PROPUESTA DEL PROGRAMA

Este grupo cuenta con 30 personas con un fin común, el aporte al desarrollo de la matemática, en particular de los sistemas dinámicos en el Uruguay.

Se ha separado la parte estrictamente académica de la propuesta, en partes que comprenden diferentes temas y que fueron redactadas por diferentes personas; esta sección, que denominaremos "Desarrollo de la Propuestaçontiene, buena parte del texto que distribuído en ítems se sugería para la presentación.

0. Antecedentes

A mediados de la década del 80, se produjo el encuentro de varios matemáticos que durante la intervención no habían participado de la práctica de la matemática en el Uruguay con un grupo de jóvenes estudiantes que habían iniciado su formación en el país. Esto provocó gran entusiasmo, tanto en unos, que encontraron un conjunto de estudiantes talentosos, como en los otros, que habían realizado ya una parte de sus estudios de grado sin haber jamás entrado en contacto con investigadores en matemática.

Con el retorno al país de Jorge Lewowicz, que impartió algunos cursos básicos de sistemas dinámicos e incentivó el afán por la investigación, se estableció rápidamente un grupo de estudio en esta área. Varios estudiantes completaron su formación de grado en poco tiempo y comenzaron sus estudios de posgrado, la mayoría en el exterior. Ya a fines de la década de los 80, existía en la Unversidad de la República, esencialmente en el Instituto de Matemática de la Facultad de Ingeniería y en el Departamento de Matemática de la Facultad de Humanidades y Ciencias, un grupo de investigadores y estudiantes que colaboraban entre sí y desarrollaban una matemática original y con su propio estilo, organizando cursos y el Seminario, siempre bajo la orientación general de Lewowicz. Transcurridos 25 años de ininterrumpida actividad, este grupo se ha consolidado como el mayor grupo de estudio de la matemática en el Uruguay, con reconocida trayectoria, habiéndose realizado varios congresos de nivel internacional, innúmeras visitas de profesores extranjeros, dictado de cursos en el exterior. Asíse ha formado una gran cantidad de estudiantes, y funciona, cada semana, el Seminario que reúne a los investigadores y estudiantes.

Actualmente, este grupo ha multiplicado sus vínculos internacionales y ampliado sus horizontes de trabajo, hasta el punto de abarcar, con la suma de inquietudes y posibilidades de sus integrantes, un amplio espectro de investigación.

Es de destacar finalmente, un aspecto que más allá de la subjetividad que implica, es preponderante para el progreso y la sustentación de la calidad de la investigación: la conciencia de grupo de todos sus integrantes.

1. Fundamentación y antecedentes del conjunto de la propuesta

Esta propuesta reúne un conjunto muy amplio de proyectos plurales y también individuales, que se enmarcan todos dentro del mismo panorama, que versa sobre temas de interés común, y que, a pesar de la creciente especialización necesaria

para el desarrollo de la actividad matemática de punta, maneja un conjunto de herramientas y un lenguaje adquiridos a través del tiempo por todos los integrantes del grupo. De esta forma se facilita e incentiva la colaboración entre investigadores de diferentes especialidades, así como se estimula la participación de los estudiantes en la amplitud temática. El movimiento lateral entre los investigadores participantes de la propuesta ha sido y seguirá siendo, como se verá más adelante en el desarrollo general, un denominador común y un propósito constante.
La propuesta en sí contiene pues un amplio espectro de temas en sistemas dinámicos, que van desde la hiperbolicidad, la estabilidad, la teoría ergódica, la dinámica de expansivos hasta aplicaciones a modelos de redes neuronales o modelos poblacionales.

2. Objetivos generales y específicos. Ver en ¨Desarrollo de la Propuesta¨.

3. Justificación de la propuesta. Ver en ¨Desarrollo de la Propuesta¨.

4. Principales preguntas. Ver en ¨Desarrollo de la Propuesta¨.

5. Líneas de investigación a desarrollar. Ver en ¨Desarrollo de la Propuesta¨.

6. Estrategia de investigación y actividades específicas.

En cada una de las lineas de investigación, las estrategias y metodologías a utilizar serán las habituales en el trabajo matemático. Se revisará la bibliografía relacionada con los temas, en particular los que son más novedosos para los miembros del grupo. La realización de experimentos computacionales es de gran ayuda para formular conjeturas que luego se intentará demostrar rigurosamente. Se debe destacar que la naturaleza de nuestro trabajo hace que una de las mayores necesidades sea el contacto con científicos del primer nivel. Para favorecer estos contactos planeamos participar activamente en Congresos en el exterior y promover la realización de reuniones científicas en el país. También es de suma importancia la visita de profesores radicados en el exterior de reconocida trayectoria, con algunos de los cuales ya se han realizado trabajos conjuntos. Las sucesivas instancias de las investigaciones se expondrán en los Seminarios nacionales del área, en que se confrontarán opiniones y resultados. Los resultados de las investigaciones serán publicadas en revistas arbitradas del mejor nivel según la naturaleza de los artículos. Las actividades específicas incluyen: obtención y estudio de material bibliográfico, participación de seminarios, encuentros, congresos y pasantías para la discusión de ideas, en particular con científicos de otras áreas, obtención y análisis de datos por simulación en computadora, actividad creativa innovadora, síntesis de investigación, presentación en congresos, dictado de cursos de grado y posgrado, orientación de estudiantes, dirección y participación en seminarios, redacción de artículos, edición y distribución de prepublicaciones, y sometimiento de artículos para publicación en revistas arbitradas.

7. Descripción de actividades.

Todos los miembros del grupo radicados en el país realizan regularmente actividades de enseñanza de grado en la Facultad de Ciencias y la Facultad de Ingeniería, dictando cursos de las más diversas áreas de la matemática. También orientan estudiantes de grado en sus monografías de fin de licenciatura.

Están también directamente involucrados en los cursos de postgrado de esas Facultades (Maestría y Doctorado en Matemática y Maestría en Ingeniería Matemática), forman parte de tribunales en estas y otras maestrías y doctorados y dirigen tesis de Postgrado de matemática, en Uruguay y otros países.

Muchos de los miembros del grupo realizan tareas de extensión de diverso tipo: dictando cursos para docentes de otras ramas de la enseñanza, redactando libros de divulgación de su disciplina o dictando conferencias de carácter general.

Ver el resto en ¨Desarrollo de la Propuesta¨.

8. Personal que participa y personal a contratar.

El personal del proyecto incluye investigadores con trayectoria consolidada y un grupo muy valioso de estudiantes de posgrado con diferente grado de avance. La lista de los investigadores propiamente dichos es: E. Catsígeras, M.Cerminara, H. Enrich, J. Groisman, N. Guelman, J. Iglesias, J. Lewowicz, E. Maderna, R. Markarian, M. Martínez, R. Muñiz, M. Paternain, A. Portela, A. Rovella, M. Sambarino, J. Vieitez. Cada uno de estos encabeza o integra una de las lineas de trabajo descritas en el Desarrollo de la Propuesta.

A lo largo del período de ejecución se espera contratar dos estudiantes avanzados de postgrado en matemática o ciencias afines, para compenetrarse con algunas de las técnicas que se utilizan en las lineas de investigación y colaborar en la organización general del trabajo. A lo largo del período podrían ser dos personas, que se incorporarían al grupo en niveles superiores, además de los jóvenes que ya participan. Hasta este momento las posibilidades de financiación de cargos en los Institutos de las Facultades de Ciencias e Ingeniería (CMAT e IMERL) han permitido disponer de cargos para casi todo el personal que alcanza niveles buenos de formación.

9. Equipos y materiales.

Se dispone de los locales y equipos del Instituto de Matemática y Estadística "Profesor Ingeniero Rafael Laguardia"(IMERL) de la Facultad de Ingeniería y del Centro de Matemática de la Facultad de Ciencias, así como de sus Bibliotecas, que tienen un catálogo conjunto y reciben apoyo del PEDECIBA, por lo que son consideradas una única Biblioteca. En los últimos lustros debido al incremento de costos del material bibliográfico, una parte de las compras en este rubro se ha hecho con el aporte de los programas y proyectos de financiación ajenas a las tres instituciones nombradas. Dada la importancia que este material tiene para el trabajo matemático se están solicitando montos importantes para mantener actualizada la Biblioteca. Se dispone también de buenas herramientas de cálculo del cluster de la Facultad de Ingeniería, y de docentes de la Facultad de Ciencias. Por ser un período muy largo, se planea renovar, durane el quinquenio un buen porcentaje del equipo informático, la compra de dos impresoras y de dos computadoras portátiles. Los materiales que se propone adquirir son los fungibles habituales (papelería, tintas),

los necesarios para las tareas de divulgación que las propias bases preveen y las que se utilizarán en un Congreso del área que se pretende realizar en 2012.

