_{33}^1 & K_{34}^1 & K_{35}^1 & K_{36}^1 \\ K_{14}^1 & K_{24}^1 & K_{34}^1 & K_{44}^1 & K_{45}^1 & K_{46}^1 \\ K_{15}^1 & K_{25}^1 & K_{35}^1 & K_{45}^1 & K_{55}^1 & K_{56}^1 \\ K_{16}^1 & K_{26}^1 & K_{36}^1 & K_{46}^1 & K_{56}^1 & K_{66}^1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_{1G} \\ U_{2G} \\ U_{3G} \\ U_{4G} \\ U_{5G} \\ U_{6G} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{1G}^1 \\ F_{2G}^1 \\ F_{3G}^1 \\ F_{4G}^1 \\ F_{5G}^1 \\ F_{6G}^1 \end{pmatrix} = \mathbf{F}_G^1, \quad (1.87)$$

elemento 2:

$$\mathbf{K}_G^2 \mathbf{U}_G^2 = \begin{pmatrix} K_{44}^2 & K_{45}^2 & K_{46}^2 & K_{47}^2 & K_{48}^2 & K_{49}^2 \\ K_{45}^2 & K_{55}^2 & K_{56}^2 & K_{57}^2 & K_{58}^2 & K_{59}^2 \\ K_{46}^2 & K_{56}^2 & K_{66}^2 & K_{67}^2 & K_{68}^2 & K_{69}^2 \\ K_{47}^2 & K_{57}^2 & K_{67}^2 & K_{77}^2 & K_{78}^2 & K_{79}^2 \\ K_{48}^2 & K_{58}^2 & K_{68}^2 & K_{78}^2 & K_{88}^2 & K_{89}^2 \\ K_{49}^2 & K_{59}^2 & K_{69}^2 & K_{79}^2 & K_{89}^2 & K_{99}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_{4G} \\ U_{5G} \\ U_{6G} \\ U_{7G} \\ U_{8G} \\ U_{9G} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{4G}^2 \\ F_{5G}^2 \\ F_{6G}^2 \\ F_{7G}^2 \\ F_{8G}^2 \\ F_{9G}^2 \end{pmatrix} = \mathbf{F}_G^2. \quad (1.88)$$

Usando de factor común los términos U_{4G} , U_{5G} y U_{6G} se puede obtener la siguiente expresión:

$$\begin{pmatrix} K_{11}^1 & K_{12}^1 & K_{13}^1 & K_{14}^1 & K_{15}^1 & K_{16}^1 & 0 & 0 & 0 \\ K_{12}^1 & K_{22}^1 & K_{23}^1 & K_{24}^1 & K_{25}^1 & K_{26}^1 & 0 & 0 & 0 \\ K_{13}^1 & K_{23}^1 & K_{33}^1 & K_{34}^1 & K_{35}^1 & K_{36}^1 & 0 & 0 & 0 \\ K_{14}^1 & K_{24}^1 & K_{34}^1 & K_{44}^1 + K_{44}^2 & K_{45}^1 + K_{45}^2 & K_{46}^1 + K_{46}^2 & K_{47}^2 & K_{48}^2 & K_{49}^2 \\ K_{15}^1 & K_{25}^1 & K_{35}^1 & K_{45}^1 + K_{45}^2 & K_{55}^1 + K_{55}^2 & K_{56}^1 + K_{56}^2 & K_{48}^2 & K_{58}^2 & K_{68}^2 \\ K_{16}^1 & K_{26}^1 & K_{36}^1 & K_{46}^1 + K_{46}^2 & K_{56}^1 + K_{56}^2 & K_{66}^1 + K_{66}^2 & K_{49}^2 & K_{59}^2 & K_{69}^2 \\ 0 & 0 & 0 & K_{47}^2 & K_{57}^2 & K_{67}^2 & K_{77}^2 & K_{78}^2 & K_{79}^2 \\ 0 & 0 & 0 & K_{48}^2 & K_{58}^2 & K_{68}^2 & K_{78}^2 & K_{88}^2 & K_{89}^2 \\ 0 & 0 & 0 & K_{49}^2 & K_{59}^2 & K_{69}^2 & K_{79}^2 & K_{89}^2 & K_{99}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_{1G} \\ U_{2G} \\ U_{3G} \\ U_{4G} \\ U_{5G} \\ U_{6G} \\ U_{7G} \\ U_{8G} \\ U_{9G} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{1G}^1 \\ F_{2G}^1 \\ F_{3G}^1 \\ F_{4G}^1 + F_{4G}^2 \\ F_{5G}^1 + F_{5G}^2 \\ F_{6G}^1 + F_{6G}^2 \\ F_{7G}^2 \\ F_{8G}^2 \\ F_{9G}^2 \end{pmatrix} \quad (1.89)$$

El vector de fuerzas nodales puede traducirse en:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_G &= (F_{1G}^1, F_{2G}^1, F_{3G}^1, F_{4G}^1 + F_{4G}^2, F_{5G}^1 + F_{5G}^2, F_{6G}^1 + F_{6G}^2, F_{7G}^2, F_{8G}^2, F_{9G}^2)^T \\ &= (R_{1G}, R_{2G}, R_{3G}, P_x, -P_y, R_{6G}, R_{7G}, R_{8G}, R_{9G})^T, \end{aligned} \quad (1.90)$$

siendo así expresado en términos de las reacciones en los apoyos, R_{iG} , y las fuerzas externas sobre la estructura (el nodo 2 esta apoyado según \mathbf{e}_z). Se tiene entonces un sistema de ecuaciones que se puede representar como $\mathbf{K}_G \mathbf{U}_G = \mathbf{F}_G$. Por lo dicho en la Sección 1.2.1, “donde se conocen los desplazamientos no se conocen las fuerzas de superficie y viceversa”, las entradas 1, 2, 3, 6, 7, 8 y 9 de \mathbf{U}_G deben ser conocidas. En este caso es claro ver que dichas entradas deben ser nulas debidas al apoyo fijo, con lo cual:

$$\mathbf{U}_G = (0, 0, 0, U_{4G}, U_{5G}, 0, 0, 0, 0)^T. \quad (1.91)$$

En el sistema de la Ecuación 1.89 la matriz \mathbf{K}_G es no invertible, su determinante es nulo, esto puede verse utilizando las expresiones de las Ecuaciones 1.69 y 1.82. Al imponer las condiciones

de borde, dadas por la Ecuación 1.91 se obtiene lo que llamaremos sistema reducido que si es compatible determinado:

$$\begin{pmatrix} K_{44}^1 + K_{44}^2 & K_{45}^1 + K_{45}^2 \\ K_{45}^1 + K_{45}^2 & K_{55}^1 + K_{55}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_{4G} \\ U_{5G} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_x \\ -P_y \end{pmatrix} \quad (1.92)$$

A los grados de libertad 4 y 5 se los llama “grados de libertad libres” y a los restantes “grados de libertad fijos” o más genéricamente “grados de libertad conocidos” (podría haber desplazamientos impuestos diferentes de 0).

Las reacciones se obtienen como

$$\begin{pmatrix} R_{1G} \\ R_{2G} \\ R_{3G} \\ R_{6G} \\ R_{7G} \\ R_{8G} \\ R_{9G} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K_{14}^1 & K_{15}^1 \\ K_{24}^1 & K_{25}^1 \\ K_{34}^1 & K_{35}^1 \\ K_{46}^1 + K_{46}^2 & K_{56}^1 + K_{56}^2 \\ K_{47}^2 & K_{57}^2 \\ K_{48}^2 & K_{58}^2 \\ K_{49}^2 & K_{59}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_{4G} \\ U_{5G} \end{pmatrix}. \quad (1.93)$$

En los códigos es útil separar la matriz de rigidez según grados de libertad libres y conocidos. Esto se puede resumir como

$$\mathbf{KU} = \begin{pmatrix} \mathbf{K}_{lib,lib} & \mathbf{K}_{lib,con} \\ \mathbf{K}_{con,lib} & \mathbf{K}_{con,con} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{U}_{lib} \\ \mathbf{U}_{con} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{F}_{lib} \\ \mathbf{F}_{con} \end{pmatrix} = \mathbf{F}, \quad (1.94)$$

donde

$$\mathbf{K}_{lib,lib} = \mathbf{K}(\text{gdl lib}, \text{gdl lib}), \quad \mathbf{K}_{lib,con} = \mathbf{K}(\text{gdl lib}, \text{gdl con}), \quad (1.95)$$

$$\mathbf{K}_{con,lib} = \mathbf{K}(\text{gdl con}, \text{gdl lib}), \quad \mathbf{K}_{con,con} = \mathbf{K}(\text{gdl con}, \text{gdl con}), \quad (1.96)$$

$$\mathbf{U}_{lib} = \mathbf{U}(\text{gdl lib}), \quad \mathbf{U}_{con} = \mathbf{U}(\text{gdl con}), \quad \mathbf{F}_{lib} = \mathbf{F}(\text{gdl lib}), \quad \mathbf{F}_{con} = \mathbf{F}(\text{gdl con}), \quad (1.97)$$

siendo “gdl lib” los grados de libertad con desplazamiento libre y “gdl con” los grados de libertad con desplazamiento conocido. $\mathbf{K}_{lib,lib}$ se suele llamar “matriz de rigidez reducida”.