Este Congreso permitirá continuar la buena tradición de realizar periódicamente reuniones de Sistemas Dinámicos en el país, de las cuales las últimas fueron el International Congress on Dynamical Systems, in Memory of José Luis Massera de marzo 2004 y la Escuela Latioamericana (XIV ELAM) de diciembre 2005. Será una buena manera de divulgar en un ambiente de la más alta calidad académica los resultados del equipo, de incrementar los lazos con otros grupos de excelencia los resultados del equipo, de incrementar los lazos con otros grupos de excelencia y ayudar a colocar a la ciencia uruguaya en el mejor nivel mundial. Se recurrirá a fuentes adicionales para dar tales características al evento.

10. Cronograma general de ejecución.

Para un programa de largo plazo como es este es complicado brindar un cronograma específico. Detalles de las etapas de los diversos temas de investigación se brindan en el Desarrollo de la Propuesta. El Congreso aludido en 9, será un hito importante de fortalecimiento del grupo como tal.

11. Beneficios esperados.

Los temas sobre los que versa el Proyecto son áreas de investigación de punta en los estudios de sistemas desordenadas. Un solo ejemplo: los resultados sobre billares clásicos "completan"los estudios sobre mesas de billar con dinámicas caóticas. Los de billares con descomposición dominada consolidan el trabajo en una linea muy reciente.

El grupo de Sistemas Dinámicos de la Universidad de la República, ha trabajado en temas relacionados con la no linealidad y el caos. Las líneas de investigación desarrolladas son de aplicación en diversas ramas de la Física, la Ingeniería y otras ciencias, observándose en estas disciplinas, un amplio desarrollo de los trabajos vinculados con los Sistemas Caóticos. En los últimos años se ha desarrollado una fuerte interacción entre el grupo de Sistemas Dinámicos y grupos de investigación en áreas tecnológicas como Telecomunicaciones y Mecánica de los Fluidos, en Biología, etc. Las investigaciones sobre redes neuronales y dinámica de poblaciones incluídas en este proyecto son ejemplos de esa interacción. De igual manera se ha impulsado la creación de una Maestría en Ingeniería Matemática.

En general la existencia de grupos de investigación activos, incluyendo los de las área básicas, redunda en la mejoría de la calidad de la enseñanza y los trabajos de asesoramiento.

Los resultados que se esperan obtener, los vínculos generados por el desarrollo de las investigaciones y la formación concomitante de recursos humanos, incrementarán las relaciones con otras áreas científicas y técnicas.

Respecto de la formación de recursos humanos, el Proyecto cumplirá un papel fundamental no sólo en la consolidación de cuadros más jóvenes, sino en la formación de estudiantes e investigadores en éstas y otras áreas de la matemática. Esto redundaría en un gran beneficio para el desarrollo del grupo de Sistemas Dinámicos.

Por tanto hay impactos relacionados con la consolidación de equipos de alta calificación y producción en un rama avanzada y moderna de la disciplina, y su

interacción con otros equipos creativos, y concomitantemente, impactos vinculados con la influencia del equipo en la formación de recursos humanos en diversos niveles.

Estrategia de difusión y transferencia de resultados: Es voluntad de los participantes de este Proyecto incrementar las tareas de divulgación con los propósitos de incentivar en estudiantes y docentes la incorporación al trabajo matemático y de extender a otros públicos la importancia de estas investigaciones (cuestión esta en la que algunos de los investigadores tienen experiencia amplia. Ver, en particular el CV del Responsable.

Las actividades de difusión de los resultados obtenidos incluye la presentación de los trabajos en Congresos Internacionales, en el área de la Matemática, y asimismo encuentro con científicos de otras áreas, en especial de Ingeniería y Física, con quienes los participantes de este Proyecto mantienen vínculos académicos de investigación, y con aquellos con los cuales se establecerán nuevos vínculos. Se espera poder promover un segundo encuentro de Dinámica Caótica, entre científicos de distintas áreas y procedencias (similar a la Primera Conferencia Interdisciplinaria de Sistemas Caóticos, desarrollada en Piriápolis en 1996) con un interés común de investigación desde diferentes puntos de vista.

12. Referencias. Ver en ¨Desarrollo de la Propuesta¨.

DESARROLLO DE LA PROPUESTA

1. Billares

Participan: Roberto Markarian, Martín Sambarino. Del exterior: Enrique Pujals (IMPA, Brasil), Gianluigi del Magno (UTL, Lisboa), Aubín Arroyo (UNAM, México), S. Olifsson y Sonia Pinto (UFMG, Brasil).

Antecedentes y justificación:

La ejecución de este proyecto intentará avanzar en dos líneas de investigación íntimamente relacionadas con los sistemas dinámicos que modelan movimientos de discos o bolas con movimiento libre entre sus choques y distintos tipos de leyes de choque. Se trata del estudio de propiedades de hiperbolicidad (ergódicas y topológicas) de sistemas con choques elásticos (billares clásicos) y con choques donde las leyes de reflexión son modificadas para simular distintos tipos de movimientos del borde.

Las técnicas iniciales para estudiar ambos tipos de fenómenos son similares, aunque los resultados a obtener son de índole diversa. Se utilizan ciertos tipos particulares de formas cuadráticas o conos definidos en el espacio tangente que al evolucionar por la transformación derivada permiten asegurar la existencia de exponentes de Liapunov no nulos en casi todo punto, o la satisfacción de una forma débil de hiperbolicidad, denominada descomposición dominada (y por tanto la existencia de ciertos tipos de atractores).

Respecto de los billares clásicos, luego del trabajo seminal del Sinai [Sin], la teoría ergódica de billares tomó una gran importancia con los trabajos de la escuela rusa en la década de los 70 y los que se desarrollaron posteriormente, constituyéndose en un fértil campo interdisciplinario con la mecánica estadística y otras ramas de la física.

Una parte de la obra de R. Markarian está dedicada a esta temática, como surge de la lista de publicaciones y otras actividades científicas que constan en su curriculum. En particular, con N. Chernov, ha escrito un manual en la que se desarrollan las técnicas fundamentales para el estudio de propiedades caóticas de billares [CM06]. Se trata de una versión muy expandida y corregida de diversas obras de los mismos autores, editadas por Longman (1993), IMCA, Lima (2001), XVIII Escuela Venezolana de Matemática, Caracas (2005), e Introduction to the ergodic theory of chaotic billiards, 2nd. Edition, corrected and enlarged, IMPA, Rio de Janeiro, 208 pp (2003). Otras obras generales sobre billares son [KT91] y [Ta95].

En relación con billares con descomposición dominada se espera atacar simultáneamente las dificultades surgidas en los procesos de Lorentz periódicos con horizonte infinito (que es asimilable a los billares estudiados originalmente por Sinai) y los procesos con horizonte finito. Existen pocos antecedentes sobre estos temas. La descripción anterior indica que las investigaciones que se realizarán están en el centro de los estudios de dinámicas desordenadas, que han tomado un papel relevante en los estudios formalizados de diversas disciplinas que van de la física y la ingeniería a la economía. La revisión bibliográfica se hace en la Sección Antecedentes del equipo de trabajo; los detalles de ubicación de los trabajos en Referencias Bibliográficas.

Antecedentes del equipo de trabajo:

Sobre ambos temas R. Markarian ha desarrollado una gama extensa de pesquisas; se espera obtener resultados más avanzados con este grupo muy calificado de investigadores. La colaboración con Gianluigi del Magno comenzada hace algo menos de 10 años permitió la elaboración del trabajo [DMM03], que podría ser considerado como un bosquejo del que se propone culminar en esta instancia. El trabajo es de largo aliento por sus dificultades técnicas y se corregirá y culminará un trabajo ya comenzado, [DMM08]. Se trata de dar una descripción muy amplia de billares planos que satisfacen propiedades de gran desorden dentro de la jerarquía ergódica. Para ello se darán nuevas versiones de teoremas de ergodicidad local que permitan analizar los diversos casos que se presentan en una clase muy amplia de billares planos con exponentes de Liapunov nulos.

En relación con billares con descomposición dominada, el grupo de investigación formado por Enrique Pujals, Martín Sambarino y el Responsable estudiará con cuidado movimientos que reflejan el giro de discos, tema sugerido por una de las principales autoridades mundiales en el estudio de los modelos matemáticos del Gas de Lorentz: Dómokos Szász. Existen pocos antecedentes sobre estos temas y en este caso estamos aprovechando la conjunción de especialistas en una forma débil de hiperbolicidad, la descomposición dominada (Pujals y Sambarino) y en billares (Markarian). Luego del trabajo básico, aceptado y aparecido en versión internet el año pasado y publicado en 2010 [MPS], han aparecido o están en elaboración trabajos del Responsable con matemáticos de la UNAM, México y de la UFMG, Brasil [AMS, MOP10].

Objetivos específicos:

1. Generalizar los teoremas sobre ergodicidad local de sistemas con singularidades, modificando sus hipótesis básicas.
2. Probar la existencia de clases amplias de mesas de billar planas que satisfacen la propiedad Bernoulli, utilizando los resultados del Objetivo 1 y realizando un estudio muy detallado de la dinámica de billar correspondiente.
3. Obtener resultados sobre descomposición dominada de billares dispersores con

horizonte finito e infinito, con rebotes influidos por la rotación de los obstáculos. Se estudiarán formas cuadráticas bien adaptadas a esas dinámicas y las singularidades específicas de cada caso.

2. Homeomorfismos expansivos en contextos no compactos.

Participan: Jorge Groisman, Jorge Lewowicz.

Antecedentes:
Expansividad: Un sistema expansivo es el prototipo topológico de un sistema caótico. Durante la segunda mitad del siglo pasado fueron bien estudiados los homeomorfismos expansivos en espacios compactos. En la década del 60 los estudios de O´Brien y Reddy logran probar que cualquier superficie compacta independiente de su género (siempre que sea mayor o igual a 1) son ambientes que admiten tales homeomorfismos. Nuestro grupo, comenzando por Jorge Lewowicz, ha realizado importantes contribuciones para su descripción y entendimiento. En particular, en [Lew] se caracterizan los sistemas expansivos en variedades compactas bidimensionales. Sus métodos han sido generalizados a dimensión tres en los trabajos de José Vietez y por Miguel Paternain para el caso de flujos geodésicos expansivos de superficies. Por otra parte, Artigue-Brum-Potrie estudian sistemas expansivos con hipótesis similares a las de Vieitez, pero generalizan los resultados al caso de codimensión uno (es decir, todos los puntos periódicos son topológicamente hiperbólicos de codimensión uno). Finalmente, Jorge Groisman estudia el caso de sistemas expansivos en dimensión dos pero el caso no compacto.

Caracterización de hiperbolicidad y expansividad En el trabajo [Lew1] se da una caracterización de la hiperbolicidad en términos de formas cuadráticas. Roberto Markarian extiende esta caracterización al caso de billares o sistemas con singularidades y su aplicación a la descripción ergódica de estos sistemas. Por otra parte, la versión topológica de esta caracterización para sistemas expansivos es expresada en términos de una función de Lyapunov. Esta caracterización es fuertemente utilizada en el trabajo de Groisman mencionado anteriormente.

Expansividad robusta Un problema interesante es estudiar no solamente los sistemas que son expansivos sino aquellos cuyas perturbaciones (por lo menos C^1) son también expansivos. Mañé resolvió este problema, haciendo una caracterización completa de los sistemas que están en el C^1 interior de los sistemas expansivos. El caso ¨local¨ es estudiado en los trabajos de Sambarino y Vieitez, donde se caracteriza en términos de hiperbolicidad las clases homoclinicas robustamente expansivas.

Bifurcaciones: En [Lew1] se exhibe un ejemplo de un sistema expansivo (y conservativo) que está en la frontera de los sistemas Anosov, por la presencia de un punto eliptico. En la tesis de Heber Enrich se exhibe una ejemplo de un sistema expansivo en la frontera de los sistemas Anosov por la presencia de una tangencia homoclínica y se describen sus propiedades ergódicas. Por otra parte, el estudio ergódico del ejemplo de Lewowicz antes mencionado es realizado por Eleonora Catsigeras y Heber Enrich.

Todos estos estudios resultan el antecedente principal para plantearse el objetivo de caracterizar homeomorfismos expansivos en espacios no compactos. El gran desafío de estos estudios es lograr trabajar sin la información brindada por la estructura diferenciable, de la cual no se dispone. Por más antecedentes, ver [Thu]

y [Hir]. En [JG] se obtiene una caracterización de los expansivos en el plano bajo ciertas condiciones.

Objetivos:

1. Un trabajo que está esencialmente finalizado es caracterizar los homeomorfismos expansivos del plano sin puntos fijos. El principal resultado es: *Sea f un homeomorfismo en $\mathbb{R}^2$ sin puntos fijos y que admite una función de Lyapunov $U : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que:*
   a) *U es una distancia en $\mathbb{R}^2$ tal que induce en el plano la misma topología que la usual,*
   b) *Para cada $x \in \mathbb{R}^2$ y cada $k > 0$ existen puntos y, z en la frontera de $B_k(x)$ tales que $V(x, y) = U(f(x), f(y)) - U(x, y) > 0$ y $V(x, z) = U(f(x), f(z)) - U(x, z) < 0$, respectivamente,*
   c) *f no admite singularidades,*

   Se pretende además terminar en breve la demostración de que un homeomorfismo f es topológicamente conjugado a una traslación en el plano si y solamente si U admite la condición HP que afirma que dado un compacto C del plano se verifica

$$\lim_{\|x\|\to\infty} \frac{|V(x, y) - V(x, z)|}{W(x, y)} = 0,$$

   uniformemente con y, z en C.
2. En los trabajos anteriormente citados se impone la no existencia de puntos estables. Esto implica que debemos responder qué sucede cuando el homeomorfismo admite un punto fijo estable. Estos estudios también se encuentran avanzados y su principal resultado diría: Sea f un homeomorfismo del plano que admite un punto fijo. f es conjugado a una homotecia si y solamente si admite una función de Lyapunov $U : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ respecto a la cual el punto fijo es estable o inestable.
3. Más a largo plazo, esperamos estudiar la posible generalización de estos resultados a dimensiones mayores.

3. Clases homoclínicas, h-expansividad.

Participan: José Vieitez, Alfonso Artigue. Del exterior: María José Pacífico (UFRJ, Brasil).

Algunos objetivos:

1. Herraduras y entropía. El interés está en analizar la existencia y unicidad de medidas de Gibbs (o de máxima entropía) para ciertos tipos de herraduras.

2. Formalismo termodinámico generalizado. Aquí, estamos interesados en probar la existencia y unicidad de medidas de equilibrio para sistemas no uniformemente hiperbólicos y relacionar estas medidas con la presión del sistema para los sistemas de Lorenz contractivos.

3. Clases homoclínicas. En esta línea estamos interesados en la relación entre h-expansividad robusta y alguna forma de hiperbolicidad de la clase. Además, estamos interesados en obtener medidas físicas (únicas) para clases homoclínicas robustamente expansivas y h-expansivas.

4. Estudio de dinámica de poblaciones con apoyo de simulación. En particular estudiamos la dinámica de poblacion de Microtus Epiroticus y las propiedades caóticas

del atractor que surge en la modelación de dicha población.

A continuación se dan los items bibliográficos que sustentan los antecedentes de esta parte y no están incluidos en el CV de José Vieitez.

1. "On the dynamics of the Yoccoz-Birkeland model". Preprint, junto a J.J. Nieto y M.J. Pacifico. Work in progress.
2. "Robust entropy-expansiveness implies generic domination". En colaboración con M.J.Pacifico. available at: http://arxiv.org/abs/0903.2948
3. "On the C^2-robust shadowing property." En colaboración con E.R.Pujals y A Koropecki.
4. "Decay of correlation for cocycle with singularities" En colaboración con R. Markarian y M.J.Pacifico.

4. Medidas físicas, y Sinai-Ruelle-Bowen en sistemas no conservativos. Entropía.

Participan: Eleonora Catsigeras, Marcelo Cerminara y Heber Enrich. Del exterior: Stefano Luzzatto (ICTP, Trieste) y Martin Andersson (UFF, Brasil)

Antecedentes: Artículos [CE05], [Enr], [CE01] y [EGLL].

Resultados recientes y esperados en el futuro:
Estudiamos medidas físicas, observables y Sinai-Ruelle-Bowen (SRB), para homeomorfismos o difeomorfismos especialmente aquellos que o bien carecen de hiperbolicidad uniforme total o parcial, y aquellos que si bien tienen algún tipo de hiperbolicidad uniforme, carecen de regularidad C^1 + Hölder. En el paper [1] desarrollamos una teoría general válida para todos los homeomorfismos continuos en variedades diferenciables compactas y Riemannianas. En él se prescinde de todo tipo de hiperbolicidad y de regularidad. En los últimos diez años se han encontrado numerosos ejemplos de este tipo de dinámicas, que carecen de medidas físicas. En [1] desarrollamos una teoría alternativa en la que se demuestra que igualmente existen probabilidades, que llamamos observables, que preservan las propiedades estadísticas de las medidas físicas, y con las cuales se puede definir atractores generalizados. Se plantea continuar en esa línea, intentando responder numerosas preguntas abiertas que surgen de la teoría de la medidas observables: por ejemplo, en el caso de los difeomorfismos con algún tipo de hiperbolicidad parcial, si toda medida observable es estado de equilibrio, y en el caso de los difeomorfismos C1 + Hölder si toda medida observable es Sinai-Ruelle- Bowen. Iniciamos recientemente colaboración para continuar trabajando en esta línea con Stefano Luzzatto y Martin Andersson.