1.3.3. Utilización de Octave

A continuación, a modo de ejemplo, se resolverá una estructura isostática de simple resolución por diversos métodos. La geometría de la misma se detalla en la Figura 1.7, las barras 1, 2 y 3 pertenecen a un tetraedro regular de arista de largo ℓ . Todas las barras tienen la misma sección uniforme Ω y están constituidas del mismo material de módulo de Young E . En el nodo 3, único con coordenada z diferente de 0, se aplica una carga de valor P orientada según la Figura 1.7 (según $-\mathbf{e}_{z_G}$).

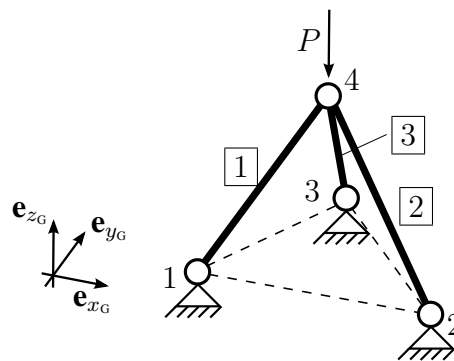


Figura 1.7: Ejemplo utilizando Octave.

Utilizando el principio del trabajo virtual se puede obtener el desplazamiento vertical del nodo 4 de forma sencilla:

$$v = \frac{1}{2} \frac{P\ell}{E\Omega} \quad \text{según } -\mathbf{e}_{z_G}, \quad (1.98)$$

si $P = 10 \text{ kN}$, $\ell = 1 \text{ m}$, $E = 200 \text{ GPa}$ y $\Omega = 0.01 \text{ m}^2$ se tiene que:

$$v = 2.5 \times 10^{-6} \text{ m} \quad \text{según } -\mathbf{e}_{z_G}. \quad (1.99)$$

Para la realización del script en Octave, se deben definir:

- materiales,
- geometrías,
- coordenadas de nodos,
- conectividad de elementos.

```
% Materiales: Todas las barras el mismo material
E = 200e9; % 200 GPa = 200000000000 N/m2
```

```
% Sección: Todas las barras con la misma sección
A = 0.01; % 0.01m2
L = 1; % 1m
```

```
% Coordenadas de los 4 nodos:
%      X (m)      Y (m)      Z (m)
```



```

Mnod = [ 0          0          0;...
         L          0          0;...
         L/2      L*sqrt(3)/2      0;...
         L/2      L/(2*sqrt(3))  L*sqrt(2)/sqrt(3)];

```

```

% Matriz de conectividad:
%           Ninicial Nfinal
Mconnect = [ 1      4;...
             2      4;...
             3      4];

```

Luego se deben calcular las matrices de giro para cada barra, la matriz de rigidez en coordenadas globales para cada una de ellas y el posterior ensamblado de las mismas en la matriz de rigidez global de la estructura. Una estructura de barras de n nodos (en las que se utilicen elementos de 2 nodos) tendrá una matriz de rigidez de tamaño $3n \times 3n$.

```

% Definimos el tamaño de la matriz global total KG:
KG = zeros(3*4,3*4);
for elem = 1:3
    %
    %Nodo inicial y final del elemento
    Ni = Mconnect(elem,1); Nf = Mconnect(elem,2);
    %
    % Coordenadas del elemento y largo del mismo
    X_elem = [Mnod(Ni,1),Mnod(Nf,1)]; Y_elem = [Mnod(Ni,2),Mnod(Nf,2)]; Z_elem = [Mnod(Ni,3),Mnod(Nf,3)];
    DeltaX = X_elem(2)-X_elem(1); DeltaY = Y_elem(2)-Y_elem(1); DeltaZ = Z_elem(2)-Z_elem(1);
    l = sqrt( DeltaX^2 + DeltaY^2 + DeltaZ^2 ); l_xy = sqrt( DeltaX^2 + DeltaY^2 );
    %
    % Grados de libertad del elemento
    gdlelem = [3*Ni-2 3*Ni-1 3*Ni 3*Nf-2 3*Nf-1 3*Nf];
    %
    % se calcula la matriz cambio de base
    if l_xy == 0
        %
        Icb = [0 1 0; 0 0 1; 1 0 0];
        %
    else
        %
        Icb = [ DeltaX/l      -DeltaY/l_xy -DeltaX*DeltaZ/l_xy/l;...
              DeltaY/l      DeltaX/l_xy -DeltaY*DeltaZ/l_xy/l;...
              DeltaZ/l          0          l_xy/l];
        %
    end
    % Matriz de giro
    O = zeros(3,3); % Matriz de ceros de 3x3
    Q = [Icb  0;...
         0 Icb];
    %
    % Matriz de rigidez del elemento en coordenadas locales:
    KLelem = E*A/l*[ 1 0 0 -1 0 0;...
                    0 0 0 0 0 0;...
                    0 0 0 0 0 0;...
                    -1 0 0 1 0 0;...
                    0 0 0 0 0 0;...
                    0 0 0 0 0 0];
    % Matriz de rigidez del elemento en coordenadas globales:
    KGelem = Q*KLelem*Q';
    % Alocamos la matriz KGelem en el lugar correspondiente en KG
    KG(gdlelem,gdlelem) = KG(gdlelem,gdlelem) + KGelem ;
    %
end

```

En lo anterior se utilizaron las expresiones ya definidas en la Sección 1.3. A continuación se resuelve el sistema lineal en función de los “grados de libertad libres” de la estructura.

```
% Se definen los grados de libertad fijos/conocidos
% Los nodos 1, 2 y 3 están apoyados por tanto:
gdlfijos = [1 2 3 4 5 6 7 8 9];
% Los grados de libertad libres son los restantes
gdllibres = [1:3*4];
gdllibres(gdlfijos) = []; % sacamos los fijos
% Matriz reducida:
Kreducida = KG(gdllibres,gdllibres);
% Definimos el vector de fuerzas nodales externas:
F = [0 0 -10000]'; % 10000N en dirección -e_z
%
Ulibres = Kreducida\F;
Utotal = zeros(3*4,1); % los desplazamientos conocidos son ceros en este caso
Utotal(gdllibres) = Ulibres;
%
Ftotal = KG*Utotal;
%
% Reacciones en apoyos:
R = Ftotal(gdlfijos); % no hay fuerzas externas aplicadas en los apoyos
```

Luego de compilar el script en Octave se puede utilizar en la consola el comando `Utotal(12)` para obtener el desplazamiento vertical del nodo 4.

```
octave:22> Utotal(12)
ans = -2.5000e-006
```

Ejercicio 2.2. Junto con el script presentado en la Sección 1.3.3.

- utilizando la función **plot** de Octave realice el gráfico de la configuración indeformada y deformada de la estructura dada por la Figura 1.7.
- Calcule en el script antes presentado las deformaciones y tensiones de cada barra.
- En caso de que el material de cada barra fuera diferente, ¿cómo modificaría el script? (considere que el material es uniforme en cada barra).

1.3.4. Utilización de SAP2000

Para realizar el mismo ejemplo que el presentado en la Sección 1.7 pero en SAP 2000 se deben realizar pasos similares a los que se hicieron en la programación anterior. Primeramente se deben definir los materiales, para esto se debe seleccionar Define-->Materials... Luego seleccionar Add New Material....

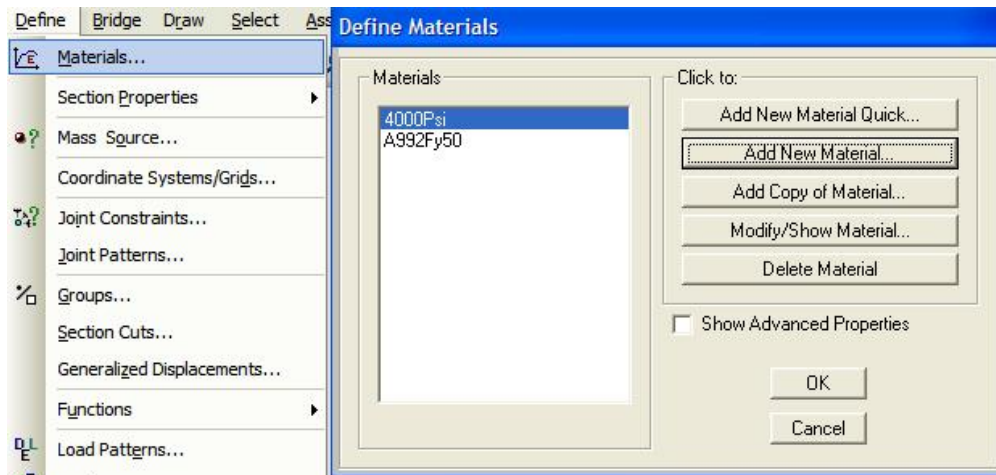


Figura 1.8: Definir materiales nuevos.

En la Figura 1.8 se elige definir un nuevo material.

En la Figura 1.9 se deben asignar las propiedades del nuevo material. En nuestro caso las barras serán de acero y por ese motivo elegimos Steel como ecuación constitutiva del material. Se define el nombre Acero y se asignan las propiedades que correspondan, en nuestro caso solo es necesario definir el módulo de Young.