5. Bifurcaciones.

Participan: Eleonora Catsigeras, Mareclo Cerminara y Heber Enrich. Del exterior: Pedro Duarte (Univ. de Lisboa).

Antecedentes: Artículos [CCE1], [CCE2], [Enr], [CE99], [CGM], [Cat] y [CE98].

Resultados recientes y esperados en el futuro:
Desde hace cuatro años estamos estudiando bifurcaciones globales de sistemas dinámicos regulares; genericidad o abundancia de estas bifurcaciones en el espacio

de difeos C^r en variedades compactas. En los artículos [2], y [3] (ambos aceptados, en prensa): demsotramos que las bifurcaciones de Feigenbaum-Coullet-Tresser y la de infinitos pozos simultáneos creados a partir del fenómenos de Newhouse en mapas localmente disipativos, se prolongan en forma isotópica a lo largo de una variedad de dimensión infinita en el espacio de difeomorfismos con suficiente regularidad. Iniciamos recientemente colaboración para continuar trabajando esta línea con Pedro Duarte de la Universidad de Lisboa, con el objetivo de extender resultados, en lo posible, a mapas conservativos.

6. Dinámica de redes neuronales y osciladores acoplados.

Participan: Ruben Budelli, Eleonora Catsigeras. Del Exterior: Pierre Guiraud (Univ. de Valparaíso, Chile)

Antecedentes: Artículos [Cat], [BCR], [BC], [BCRG], [BC92] y[BCET].

Resultados recientes y esperados en el futuro:
Estudiamos las dinámicas de modelos matemáticos determinísiticos de redes neuronales y osciladores acoplados. Existe colaboración desde hace tres años con Pierre Guiraud, de la universidad de Valparaíso, con quien Budelli y Catsigeras trabajan en conjunto. En los artículos aceptados recientemente [4] y [5], y en el artículo [6] sometido y en arbitraje, se redujo, bajo hipótesis de disipación, el modelo de redes de n neuronas marcapasos (para cualquier n mayor o igual que 2), acopladas inhiboriamente y con un grafo completo, al estudio de dinámicas no afines continuas a trozos y localmente contractivas en un espacio compacto real n-dimensional. También se estudiaron en forma abstracta estas dinámicas discontinuas, probando que siempre tienen órbitas caóticas, pero que genéricamente casi toda órbita es atraída por un ciclo límite, y que la cantidad de ciclos límites es finita. Existen dos artículos en desarrollo: Catsigeras, Guiraud y Budelli extienden algunos resultados de existencia de ciclos límites a redes que no sean inhibitorias, sino combinadas excitaroria-inhibitoria. Catsigeras, Cabeza y Martí (los dos últimos del Instituto de Física de la Facultad de Ciencias) esperan contrastar los resultados teóricos abstractos con datos experimentales en redes de neuronas artificiales.

Finalmente, en desarrollo hay una propuesta de proyecto de final de carrera de Ingeniería eléctrica de R. Hermida (ayudante grado 1 del Imerl) y un artículo de Catsigeras con H. Braun, de la Univ, de Marburg, Alemania. En ambos se estudia la dinámica del modelo de neurona receptora que responde a las ecuaciones diferencias de Hübber-Braun (H-B). Se espera obtener resultados del siguiente tipo: en el primero, resultados experimentales a partir de un prototipo electrónico de neurona artificial que responde a las ecuaciones H-B, y en el segundo, resultados teóricos, mediante el análisis abstracto del sistema dinámico determinístico proveniente de las ecuaciones diferenciales de H-B.

7. Acciones en el toro

Participan: Nancy Guelman. Del exterior: Isabelle Liousse (Univ. De Lille, Francia)

Se considera el grupo de Baumslag-Solitar (BS), $< a, b/aba^{-1} = b^n >$. Se estudiará la dinámica de las acciones de BS en el toro. Se investigará la existencia

de puntos fijos y puntos periódicos del grupo y se describirán los conjuntos minimales del mismo. Posteriormente se estudiará la estabilidad estructural de ciertas acciones del grupo BS, es decir, se analizará si dos acciones próximas del grupo son conjugadas entre sí. Probablemente se abordarán resultados de rigidez. Se abordará luego el estudio de los conjuntos minimales cuando se tiene una acción BS fiel en cualquier superficie compacta.

8. Difeomorfismos parcialmente hiperbólicos

Participan: Nancy Guelman. Del exterior: Christian Bonatti (Univ. de Dijon, Francia)

Se seguirá estudiando difeomorfismos parcialmente hiperbólicos en variedades de dimensión 3. Más particularmente, se intentará abordar el problema de la transitividad robusta del tiempo uno de un flujo de Anosov transitivo que no es una suspensión. En trabajos previos (Bonatti-Guelman) se prueba que si el tiempo uno de un flujo de Anosov transitivo es C^1 aproximado por Axioma A con mas de un atractor, el flujo es conjugado a una suspensión de un difeomorfismo de Anosov. No se sabe que sucede en el caso en que el tiempo uno del mismo flujo sea aproximado, en la topología C^1 por Axioma A con un único atractor.
Se han encontrado nuevos ejemplos de Axioma A con un único atractor, un único repulsor , y estructuralmente estables en dimensión 3, ¨cercanos¨ al tiempo uno de cualquier flujo de Anosov, pero esa definición de ¨cercano¨es mas débil que C^1-próximo (y más fuerte que C^0).
Se quiere conocer qué difeomorfismos parcialmente hiperbólicos están en la clausura C^1 de estos nuevos ejemplos de Axioma A. Esto ayudaría a resolver dos problemas de clasificación. Por un lado la clasificación de difeomorfismos estructuralmente estables en variedades de dimensión 3. Por otro lado, la clasificación de difeomorfismos estructuralmente estables, cuyo conjunto no errante consiste en un único atractor y un único repulsor.

9. Conjuntos de Cantor minimales

Participan: Jorge Iglesias, Aldo Portela.

Sea K un conjunto de Cantor, $K \subset S^1$, una pregunta clásica de Mc Duff [MD] es ¿existe una función de S^1 de clase C^r para algún r que tenga a K como conjunto minimal? Si $r = 0$ la respuesta es afirmativa. Para $r = 2$ el Teorema de Denjoy da una respuesta siempre negativa. Para los demás casos la respuesta depende del conjunto K. Por ejemplo si K es el Cantor triádico la respuesta es negativa. Mc Duff propone la siguiente conjetura: Sea $\{I_j\}_{j\in Z}$ el conjunto de componentes conexas de K^c, el complemento de K.Se define el espectro de K (E_K) como el conjunto $\{\lambda_i\}$ donde $\lambda_{i+1} < \lambda_i$, con λ_i la longitud de I_j para algún j. Si $\lambda_n/\lambda_{n+1} \not\to 1$ entonces K no es C^1-minimal.
Debido a que esta conjetura es muy dificil nos enfocamos en trabajar en caso más simples. En este sentido tenemos los trabajos [IP1] y [IP2], que pensamos admiten generalizaciones: Existen otras familias de conjuntos de Cantor que se saben que no son C^1-minimales. Por ejemplo, A. Norton [N] prueba que los conjuntos de Cantor C^2-hiperbólicos cercanos a un conjunto afín no son C^1-minimales. En esta dirección,

nosotros probamos que los conjuntos de Cantor $C^{1+\alpha}$-hiperbólicos cercanos a un conjunto afín no son C^1-minimales. Objetivos:

1. Probar que cualquier conjunto de Cantor $C^{1+\alpha}$-hiperbólico no es C^1-minimal (esta pregunta fue planteada por A. Norton en [N]).
2. Avanzar en el sentido de la conjetura de Mc Duff.

10. Caracterización de endomorfismos C^1 estructuralmente estables.

Participan: Jorge Iglesias, Aldo Portela, Alvaro Rovella.

Ya existe una caracterización satisfactoria de los difeomorfismos estructuralmente estables en variedades compactas: son aquellos mapas que satisfacen el axioma A y la condición de transversalidad fuerte. Cuando se consideran mapas no invertibles, se plantean varios problemas. En primer lugar, se conocen condiciones necesarias de C^1 estabilidad estructural, pero no se sabe si estas condiciones son suficientes. Más aún, son muy pocos los ejemplos conocidos de mapas C^1 estables, más allá de los difeomorfismos y los mapas expansores. En particular, no se conocen ejemplos en variedades de dimensión dos. Existe un ejemplo, planteado por Przytycki en [Prz], que se ha conjeturado ser C^1 estable.

Objetivos:

1. Demostrar la C^1 estabilidad del ejemplo de Przytycki.
2. Caracterizar los mapas C^1 estables en dimensión dos, definiendo la condición de transversalidad fuerte para endomorfismos, que deberá implicar la susodicha condición para difeomorfismos más una condición de transversalidad que contemple las posibles autointersecciones de variedades inestables.
3. Clasificación de mapas C^1 estables en dimensión dos. Se espera, ya más a largo plazo, obtener una clasificación de los mapas C^1 estables en variedades bidimensionales, es decir, obtener un conjunto de invariantes suficientes para establecer si dos mapas estables son equivalentes desde el punto de vista topológico.

11. C^r estabilidad estructural.

Participan: Jorge Iglesias, Aldo Portela, Alvaro Rovella.

Está lejos de saberse si un mapa C^r estable debe ser Axioma A, aún en el caso de difeomorfismos. Para mapas no invertibles, el problema aumenta en dificultad: existen muy pocos ejemplos y casi no hay resultados con condiciones suficientes de C^r estabildad. Deben mencionarse resultados parciales originados en ejemplos que en ciertas condiciones dan C^r estabilidad: P.Berger ha recientemente encntrado condiciones suficientes de C^∞ estabilidad para endomorfismos con puntos crícos en cualquier dimensión; en [IPR08] se muestran ejemplos de mapas C^3 pero no C^2 estables en dimensión dos. El principal problema para obtener estabilidad estructural de mapas con puntos críticos radica en la complejidad geométrica de los conjuntos de singularidades. En [IPR09] se introdujo el concepto de estabilidad módulo singularidades, un mapa f es estable en este sentido si existe un entorno de f tal la equivalencia geométrica implica la equivalencia topológica en este entorno.

Objetivos:

1. Estudiar la estabilidad módulo singularidades.
2. Caracterizar los mapas Axioma A que son C^r estables, al menos en dimensiones bajas.

12. Sistemas Dinámicos Lagrangianos. Métodos Variacionales.

Participan: Ezequiel Maderna. Del exterior: Albert Fathi, Lyon.

Maderna considera sistemas dinámicos definidos por la ecuación de Euler-Lagrange asociada a una función lagrangiana L definida sobre el fibrado tangente de una variedad diferenciable. Estudia la existencia y las propiedades ergódicas de las medidas minimizantes en el sentido que ha sido definido por Mather [Mat] y cuya caracterización es un tema en actual desarrollo (ver por ejemplo [Rif]). Más específicamente, se interesa en la existencia de soluciones de viscosidad de la ecuación de Hamilton-Jacobi correspondiente a estos sistemas, que se vinculan con la dinámica del mismo a través de la teoría weak KAM, que establece que las derivadas de estas soluciones se corresponden con las variedades inestables de los llamados conjuntos de Aubry (o de Aubry-Mather), siendo estos últimos quienes soportan las medidas minimizantes del sistema. Los principales resultados obtenidos por Maderna en este contexto general establecen la invariancia de dichas soluciones bajo la acción de grupos de simetrías. En el caso en que el espacio sea compacto Maderna probó que todas las soluciones deben ser invariantes bajo la acción de un grupo conexo de simetrías en [Mad02]. Este resultado ha sido recientemente generalizado por Zavidovique en [Zav] al caso en que sobre el espacio se definen dos dinámicas hamiltonianas que conmutan. También obtuvo resultados en esa dirección para sistemas lagrangianos en variedades riemannianas completas pero no compactas (trabajo en colaboración con Fathi [Fat]).

13. Problemas de N cuerpos.

Participan: Ezequiel Maderna. Del exterior: Andrea Venturelli (Francia), Richard Montgomery (MSRI, USA).

Desde 2005 Maderna ha enfocado la teoría general de Aubry-Mather al sistema clásico de N-cuerpos, es decir a la ecuación diferencial establecida por Newton para modelar el movimiento de los planetas en el sistema solar. Este enfoque ha sido exitoso por varias razones. En primer lugar, por haber mostrado que la teoría weak KAM es aplicable en un contexto mucho más amplio que el que era considerado por la literatura existente en el tema hasta el momento, a saber, admitiendo no solamente espacios no compactos sino también al caso en que la función hamiltoniana presenta singularidades y además el flujo de Euler-Lagrange no es completo. En segundo lugar, y no menos interesantes, los resultados concretos que Maderna obtuvo mediante esta técnica en el problema clásico de Newton eran hasta ahora desconocidos. Más precisamente, se ha logrado establecer la existencia abundante de movimientos completamente parabólicos, es decir en los que las velocidades de todos los cuerpos tienden a cero, partiendo de una configuración espacial arbitraria de los mismos. Hasta el presente, los únicos movimientos conocidos de este tipo eran movimientos homotéticos, que sólo son posibles partiendo de configuraciones muy especiales (centrales) de las cuales poco se sabe cuando la cantidad de cuerpos es grande (N¿4). La pieza clave que permite aplicar la teoría weak KAM al problema de Newton es la estimación Holder del potencial de acción crítico (es decir a tiempo

libre) que ha sido establecida en el artículo [Mad06]. La abundancia de movimientos completamente parabólicos es deducida en un trabajo posterior en colaboración con Da Luz [MdL] y otra variante, en la que se permite elegir además la configuración asintótica del movimiento fué establecida en colaboración con Venturelli en [MV].

Los trabajos en preparación en esta línea de investigación incluyen la construcción de funciones de Busemann para el problema de N-cuerpos y la no diferenciabilidad de las mismas a partir de tres cuerpos, hecho que está íntimamente relacionado con la sensibilidad respecto a las condiciones iniciales (caos) en el caso N¿2. También se estudia actualmente la caracterización de las configuraciones asintóticas de estos nuevos movimientos, que hemos denominado configuraciones minimizantes, y que de cierta forma juegan el rol de conjunto de Mather en el problema de Newton. Una pregunta natural (abierta) en esta dirección es la unicidad genérica en las masas de estas configuraciones (módulo isometrías del espacio).

14. Estudio ergódico de los flujos geodésico y horocíclicos en foliaciones holomorfas por superficies de Riemann hiperbólicas.

Participan. Matilde Martínez. Del exterior: C.Bonatti (U. de Bourgogne, Francia), X.Gómez-Mont (Centro de Investigacióón en Matemáticas, México)

El objetivo de este proyecto de trabajo, consiste en entender y describir las medidas estacionarias para la difusión del calor (también llamadas armónicas) en foliaciones holomorfas singulares por curvas, y particularmente las foliaciones que vienen de campos vectoriales polinomiales en el plano proyectivo complejo.

En este momento hay al menos tres grupos de investigación abordando este problema con diferentes técnicas: El integrado por J.E.Fornaess (U. de Michigan, EEUU) y N.Sibony (U. de Paris-Sud XI, Francia), que utiliza principalmente técnicas de análisis complejo. (Ver [B-S2002], [F-S2008],[F-S2005],[F-S2010].) El integrado por B.Deroin (U. de Paris-Sud XI, Francia) y V.Kleptsyn (U. de Rennes I, Francia), que utiliza principalmente técnicas probabilísticas. (Ver [D-K2007].) El integrado por C.Bonatti, X.Gómez-Mont y M.Martinez, que utiliza principalmente técnicas de geometría hiperbólica y dinámica parcialmente hiperbólica.

Nuestro programa de investigación apunta a describir las medidas físicas del flujo geodésico en foliaciones holomorfas por superficies hiperbólicas, asícomo sus cuencas de atracción. Las medidas invariantes por el flujo geodésico foliado están estrechamente vinculadas a las medidas armónicas, pues estas últimas están en correspondencia canónica y biyectiva con las medidas invariantes simultáneamente por los flujos geodésico y horocíclico (estable o inestable), de acuerdo a un teorema de Yu.Bakhtin y M.Martínez (ver [M2006] y [B-M2008]).