El color que aparece al lado del nombre definido puede modificarse, esto puede ser útil de tenerlo en cuenta en caso de tener un problema en el que hayan muchos materiales dado que existen opciones de visualización útiles al respecto (se verá en las clases prácticas).

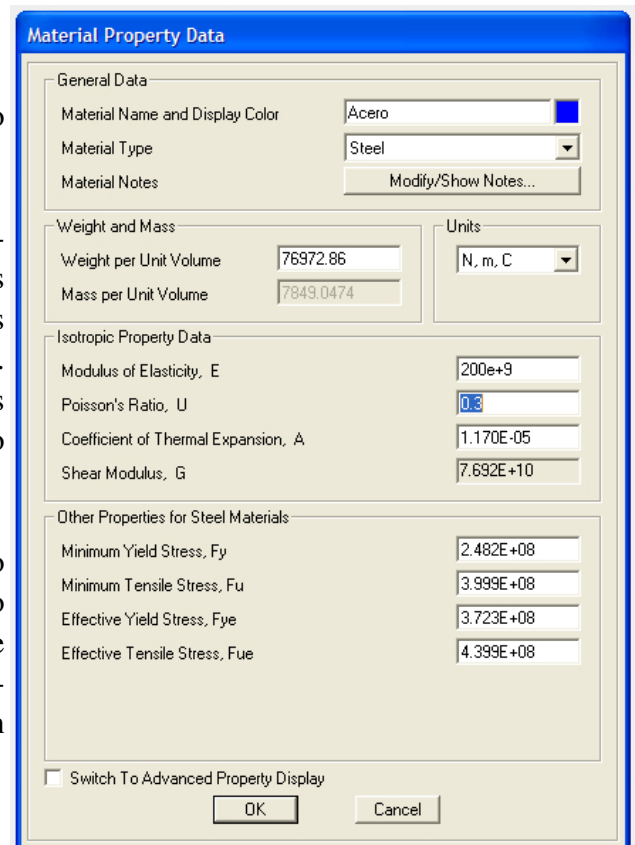


Figura 1.9: Generación del nuevo material.

Lo siguiente a definir en SAP es la geometría de la estructura, para esto es preciso saber que tipos de elementos se utilizarán. En SAP existe el tipo de elemento `Frame`, el cual será el que se utilice para barras, vigas y pórticos.

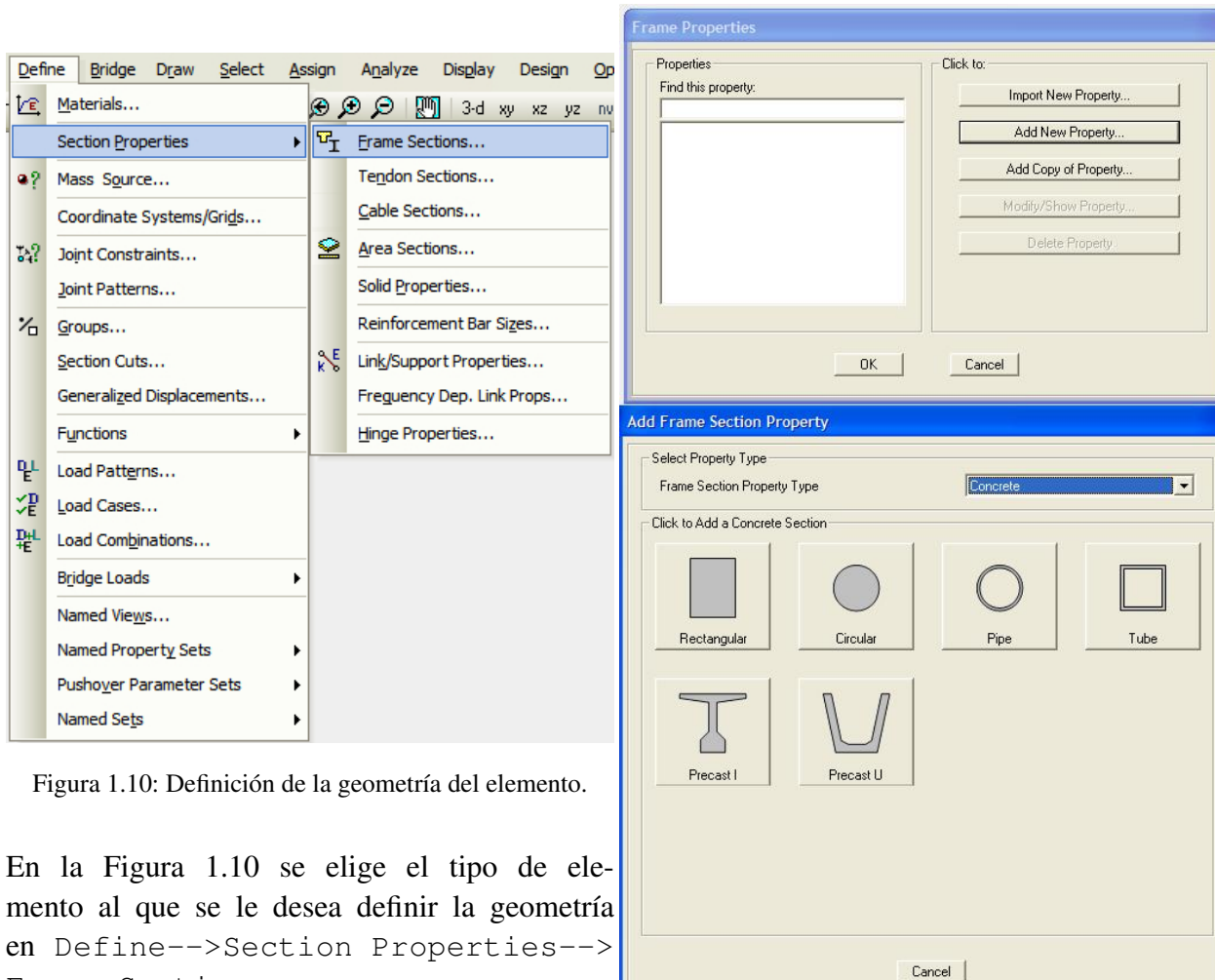


Figura 1.10: Definición de la geometría del elemento.

En la Figura 1.10 se elige el tipo de elemento al que se le desea definir la geometría en `Define-->Section Properties-->Frame Sections`.

Figura 1.11: Definición de la geometría.

En la Figura 1.11 se elige agregar una nueva propiedad con `Add New Property`, luego se debe definir el tipo de sección como se muestra en la Figura 1.11. Se elige `Concrete` dado que para este “material” está definida la sección rectangular. Aquí el tipo de material es importante únicamente si luego se deseara realizar diseño, no es nuestro caso y por ese motivo no es relevante. Elijiendo la sección rectangular se tiene la Figura 1.12 donde además de indicar el nombre (`Seccion` en nuestro caso) se indican las dimensiones de la sección. Aquí se debe asignar cual es el material, se había definido uno llamado `Acero`. Como se aprecia en la Figura 1.12 hay más opciones dentro de esta ventana, en este capítulo no se entrará en detalles sobre ellas.

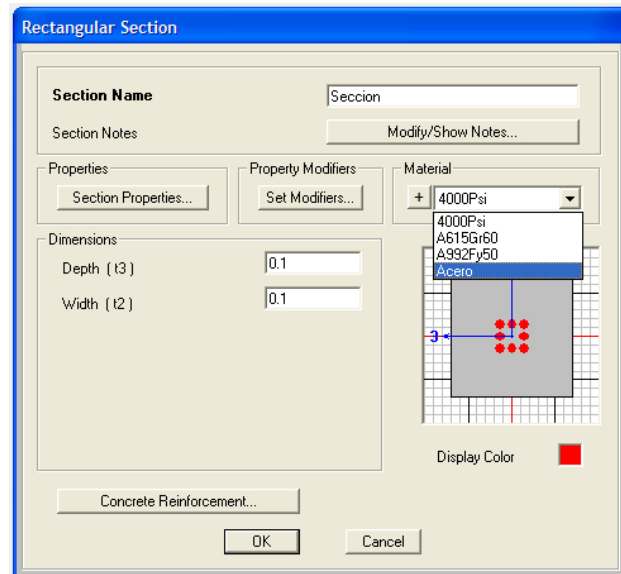


Figura 1.12: Definición de la nueva geometría.

Luego de definidos los materiales y geometría se debe realizar el esquema de la estructura, lo que anteriormente fue definir coordenadas de nodos y conectividad. A diferencia de lo realizado en Octave en SAP2000 se tiene una interfaz gráfica más “amigable” pudiendo dibujar la estructura. En este caso se definirá nodo a nodo utilizando una función llamada *Special Joint*.

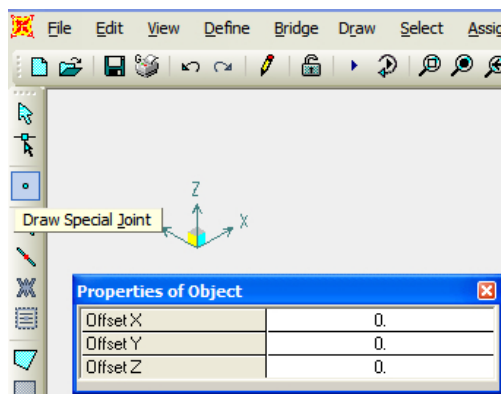


Figura 1.13: Dibujar nodos en SAP2000.