Objetivos:
1. Estudio del flujo geodésico en foliaciones transversalmente conformes por superficies hiperbólicas.En este contexto, el objetivo principal es estudiar el exponente de Lyapunov de la holonomía a lo largo de geodésicas en las hojas de la foliación. Se intenta probar que bajo condiciones muy laxas sobre la foliación éste es negativo para casi toda geodésica respecto de una medida ergódica invariante por el flujo geodésico y el flujo horocíclico inestable, exactamente el tipo de medidas que están vinculadas a las medidas armónicas. Posteriormente, se pretende usar herramientas de dinámica parcialmente hiperbólica para describir los conjuntos estables. La

dificultad principal consiste en la imposibilidad de utlilizar resultados de dinámica parcialmente hiperbólica y teoría de Pesin debido a la falta de regularidad del flujo geodésico foliado en la dirección transversal a la foliación.
2. Estudio del flujo geodésico en foliaciones de Riccati con singularidades. En este contexto en que la dinámica de la foliación (en la forma de su holonomía) está predeterminada, se pretende continuar y profundizar el estudio del flujo geodésico en foliaciones de Riccati hecho anteriormente por C.Bonatti, X. Gómez-Mont, R.Vila y M.Viana (ver [B-GM2001], [B-GM-Via2003], [B-GM-Vil2010]), así como aprovechar herramientas recientes para el estudio de cociclos lineales desarrolladas por A.Avila y M.Viana (ver [A-V2007]). Usando la estructura muy particular de las foliaciones de Riccati es posible dar una descripción de las medidas armónicas alternativa, (es decir, no en términos del movimiento browniano) y tener mayor control sobre el comportamiento de las trayectorias brownianas y las geodésicas cerca de los puntos singulares. Más allá de que hay varias preguntas concretas e interesantes que nos estamos planteando en las foliaciones de Riccati, esperamos que el estudio de esta foliación singular particularmente simple sirva de escalón intermedio para abordar el estudio del flujo geodésico en foliaciones holomorfas singulares más generales.
3. Estudio del flujo geodésico en foliaciones holomorfas singulares por curvas. La primer dificultad que se enfrenta al estudiar las medidas armónicas o las medidas invariantes por el flujo geodésico en este contexto, es la necesidad de determinar qué masa asigna una tal medida al conjunto singular de la foliación. Para hacerlo, se utilizarán una descripción de las corrientes armónicas foliadas hecha por Sibony y Fornaess en [FS2005] así como un estudio de la geometría de la foliación alrededor de los puntos singulares, que se supondrán aislados y alrededor de los cuales la foliación genérica es linealizable. Intentaremos estimar el exponente de Lyapunov a lo largo de una geodésica genérica para una medida invariante por los flujos geodésicos y horocíclicos, y determinar si es posible recuperar la teoría de Pesin desarollada para foliaciones no singulares (punto 1) en este caso, considerando que la fuerte contracción de la holonomía en una separatriz de un punto singular puede impedir que existan ¨variedades estables¨.

15. Estudio de la dinámica topológica del flujo horocíclico en foliaciones por superficies de curvatura negativa

Participan: Matilde Martínez. Del exterior: Alberto Verjovsky.

Martínez y Verjovsky han hecho algunos avances en la comprensión de la dinámica topológica de los flujos geodésico y horocíclicos en laminaciones minimales por superficies de curvatura negativa . El objetivo más inmediato es demostrar la siguiente afirmación: Sea (M,F) un espacio foliado por superficies con una métrica riemanniana de curvatura negativa. Entonces sucede una y sólo una de las siguientes: a) La laminación es la laminación en órbitas de una acción del grupo afin. b)En el fibrado tangente unitario a F la foliación horocíclica es minimal; i.e. todos los horocíclicos son densos. El primer caso ha sido ampliamente estudiado, y está bien comprendido. En el segundo, una consecuencia de este resultado sería que el flujo geodésico foliado es topológicamente mixing.

16. Estudio del flujo de Ricci en laminaciones compactas por superficies.

Participan. Matilde Martínez y Richard Muñiz.

El flujo de Ricci es una manera de deformar una estructura riemanniana en una variedad diferenciable. Es bien conocido que, en el caso de superficies compactas, se puede dar una prueba (independiente) del Teorema de Uniformización utilizando el flujo de Ricci; dada una métrica inicial, la solución al flujo de Ricci converge a una métrica de curvatura constante.

Se estudiará el flujo de Ricci en foliaciones, en particular, se verá la posibilidad de utilizar el flujo de Ricci en laminaciones (o espacios foliados) por superficies de Riemann, con el objetivo de obtener una nueva prueba del teorema de uniformización de Candel (ver [C1993]):

Teorema (Candel): Sea L una laminación por superficies de Riemann tal que todas las hojas son hiperbólicas. Entonces existe una métrica continua compatible con la estructura conforme en L, según la cual todas las hojas tienen curvatura constante -1.

Las dificultades principales radican en que hay que considerar el flujo de Ricci en superficies no compactas (las hojas de la laminación), cosa que incluso en el caso de superficies se ha comenzado a hacer recientemente, y en la falta de regularidad transversal de las métricas riemannianas en la laminación. En las hipótesis del teorema anterior, gracias a la compacidad del espacio total y la hiperbolicidad de las hojas, creemos posible probar un teorema análogo al que probaron Hamilton y Chow (ver [H1988] y [C1991])en el caso de superficies compactas, i.e. si partimos de una métrica inicial cualquiera, ésta evoluciona a una métrica continua en L que tiene curvatura constante. Esto daría una prueba más geométrica del teorema mencionado y abriría la posibilidad de aplicar la técnica del flujo de Ricci a foliaciones de rango mayor a 2.

17. Instantones singulares en S^4 con simetría SU_2.

Participan: Richard Muñiz

El estudio de los instantones con singularidad holonómica, es un tema que surgi'o de la tesis doctoral de Muñiz. El moduli de instantones con singularidad holonómica fue estudiado por P.B. Kronheimer y T.S. Mrowka [KM]. A partir del trabajo de la tesis doctoral de Muñiz se desprende que es posible considerar instantones de este tipo con simetría SU_2, y obtener a partir de ellos variaciones isomonodrómicas, como las obtenidas en dicha tesis a partir de instantones sin singularidad [Mu07], [Mu09]; en este caso, los instantones tendrían singularidad holonómica a lo largo de las dos órbitas especiales de la acción de SU_2 considerada (las cuales son isomorfas a RP^2). Al tomar una sección transversal a las órbitas, la ecuación de autodualidad se reduce a un sistema de tres ecuaciones ordinarias no lineales. Para ciertas condiciones iniciales (que están dentro de un conjunto discreto) las soluciones definen una conexión diferenciable en S^4. Se está estudiando cuáles condiciones iniciales son las necesarias para obtener instantones con singularidad holonómica. Los par'ametros de la correspondiente ecuaci'on de Painlevé en este caso se pueden expresar en términos del parámetro de holonomía.

Más allá de esto, tiene sentido considerar instantones invariantes definidos fuera de las órbitas especiales sin ninguna condición. En tal caso también se obtienen soluciones de la ecuación VI de Painlevé y los parámetros quedarían expresados en términos de la condición inicial para el instantón. Se estudiará el espacio de soluciones de la ecuación de autodualidad reducida y su relación con las ecuaciones de Painlevé. Recientemente se encontraron soluciones algebraicas a la ecuación VI de Painlevé que no están asociadas a un grupo fuchsiano con monodromía finita [Boa]. Esto mismo podría suceder en nuestra situación, lo cual la hace interesante.

18. Linearización de campos de Vectores sin cohomología

Participan: Miguel Paternain.

Consideramos un flujo $(\phi^t)_{t\in\mathbb{R}}$ generado por un campo X en una variedad cerrada M. Decimos que $(\phi^t)_{t\in\mathbb{R}}$ es libre de cohomología si para toda función suave f existen una función suave h y una constante c_f de tal forma que $L_X h = f + c_f$, donde L_X denota derivada de Lie en la dirección de X.

Un problema estudiado recientemente es la conjetura siguiente debida a A.Katok ([Kat01], [Kat03], [Hur]): *Sea $\{\phi^t\}_{t\in\mathbb{R}}$ un flujo sin cohomología generado por un campo X en una variedad cerrada M. Entonces, a menos de difeomorfismos, M es un toro y X es un campo lineal Diofantino.*

En [RH] se demuestra que un flujo sin cohomología en una variedad M es a menos de difeomorfismos, semi-conjugado a un flujo lineal Diofantino en un toro de dimensión igual al primer número de Betti de M. En [LS] el problema análogo para difeomorfismos se resuelve para toros de dimension cuatro o menos. Recientemente trabajo independiente de G. Forni [GFo], A. Kocsard [Koc] y S. Matsumoto (sin ref.), prueba la conjetura de Katok cuando $\dim M \leq 3$, usando la prueba de Taubes de la conjetura de Weinstein [Tau].

Se utilizará el espacio de lazos completo en vez de la homología de la variedad para mostrar que en ausencia de cohomología existen un grupo Abeliano A, un homomorfismo $t \in \mathbb{R} \mapsto at \in A$, y una inyección continua $l : M \to A$, tal que $l(\phi^t(y)) = l(y) + at$ para todo $y \in M$ y $t \in \mathbb{R}$. En una segunda etapa se estudiarán con más detalle las propiedades topológicas del grupo abeliano.

19. Caracterización de la C^1 Omega estabilidad.

Participan: Alvaro Rovella, Martín Sambarino. Del exterior: Pierre Berger (CNRS, París) y Enrique Pujals (IMPA, Brasil)

Es bien sabido que un difeomorfismo es C^1-Ω estable si y sólo si es axioma A sin ciclos. Se ha demostrado que esta caracterización puede extenderse a mapas no invertibles cuyo conjunto crítico no intersecta al conjunto no errante ([AMS] y [Prz]). Sin embargo, existen ejemplos de mapas C^1-Ω estables con puntos críticos en el conjunto no errante ([MP]). Condiciones suficientes incluyendo este ejemplo se encontraron en [DRRV], junto con la prueba de que estas condiciones son necesarias en dimensión dos. Se ha conjeturado, aún sin demostración, que un mapa C^1-Ω estable con puntos críticos no errantes debe satisfacer el axioma A. Una prueba de esta conjetura debe pasar por la demostración del closing lemma para mapas C^1 genéricos.

Objetivos:

1. Demostrar el C^1 closing lemma para mapas C^1 genéricos.
2. Demostrar que todo mapa C^1-Ω estable es Axioma A.
3. Caracterizar los mapas C^1-Ω estables en dimensión tres.

20. Estabilidad inversa.

Particicpan: Alvaro Rovella. Del exterior: Pierre Berger (CNRS, París)

Un concepto de estabilidad, que tiene sentido para mapas no invertibles, es el de la estabilidad del límite inverso de un mapa. Se demostró en [Prz] que un endomorfismo de Anosov sin puntos crí ticos es C^1 inverso estable. Este resultado fue generalizado por J.Quandt a endomofirmos de Anosov con puntos críticos, y más recientemente a mapas Axioma A con transversalidad fuerte y sin piezas básicas tipo silla, (trabajo sometido a publicación por P.Berger y A.Rovella). También se ha estudiado la Ω estabilidad inversa: Przytycki para mapas sin puntos críticos, e Ikeda para mapas con puntos críticos.
Objetivos:

1. Estudiar si la C^1 estabildad inversa es equivalente a Axioma A más transversalidad fuerte.
2. Para esto se necesitará una mejor comprensión de la C^1 estabilidad estructural.

21. Descomposición dominada e hiperbolicidad parcial

Participan: Martín Sambarino. Del exterior: Sylvain Crovisier (Francia), D. Yang (China)
Uno de los problemas fundamentales de la teoría de los sistemas dinámicos es la de describir ¨conjuntos grandes¨ (genérico, residual, denso, etc.) en el espacio de todos los sistemas. En la década de los 80, Palis conjetura que en cualquier dimension y en cualquier topología $C^r, r \geq 1$, cualquier difeomorfismo se puede aproximar por otro que sea Axioma A (por lo tanto genéricamente Ω-estable), por uno que exhiba una tangencia homoclínica o por uno que exhiba un ciclo hetoroclínico. En [PS1] se prueba esta conjetura para el caso de superficies y topología C^1. Una consecuencia de este resultado y que era un problema abierto desde la creación del "horseshoe"por S. Smale es que genéricamente en superficies y topología C^1 los sistemas son ¨sencillos¨ (Morse-Smale) o tiene una órbita homoclínica transversal, caracterizando así aquellos sitemas que robustamente tiene entropía topológica cero.. Una herramienta fundamental para obtener este resultado fue dar condiciones suficientes para garantizar hiperbolicidad en conjuntos con descomposición dominada. La descomposición dominada se puede pensar como un análogo a la ausencia de puntos críticos en endomorfismos del intervalo. En [PS1] se prueba que en la ausencia robusta de tangencias homoclinicas se obtiene descomposición dominada y se prueba que si un difeomorfismo suficientemente diferenciable (al menos C^2) tiene un conjunto invariante con descomposición dominada entonces es hiperbólico o contiene una curva simple cerrada y periódica donde el difeomorfismo se comporta como una rotación irracional. En [PS2] se sigue esta linea de investigación y se estudia el efecto de la diferenciabilidad en la dinámica sobre conjuntos con descomposición dominada. En particular se prueba que si el difeomorfismo es de clase C^2 entonces el conjunto no errante admite una descomposición espectral como el clásico teorema de Smale para difeomorfismos Axioma A, donde además la

dinámica se puede separar en dos partes, una equicontinua y otra caótica. En este trabajo hay dos resultados que vale la pena mencionar: 1) si un difeomorfismo C^2 tiene infinitos pozos, necesariamente se aproxima por difeomorfismos con tangencias homoclinicas (lo cual da una especie de recíproco débil de un teorema de S. Newhouse) y 2) un clásico lema de Franks, simple pero muy útil en topología C^1, no es válido en topología $C^r, r \geq 2$, esto es, hay difeomorfismos que tienen una sucesión de puntos periódicos hiperbólicos pero cuya tasa de hiperbolicidad (o valores propios normalizados) tiende a 1 pero sin embargo para cualquier difeomorfismo C^2 cercano seguirán siendo puntos periódicos hiperbólicos. Estos temas y métodos de investigación se han seguido desarrollando en dimensiones superiores en [PS3] y [PS4].

Otra linea de investigación, aunque no separada de la anterior, es la caracterización en términos de la dinámica en el diferencial de los fenómenos dinámicos que son robustos. Para ejemplificar esta idea o concepto basta recordar la clásica conjetura de estabilidad de Palis-Smale: un difeomorfismo es estable (propiedad robusta) si y solamente si es hiperbólico (dinámica en el diferencial). Otro ejemplo es un resultado de R. Mañe: un difeomorfismo es C^1 robustamente expansivo si y solo si es Quasi-Anosov. En esta linea en [PPSV], [SV1] y [SV2] se caracterizan aquellas clases homoclínicas que son robustamente expansivas. Por otra parte en [PS5] se dan condiciones sobre la dinámica del diferencial para que un difeomorfismo parcialmente hiperbólico tenga alguna de sus foliaciones robustamente minimales. A partir de esto se reprueban clásicos teoremas de Mañe y Shub sobre la existencia de sistemas robustamente transitivos no hiperbólicos. En [PoS] se estudian clases homoclínicas que robustamente tienen interior no vacio.
Objetivos:

1. Caracterizar los sistemas dinámicos que no se pueden aproximar por tangencias homoclínicas en dimensión mayor que dos. Probar que son sistemas parcialmente hiperbolicos.(1er año)
2. El objetivo central es mostrar que estos sistemas tiene una cantidad finita de clases homoclínicas(4 años).
3. Caracterizar en términos de hiperbolicidad y/o descomposición dominada, otros fenómenos C^1 robustos, por ejemplo, clases de recurrencia robustamente expansivas. (2-4 años).

22. Estudiantes avanzados

Juan Alonso. Orientador: Karen Vogtmann. Realizando el doctorado en Cornell (EEUU).
Los Grupos Límite fueron introducidos por Z. Sela en su solución al problema de Tarski, y son de utilidad en el estudio de sistemas de ecuaciones en grupos libres. La equivalencia en medida es una relación entre grupos discretos introducida por M. Gromov, similar a la relación de Cuasi-Isometria. El problema es estudiar que grupos límite son equivalentes en medida a un grupo libre. Hay un resultado positivo para grupos límite hiperbólicos, por Bridson, Tweedale y Wilton, [BTW]. Por otra parte, la descomposicion JSJ (de Rips-Sela) de un grupo es un objeto que permite clasificar las factorizaciones de dicho grupo como producto amalgamado o extension HNN sobre un subgrupo cíclico. Está inspirada en el teorema de Jaco,

Shalen y Johannson para 3-variedades. Estudio una clase de ejemplos de esta descomposición, que generalizan los ejemplos construidos por M. Forester [For].

Diego Armentano. Orientadores de doctorado: Mario Wschebor (CMAT) y Jean-Pierre Dedieu (IMT Toulouse).
La Complejidad Algorítmica es el estudio del çosto"de resolver un problema computacional mediante cierto método iterativo (algoritmo). Una buena medida del çosto"(o complejidad) de un algoritmo es el número de pasos requeridos para pasar de un input a un output en un problema numérico. El objetivo de mi tesis de doctorado es estudiar la complejidad de ciertos tipos de algoritmos -denominados métodos de homotopía- para resolver sistemas de ecuaciones polinomiales. Este tipo de algoritmos están basados en una variante "incremental"del Método de Newton, motivado por trabajos pioneros en el área debidos M. Shub y S. Smale. Concretamente, mi tesis se centra en estudiar e implementar un algoritmo para resolver el problema de encontrar valores propios de una matriz mediante métodos homotópicos.