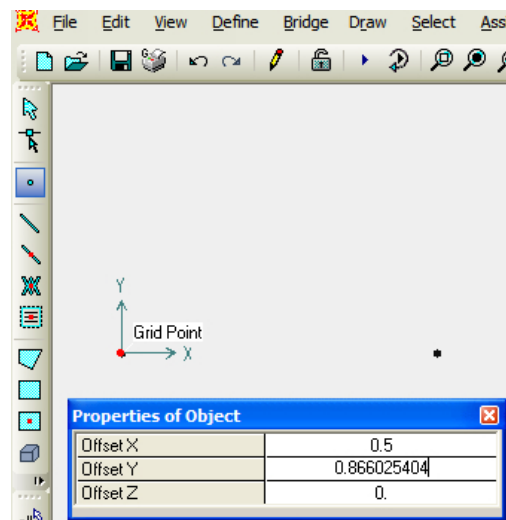


Figura 1.14: Definición de todos los nodos de la estructura.

En la figuras anteriores (1.13 y 1.14) se definen todos los nodos utilizando el *snap* a la grilla. Notar aquí que las coordenadas que en Octave se ingresaron como $\text{sqrt}(3)$ (lo equivalente a $\sqrt{3}$) no es posible mediante esta interfaz en SAP2000.

Antes de realizar la conectividad puede ser interesante mencionar algunos aspectos de la visualización de SAP. Existen muchas variables para tener una visualización adecuada de la estructura, en nuestro caso puede (dado que es un ejemplo académico y sencillo) ser interesante visualizar los

números de nodo (joint label), número de barra (frame label) y tal vez no ver los ejes x, y y z. Para lo anterior es útil la Figura 1.15, donde se quitan los ejes desde View-->Show Axes y se agregan los números de nodos desde Set Display Options... tildando la opción labels dentro de la columna referida a Joints.

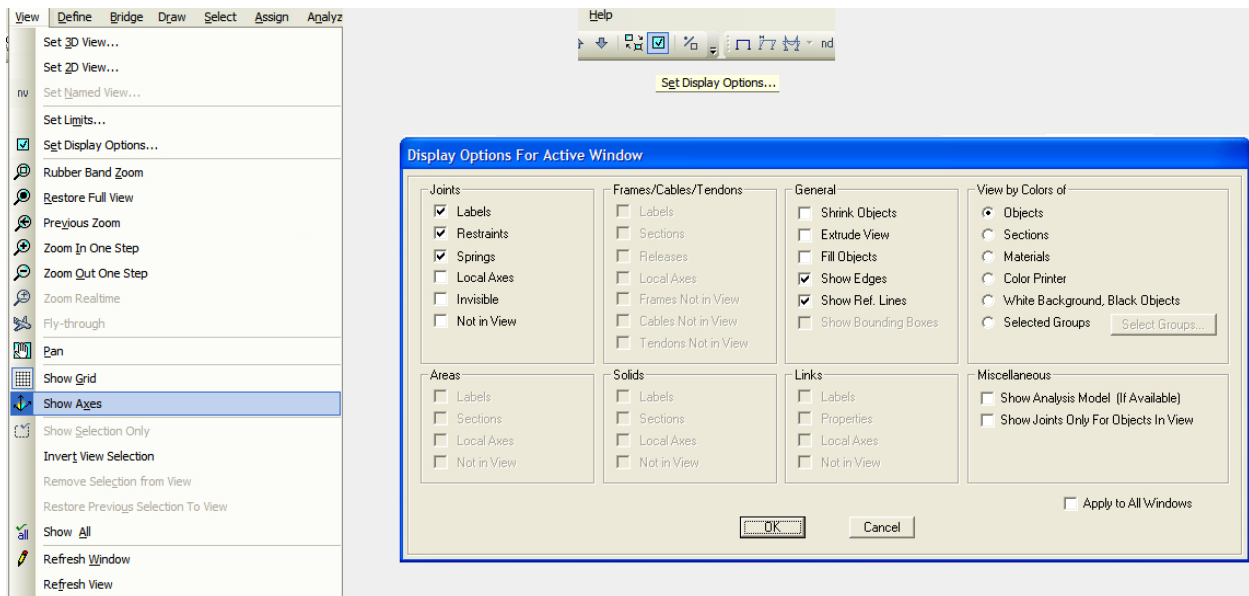


Figura 1.15: Definición de parte de la visualización.

En la Figura 1.15 no se puede setear para ver los números de los elementos debido a que aún no se han dibujado.

Para dibujar los elementos se utiliza Draw Frame/Cable Element.

Es importante controlar que la ventana Properties of Object tenga los datos que nosotros deseamos, ver Figura 1.16¹. En este caso simplemente interesa que la sección sea la definida anteriormente, ver Figura 1.12. Luego se dibujan los elementos utilizando el snap del programa.

¹En impresión en blanco y negro la Figura 1.16 puede no verse correctamente debido a que las barras son amarillas.

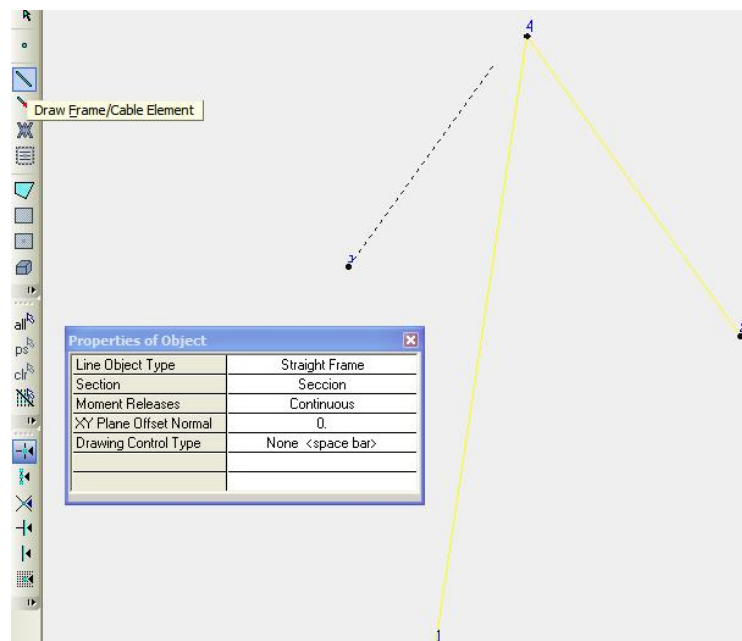


Figura 1.16: Dibujo de elementos.

Una vez dibujados los elementos se deben asignar restricciones (condiciones en desplazamiento) y cargas aplicadas en la estructura. Para los desplazamientos se seleccionan los nodos que tengan restricciones, en este caso son los nodos 1, 2 y 3. A continuación se utiliza la opción Assign-->Joint-->Restraints, ver Figura 1.17. Seguidamente se debe indicar que grados de libertad, en coordenadas locales¹, son los que se restringen, en nuestro caso son los 3 desplazamientos (no giros) llamadas Translation en SAP, ver Figura 1.18.

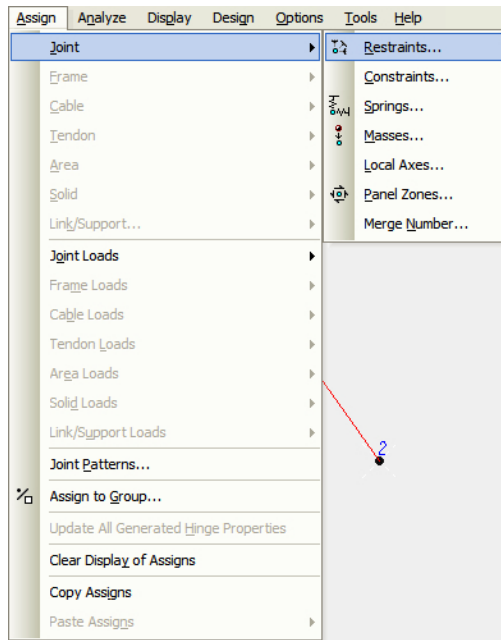


Figura 1.17: Asignar restricciones en SAP2000.

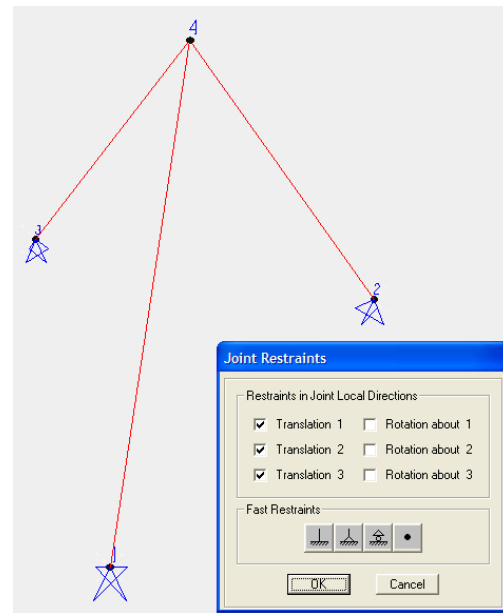


Figura 1.18: Asignar restricciones en nodos.

Para las figuras anteriores se indicó que la visualización sea según el color asignado a las secciones, para esto se utilizó la opción Sections de la columna View by Color of, ver Figura 1.15, previamente a la sección definida se le había asignado el color rojo. Por defecto el color de los Frames de SAP es amarillo (opción Objects). Dentro de la columna de visualización View by Color of se tiene la opción Materials que puede ser útil en caso de tener muchos materiales en la estructura.

Posterior a asignar las restricciones deben asignarse las cargas en la estructura. Para definir cargas existe más de una opción, dependiendo de la experiencia del usuario, complejidad del proyecto, etc. el usuario puede elegir una u otra. Aquí a modo de ejemplo se introducirán cargas utilizando los load pattern. Utilizando Define-->Load Patterns se obtiene lo que se puede ver en la Figura 1.19. En esta nueva ventana se debe definir un nuevo Load Pattern, es importante aquí tener en cuenta de setear en 0 el Self Wight Multiplier sino en este estado de carga se considerará el peso propio (y no esta en estudio en este caso). Puede ser importante en caso de diseño (o para seleccionar el mismo tipo de carga) seleccionar el Type adecuado de carga que estemos ingresando. En próximos capítulos se introducirá el concepto de load case².

¹Por defecto las coordenadas locales de nodos coinciden con las coordenadas globales de la estructura.

²Por más detalles ver load pattern:<https://wiki.csiamerica.com/display/kb/Load+pattern>, load case:<https://wiki.csiamerica.com/display/kb/Load+case>

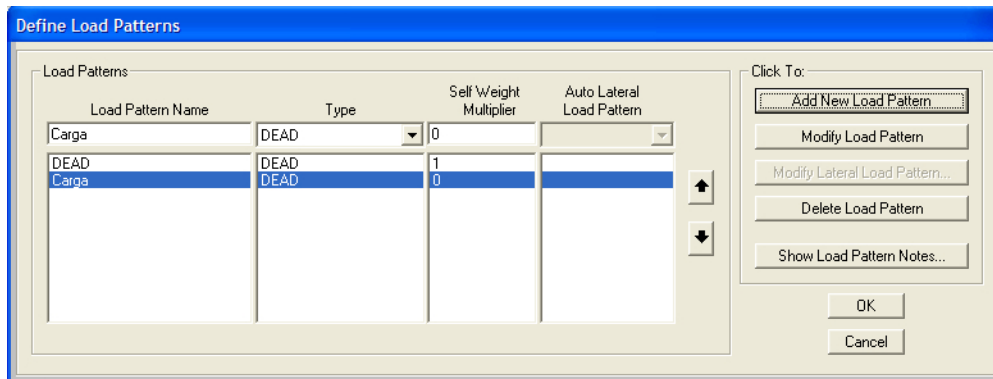


Figura 1.19: Definición de load pattern.

Una vez que se han definido los tipos de carga resta simplemente seleccionar los nodos en los que deseemos agregar las cargas puntuales (estamos trabajando reticulados con cargas en los nodos). Para esto se selecciona el nodo en el que se aplicará la carga (en este caso el 4) y luego se utiliza **Assign-->Joint Loads-->Forces...**, ver Figura 1.20.

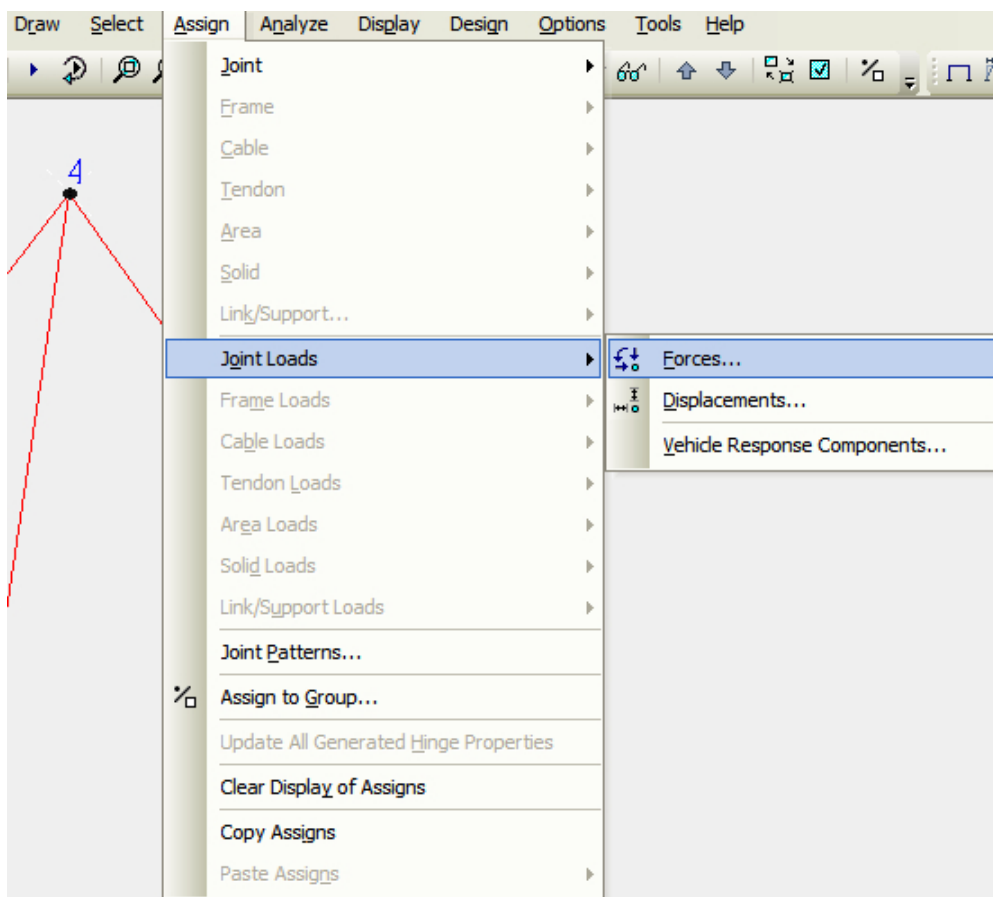


Figura 1.20: Asignar cargas puntuales.

Luego de realizado lo anterior se despliega una ventana como la que se ve en la Figura 1.21. En

esta ventana se debe asignar el Load pattern y la fuerza que actúa sobre el nodo seleccionado (en este caso se selecciono un sistema de coordenadas globales).

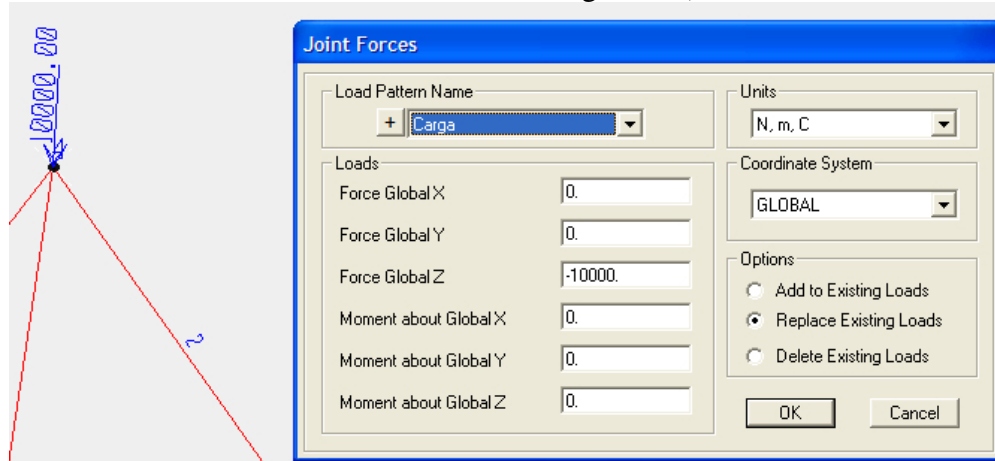


Figura 1.21: Cargas puntuales en ejes globales.

Algo importante de esta ventana, sobre todo si se desea modificar la carga, es el cuadro indicado como Options. En este cuadro se indica que se remplazarán las cargas existentes, esto quiere decir que si en ese nodo había cargas aplicadas (con ese load patter) se remplazarán.

Hasta aquí hemos trabajado con el elemento Frame pero este elemento no representa correctamente el comportamiento de barras dado que no considera momento cero en los extremos. Para esto deben asignarse releases a los elementos.

Se tiene entonces Assign-->Frame-->Releases/Partial Fixity para obtener la ventana que se ve en la Figura 1.22. Para estructuras reticuladas se deben asignar los releases que aquí se muestran.

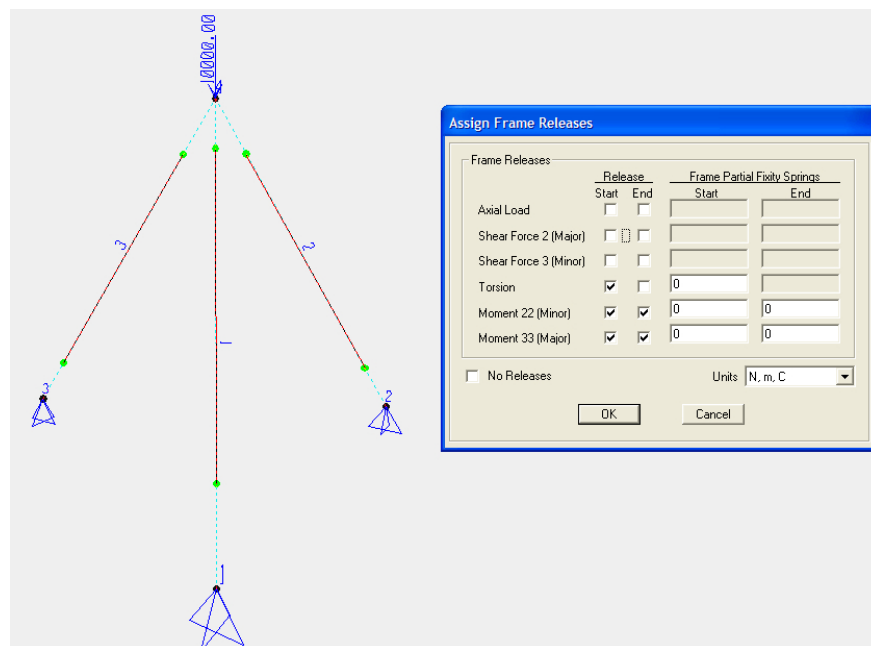


Figura 1.22: Asignar releases en las barras.

Al asignar los releases a las barras aparecerán como se ve en la Figura 1.22. Para que las barras se vean sin los releases bien se puede mostrar la estructura indeformada desde Display-->Show Undeformed Shape o hacer un refresh window (icono con forma de lapiz al lado del candado ó View-->Refresh Window). Realizados los releases resta solo hacer el análisis de la estructura, para esto previamente se deben setear algunos parámetros. En la Figura 1.23 se realizó Analyze-->Set Analysis Options..., luego en las opciones de análisis se quitaron los giros RX, RY, RZ dado que no corresponden para estructuras reticuladas¹. Luego en Solver Options... se elige el Standar Solver que mostrará errores en caso de que existan.

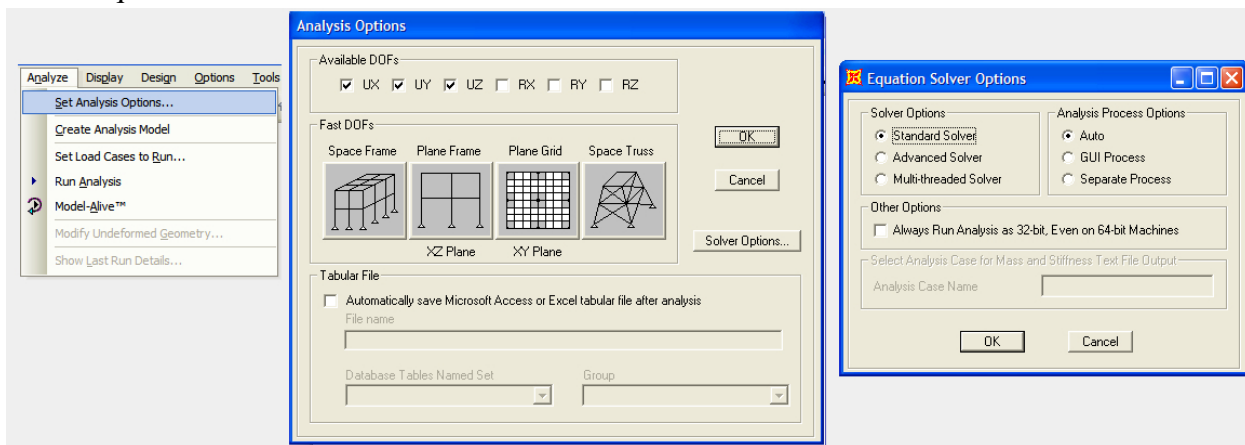


Figura 1.23: Seteo de parámetros para el análisis.

Seteados estos parámetros se ejecuta el programa mediante Run Analysis generando la ventana que se ve en la Figura 1.24. En la ventana de los estados de carga a correr se quitan (para este ejemplo) el DEAD y el MODAL dejando únicamente el definido anteriormente². Se tildó Always Show para que se muestre el proceso de análisis, ver Figura 1.25.

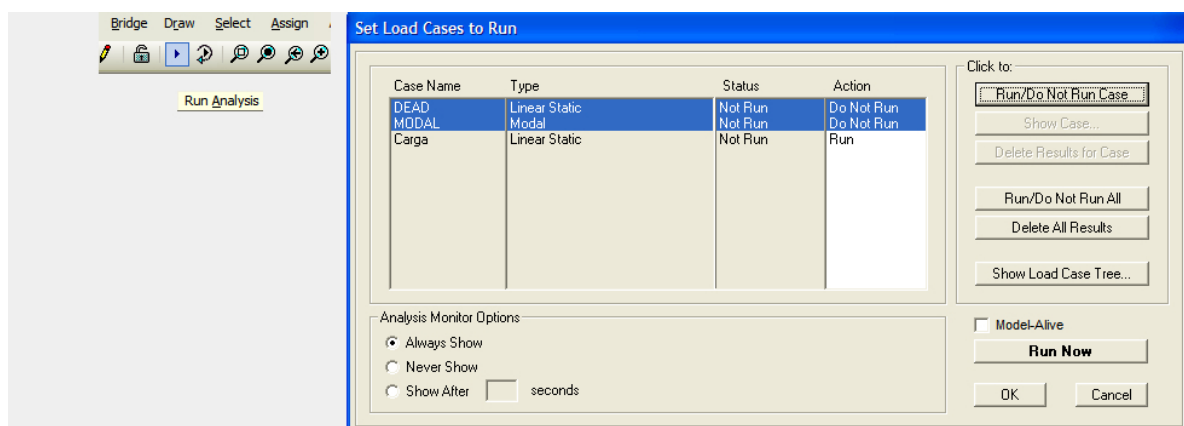


Figura 1.24: Ejecución del programa.

¹En caso de no quitarlos pueden aparecer advertencias de errores numéricos en la salida de SAP.

²Notar que dice Set Load Cases to Run. Previamente se había definido un load pattern no un load case, sin embargo aparece el load case “Carga”, esto es porque al definir un load pattern SAP genera un load case idéntico automáticamente. Más adelante en el curso se profundizará sobre la utilización de uno, otro o ambos.

Una vez resuelto el problema se puede obtener la estructura deformada y el diagrama de directa mediante los siguientes pasos:

- Display-->Show Deformed Shape: Estructura deformada.
- Display-->Show Forces/Stresses: Diagrama de directa.

los resultados se pueden observar en la Figura 1.26.

```

B E G I N   A N A L Y S I S                               2015/07/29  12:18:58

RUNNING ANALYSIS WITHIN THE GUI PROCESS
USING THE STANDARD SOLVER (PROVIDES COMPLETE INSTABILITY INFORMATION)

E L E M E N T   F O R M A T I O N                               12:18:58

L I N E A R   E Q U A T I O N   S O L U T I O N               12:18:58

FORMING STIFFNESS AT ZERO (UNSTRESSED) INITIAL CONDITIONS

TOTAL NUMBER OF EQUILIBRIUM EQUATIONS      =           3
APPROXIMATE "EFFECTIVE" BAND WIDTH         =           2

NUMBER OF EQUATION STORAGE BLOCKS          =           1
MAXIMUM BLOCK SIZE (8-BYTE TERMS)          =           6
SIZE OF STIFFNESS FILE(S) (BYTES)         =          76 B

NUMBER OF EQUATIONS TO SOLVE               =           3
NUMBER OF EIGENVALUES BELOW SHIFT          =           0

L I N E A R   S T A T I C   C A S E S                       12:18:58

USING STIFFNESS AT ZERO (UNSTRESSED) INITIAL CONDITIONS

TOTAL NUMBER OF CASES TO SOLVE             =           1
NUMBER OF CASES TO SOLVE PER BLOCK         =           1

LINEAR STATIC CASES TO BE SOLVED:

CASE: CARGA

.....
A N A L Y S I S   C O M P L E T E                               2015/07/29  12:18:58

```

Figura 1.25: Proceso de análisis.

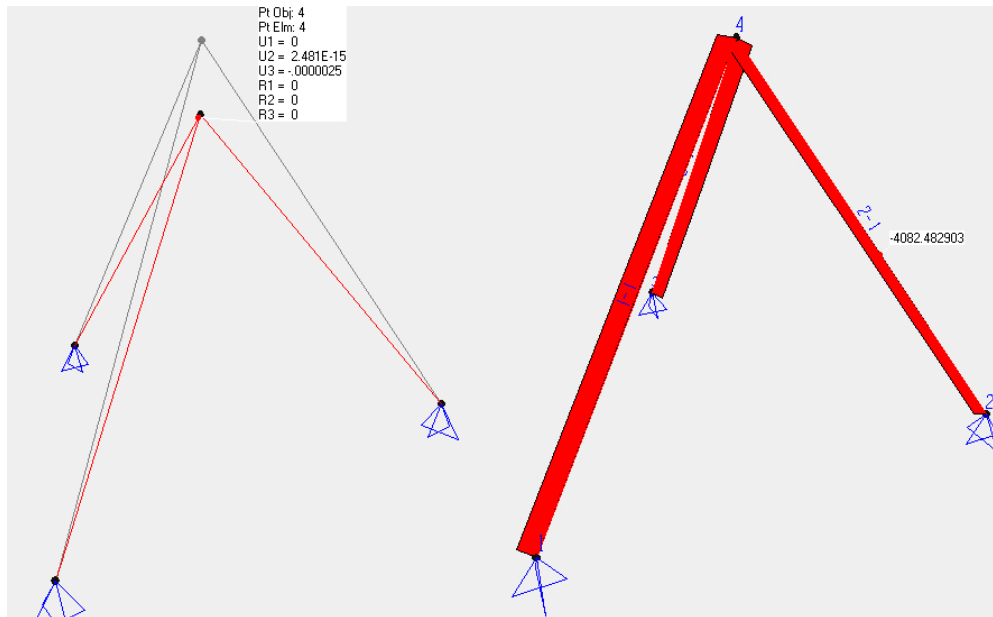


Figura 1.26: Estructura deformada y diagrama de directa.

La salida de texto se puede obtener por ejemplo seleccionando los nodos y luego utilizando Display-->Show Tables obteniendo así la Figura 1.27.

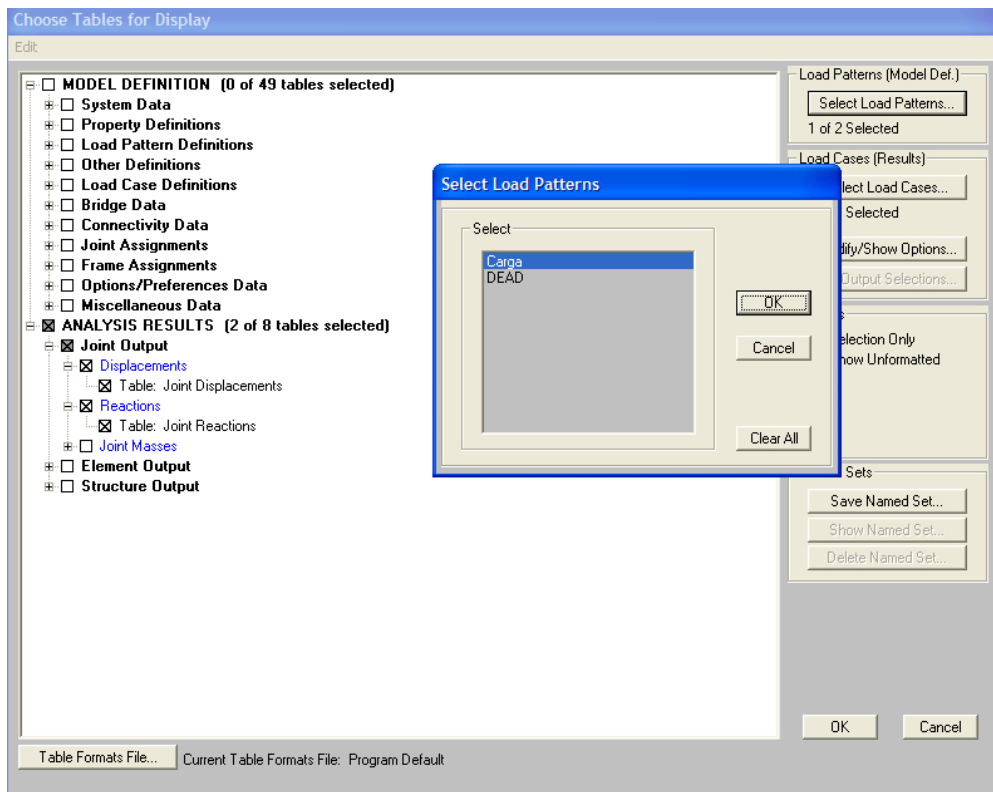
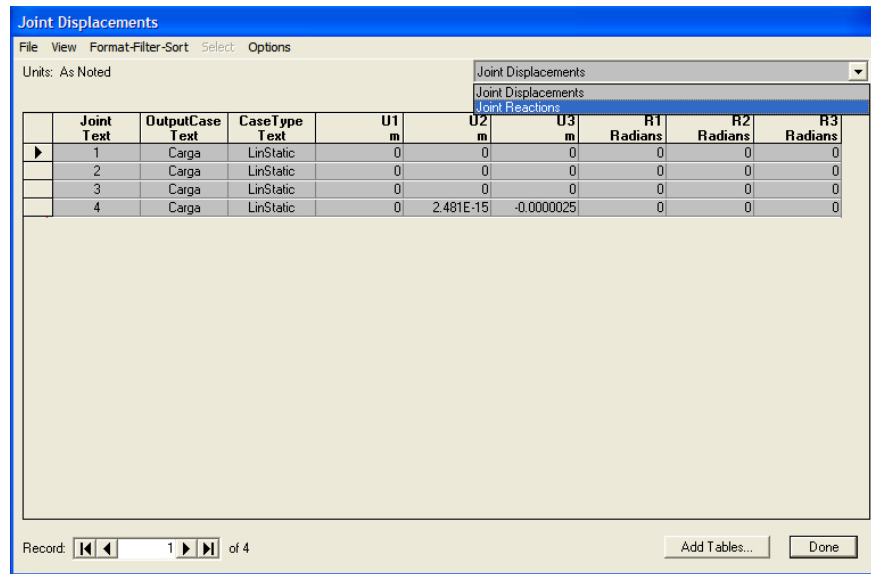


Figura 1.27: Salida del programa en texto.

En la Figura 1.27 se selecciona el Load Pattern para el que se desea ver los resultados. También se seleccionó la salida del programa para ver desplazamientos y reacciones nodales. Luego de clicar en OK se obtiene la Figura 1.28.



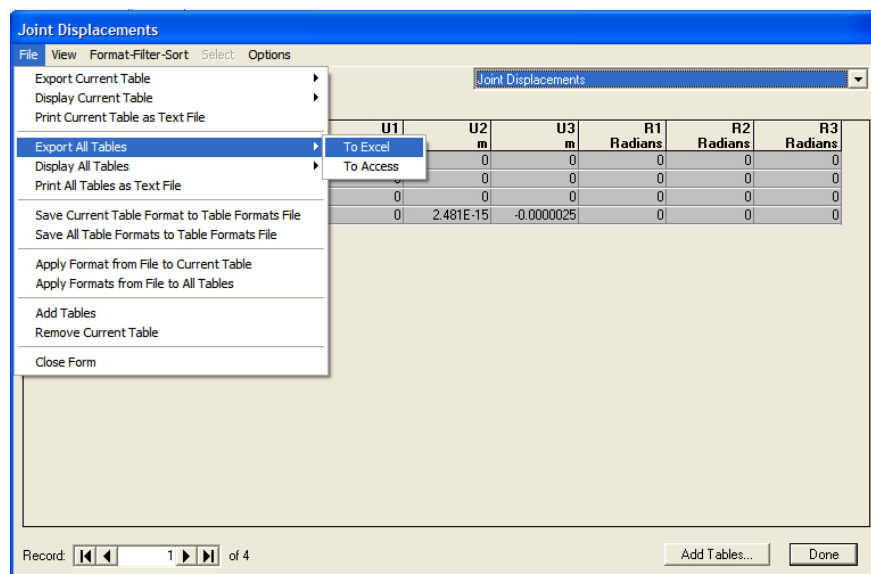
The screenshot shows the 'Joint Displacements' window with a menu bar (File, View, Format-Filter-Sort, Select, Options) and a toolbar. The 'Units: As Noted' is displayed. A dropdown menu is open, showing 'Joint Displacements' and 'Joint Reactions'. The main table displays data for four joints, with columns for Joint Text, Output Case Text, Case Type Text, and displacement/reaction values (U1, U2, U3 in meters and R1, R2, R3 in Radians).

Joint Text	Output Case Text	Case Type Text	U1 m	U2 m	U3 m	R1 Radians	R2 Radians	R3 Radians
1	Carga	LinStatic	0	0	0	0	0	0
2	Carga	LinStatic	0	0	0	0	0	0
3	Carga	LinStatic	0	0	0	0	0	0
4	Carga	LinStatic	0	2.481E-15	-0.0000025	0	0	0

At the bottom, there is a 'Record' section showing '1 of 4' and buttons for 'Add Tables...' and 'Done'.

Figura 1.28: Tablas de salida.

En la figura anterior se muestran las tablas de desplazamientos nodales y de reacciones nodales, pudiéndose seleccionar una u otra. En la Figura 1.29 se muestra como exportar las tablas a Excel, donde luego se podrá trabajar con ellas de forma usual.



The screenshot shows the 'Joint Displacements' window with the 'File' menu open. The menu options include 'Export Current Table', 'Display Current Table', 'Print Current Table as Text File', 'Export All Tables', 'Display All Tables', 'Print All Tables as Text File', 'Save Current Table Format to Table Formats File', 'Save All Table Formats to Table Formats File', 'Apply Format from File to Current Table', 'Apply Formats from File to All Tables', 'Add Tables', 'Remove Current Table', and 'Close Form'. The 'Export All Tables' option is highlighted, and a submenu is open showing 'To Excel' and 'To Access'.

U1 m	U2 m	U3 m	R1 Radians	R2 Radians	R3 Radians
0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0
0	2.481E-15	-0.0000025	0	0	0

At the bottom, there is a 'Record' section showing '1 of 4' and buttons for 'Add Tables...' and 'Done'.

Figura 1.29: Salida del programa en excel.

1.4. Elemento finito de barra de tres nodos

Imaginemos el problema de la Figura 1.3 pero que a diferencia de lo presentado en la Sección 1.3 buscamos una interpolación cuadrática del campo \mathbf{u}^1 . Es intuitivo imaginar que utilizaremos entonces polinomios de interpolación N_i cuadráticos, he aquí que no es suficiente con las condiciones que se impusieron para obtener la Ecuación 1.54 dado que cada una de las funciones será de la forma:

$$N_i(x) = a_i x^2 + b_i x + c_i \quad (1.100)$$

Se necesita incluir un nuevo nodo en el elemento, de forma de imponer tres condiciones para cada función de interpolación y por tanto la necesidad de tres funciones de interpolación. Es usual utilizar como tercer nodo al punto medio de la barra, aunque esto no es necesario.

No en tanto se utilizará el mismo cambio de variable definido en la Ecuación 1.60, por lo que en este caso no hablaremos de *funciones de forma* para referirnos a N_i .

Ejercicio 2.3. Demostrar que las funciones de interpolación para el elemento finito de barra de tres nodos, con el tercer nodo siendo el punto medio de la barra, en función de η (ver Figura 1.4) son:

$$N_1(\eta) = \frac{(\eta - 1)\eta}{2} \quad N_2(\eta) = (1 - \eta)(\eta + 1) \quad N_3(\eta) = \frac{(\eta + 1)\eta}{2} \quad (1.101)$$

Notar que para el caso de elementos de barra de dos nodos la cantidad de elementos no influye directamente en el tamaño de la matriz de rigidez, sin embargo en el caso de elementos de barra de tres nodos sí.

Ejercicio 2.4. ¿Cuál es el tamaño de una matriz de rigidez de una estructura reticulada con n nodos (sin contar los intermedios, n es la cantidad de articulaciones) y e elementos utilizando elementos de barra de tres nodos? ¿y de cuatro nodos por barra?. Resolver para el caso 1D.

Para el caso de elementos de barra de tres nodos el ensamblaje de la matriz de rigidez de toda la estructura es conceptualmente igual al ejemplificado en la Sección 1.3.2.

Ejercicio 2.5. Obtener la matriz de rigidez para el elemento de 3 nodos 1D. ¿Cómo debería ser la matriz en los casos 2D y 3D? ¿Cómo debe ser modificada la matriz de giro \mathbf{Q} para el caso de 3 nodos?.

¹Puede ser de utilidad cuando existen fuerzas de volumen a modo de obtener una solución exacta de la ecuación de Navier, ver Canelas [2015].

Solución de ejercicios propuestos en Tema 2

Ejercicio 2.1 En caso que la sección de la barra o el material no fueran uniformes en la barra, esto es $\Omega(x)$ y $E(x)$, se debe tener en cuenta esta variación al calcular las integrales definidas en las Ecuaciones (1.62,1.63). Es claro que si el dominio de integración es I_0 se deberá obtener la sección y el material en función de η . En el caso de barras de dos nodos se tiene que \mathbf{B} es uniforme por tanto la matriz de rigidez del elemento queda:

$$\mathbf{K}_L^e = \frac{1}{\ell} \int_{-1}^1 E(\eta) \Omega(\eta) \, d\eta \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.102)$$

Ejercicio 2.2

- Utilizar el comando `help plot` en Octave para obtener ayuda sobre como utilizarlo.
- Para obtener las deformaciones de cada barra primeramente se deben obtener los desplazamientos nodales de cada elemento en coordenadas locales $\mathbf{U}_L^e = \mathbf{Q}^T \mathbf{U}_G^e$ para luego obtener la deformación del elemento utilizando $\boldsymbol{\varepsilon}^e = \mathbf{B}^e \mathbf{U}_L^e$ y las tensiones con $\boldsymbol{\sigma}^e = \mathbf{C} \boldsymbol{\varepsilon}^e$.
- Si el material de cada barra fuera diferente se puede por ejemplo generar un vector de módulos de Young y dentro del `for` del ensamblaje de la matriz de rigidez utilizar la i -ésima columna (por ejemplo `E(elem)`).

Ejercicio 2.3 Cada función de interpolación es de la forma $N_i(\eta) = a\eta^2 + b\eta + c$ y debe verificar que

$$N_i(\eta_j) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}, \quad (1.103)$$

luego utilizando que $\eta_1 = -1, \eta_2 = 0$ y $\eta_3 = 1$ se obtienen las funciones de interpolación. Se puede también utilizar la interpolación de Lagrange donde se tiene que

$$N_i(\eta) = \prod_{k=1, k \neq i}^{k=3} \frac{\eta - \eta_k}{\eta_i - \eta_k}, \quad (1.104)$$

debe verificarse también que

$$\sum_{i=1}^{i=3} N_i(\eta) = 1 \quad \forall \eta. \quad (1.105)$$

Ejercicio 2.4 En el caso 1D es simple ver que se debe agregar 1 grado de libertad por cada nodo que se agregue a los elementos. Por tanto en el caso de 3 nodos 1D se tendrá que la matriz de rigidez local de cada elemento es de 3×3 . Luego en la matriz de toda la estructura serán $1 \times n$ grados de libertad (por los nodos extremos de cada elemento, como en el caso de 2 nodos) **más** los grados de libertad que se agregan por el nodo intermedio, siendo 1 más por cada elemento e , por tanto se tiene que hay $1 \times n + 1 \times e$ grados de libertad en el caso de 3 nodos. Con lo cual el tamaño de la matriz de rigidez es $(1 \times n + 1 \times e) \times (1 \times n + 1 \times e)$. Se nota claramente la influencia de la cantidad de elementos en el tamaño de la matriz de rigidez, lo cual con dos nodos no sucede.

El caso de 2 nodos intermedios, 4 nodos por elemento, tiene un razonamiento similar al anterior. Se concluye entonces que el tamaño es $(1 \times n + 2 \times e) \times (1 \times n + 2 \times e)$. En el caso de tener m nodos intermedios ($m + 2$ en total) por barra, se tiene que la matriz de rigidez es de tamaño $(1 \times n + m \times e) \times (1 \times n + m \times e)$.

Ejercicio 2.5 A partir de las funciones de forma obtenidas en el Ejercicio 2.3 se puede obtener la matriz de derivadas \mathbf{B} y a partir de la definición de la matriz de rigidez se tiene

$$\mathbf{K}_L^e = \int_{\Omega_e} \mathbf{B}^T \mathbf{C} \mathbf{B} dV = 2 \frac{E\Omega}{\ell} \int_{-1}^1 \begin{pmatrix} \frac{(2\eta-1)^2}{4} & -\eta(2\eta-1) & \frac{4\eta^2-1}{4} \\ -\eta(2\eta-1) & 4\eta^2 & -\eta(2\eta+1) \\ \frac{4\eta^2-1}{4} & -\eta(2\eta+1) & \frac{(2\eta+1)^2}{4} \end{pmatrix} d\eta. \quad (1.106)$$

por tanto

$$\mathbf{K}_L^e = \frac{E\Omega}{\ell} \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 7 & -8 & 1 \\ -8 & 16 & -8 \\ 1 & -8 & 7 \end{pmatrix}. \quad (1.107)$$

Para el caso 2D y 3D puede haber más de una forma de resolverlo. Los nodos extremos de la barra deben tener las 3 componentes de desplazamiento dado que para poder hacer el ensamble de la matriz de la estructura se utiliza la compatibilidad en los nodos extremos, sin embargo el nodo intermedio no participará estrictamente en el ensamblado (si bien aparecen términos en la matriz de rigidez, Ejercicio 2.4, no se realiza compatibilidad en este nodo). Por tanto para el caso 3D se tiene que

$$\mathbf{K}_L^e = \frac{E\Omega}{\ell} \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 & -8 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -8 & 0 & 0 & 16 & -8 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -8 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{Q} = \begin{pmatrix} \mathcal{B}_G(I)_{\mathcal{B}_L} & \mathbf{0}_{3 \times 1} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{1 \times 3} & 1 & \mathbf{0}_{1 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 1} & \mathcal{B}_G(I)_{\mathcal{B}_L} \end{pmatrix} \quad (1.108)$$

con lo anterior el grado de libertad asociado al nodo intermedio no se “rota” entonces al resolver el sistema en coordenadas globales se obtendrán los desplazamientos de los nodos en coordenadas globales y el del nodo intermedio en coordenadas locales (según el eje de la barra).

Bibliografía

- A. Canelas. *Apuntes de curso de Elasticidad*. Instituto de Estructuras y Transporte Prof. Julio Ricaldoni, 2015.
- E. Oñate. *Structural Analysis with the Finite Element Method Linear Statics*, volume 2 of *Lecture Notes on Numerical Methods in Engineering and Sciences*. Springer Netherlands, Dordrecht, 2013. ISBN 978-1-4020-8742-4. doi: 10.1007/978-1-4020-8743-1.
- S. R. Wu and L. Gu. *Introduction to the explicit finite element method for nonlinear transient dynamics*. Wiley, 2012. ISBN 978-0-470-57237-5.