Alfonso Artigue. Orientador: Miguel Paternain
Estudiamos flujos expansivos especialmente en presencia de puntos de equilibrio. Analizamos propiedades generales asi como su estructura en variedades de dimensión uno y dos. Además damos aplicaciones a los billares poligonales planos.

Joaquin Brum. Orientador: Miguel Paternain
Realizando la maestría en el PEDECIBA.

Matias Carrasco. Orientador: Peter Haissinsky. Realizando el doctorado en Marsella (Francia).
Podría decirse que el area de estudio es "Quasiconformal Geometry of Fractals". El principal objeto de estudio es un invariante llamado dimensión conforme. Por ejemplo, en dinámica compleja la dimensión conforme del conjunto de Julia (hiperbólico) es un invariante por conjugaci´on, y en teoría geométrica de grupos, la dimensión conforme del borde de un grupo hiperbólico es un invariante de quasi-isometría del grupo. El interés proviene de la teoría geométrica de grupos, donde el estudio de la dimensión conforme ha tenido aplicaciones por ejemplo dando respuestas parciales a la conjetura de Cannon. Sin embargo es muy poco lo que se sabe sobre esta dimensión y el diccionario de Sullivan entre grupos Kleinianos y mapas racionales traslada estos problemas de una teoría a la otra, permitiendo obtener mas ejemplos y una mejor comprensión de este objeto. En mi tesis estoy estudiando la dimensión conforme de espacios auto-similares (que incluyen los Julia hiperbólicos y los bordes de grupos hiperbólicos) y preguntas relacionadas con esto. Un corolario de un resultado parcial es el siguiente: la dimensión conforme del conjunto de Julia de un polinomio hiperbólico conexo es igual a 1. Hay un survey de Mario Bonk que se llama "Quasiconformal geometry of Fractals"que aparece en los volumenes del ICM 2006, y otra de Peter Haissinsky "Geometrie quasiconforme, analyse au bord des espaces metriques hyperboliques et rigidites (d´apres Pansu, Bourdon, Pajot, Bonk, Kleiner)", seminario Bourbaki 2008. Y para ver como se relaciona la dimensión conforme con por ejemplo el módulo combinatorio de una familia de curvas, también es interesante ver un reciente preprint de Marc Bourdon y Bruce Kleiner:

Çombinatorial Modulus, the combinatorial Loewner property and Coxeter groups."

Pablo Guarino. Orientación de Welington de Melo y Enrique Pujals (IMPA, Brasil).
El área de estudio es dinámica unidimensional (tanto real como compleja). Un posible camino sería el siguiente: el espacio de aplicaciones unimodales de un intervalo admite una laminación en clases híbridas. Esta estructura ha tenido fuertes aplicaciones, como por ejemplo en la prueba de la hiperbolicidad del operador de renormalización, o en la prueba de la dicotomía regular o estocástica para familias no-triviales de mapas unimodales. Se intenta extender la teoría para el caso multimodal.

Pablo Lessa. Orientación en cotutela de François Ledrappier (Francia) y Matilde Martinez.
El plan de trabajo consiste en estudiar, por un lado el movimiento Browniano en foliaciones y por otro los vectores de rotación que introduje para homeomorfismos de variedades de curvatura menor o igual a cero. A fin del año pasado envié un preprint sobre vectores de rotación Rotation vectors for homeomorphismsm of nonpositively curved manifolds.[a] la revista Nonlinearity.

Leticia Morales. Orientadores: Alvaro Rovella y Aldo Portela.
El trabajo de tesis doctoral consistirá en encontrar condiciones suficientes para la estabilidad C^r de mapas con singularidades en variedades bidimensionales, intentando generalizar los resultados de Berger sobre estabilidad C^∞ y de [IPR08].

Alejandro Passeggi Orientadores M.Sambarino y Tobías Jaeger. La tesis de maestría será defendida en el mes de junio 2010 bajo la orientación de M.Sambarino. Esta se basa en obtener un resultado de cierto interés en lo que se conoce como "Dinámica en T2". Este resultado se basa en la construcción de ejemplos minimales en el toro bidimensional , que no están en clases de conjugaciones de las traslaciones minimales y además tienen buena diferenciabilidad.
A partir de setiembre de 2010, me traslado a Alemania para hacer el doctorado bajo la orientación del Dr. Tobias Jaeger en la universidad de Dresden.

Rafael Potrie. Orientación en cotutela por Martin Sambarino y Sylvain Crovisier (París).
La tesis consiste en comprender la estructura y existencia de atractores para dinámicas C^1 genéricas. Esto incluye comprender los llamados quasi-atractores, cuya existencia está siempre garantizada y que son los candidatos naturales a ser atractores. En esta línea, sería importante obtener resultados acerca de su estructura, tanto geométrica como ergódica al mismo tiempo que construir ejemplos admitiendo todo tipo de estructuras. El conocimiento de que existen dinámicas genéricas sin atractores motiva comprender este fenómeno recientemente descubierto y estudiar posibles nuevos candidatos para conocer el comportamiento asintótico de la mayoría de las órbitas para la mayoría de los sistemas.

Andrés Sambarino. Orientador: Jean Francois Quint (París).
Las propiedades dinámicas del flujo geodésico en curvatura negativa han demostrado ser de gran importancia para los sistemas dinámicos y otras ramas de la matemática. En espacios homogéneos de rango superior, el llamado "flujo de cámara de Weil" puede interpretarse como análogo al flujo geodésico en rango 1, ya que ambos son la acción a derecha del álgebra de Cartan del grupo de isometrías. Propiedades dinámicas del flujo de cámara de Weil han sido estudiadas principalmente para Latices (espacios homogéneos de área finita) y mas recientemente para grupos de tipo Schottky. El objetivo es entonces entender este flujo para otra clase de espacios homogéneos de área infinita, a saber, las representaciones de Hitchin.

Juliana Xavier. Orientador: Patrice Le Calvez (París).
La tesis consiste en estudiar homeomorfismos conmutantes de superficie. El objetivo es encontrar un punto fijo común para ellos. Hay varios resultados positivos en esta dirección para diffeomorfismos pero muy poco se sabe en el caso meramente topológico.

12. REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

Referencias

[AMS] A. Arroyo, R. Markarian, D. Sanders. Bifurcations of periodic and chaotic attractors in pinball billiards with focusing boundaries. Nonlinearity 22 (2009), 1499 - 1522.

[AMS] N. Aoki, K. Moriyasu, N. Sumi. C^1 maps having hyperbolic periodic points. Fundamenta Mathematicae. 169, 1-49, 2001.

[A-V2007] Simplicity of Lyapunov spectra: A sufficient criterion. Portugaliae Mathematica 64 (2007) 311-376

[B-M2008] Yu.Bakhtin, M.Martínez. A characterization of harmonic measures on laminations by hyperbolic Riemann surfaces. Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist. Volume 44, Number 6 (2008), 1078-1089.

[Ber] P.BergerPersistence of stratifications of normally expanded laminations.Preprint (2007)

[B-S2002] B.Berndtsson, N.Sibony. The equation on a positive current. Invent. Math. 147 (2002) 371-428

[Boa] P. Boalch From Klein to Painlev'e via Fourier, Laplace and Jimbo, Proc. London Math. Soc. (3) 90, 167-208 (2005).

[B-GM2001] C.Bonatti, X.Gómez-Mont. Sur le comportement statistique des feuilles de certains feuilletages holomorphes. Essays on geometry and related topics, Vol. 1, 2, 15–41, Monogr. Enseign. Math., 38, Enseignement Math., Geneva, 2001.

[B-GM-Via2003] C.Bonatti, X.Gómez-Mont; M.Viana. Généricité d'exposants de Lyapunov non-nuls pour des produits déterministes de matrices. Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire 20 (2003), no. 4, 579–624.

[V-GM-Vil2010] C.Bonatti, X.Gómez-Mont, R.Vila-Freyer. Statistical behaviour of the leaves of Riccati foliations. Ergodic Theory and Dynamical Systems (2010), 30:67-96 Cambridge University Press.

[BTW] M. Bridson, M. Tweedale, H. Wilton, Limit groups, positive-genus towers and measure-equivalence, Ergod. Th.and Dynam. Sys. (2007), 27, pag 705-712.

[BCRG] Budelli, R; Catsigeras, E; Rovella, A; Gómez,L. Dynamical behavior of pacemaker neurons networks. Journal of Nonlinear Analysis, v. 30— 3 , p. 1633-1638, 1997.

[BC92] Budelli, R; Catsigeras, E. Limit Cycles in a model of bineuronal networks. Physica D - Nonlinear Phenomena, v. 56– , p. 235-252, 1992.

[BCET] Budelli, R; Catsigeras, E; Enrich, H; Torres, J Two neuron networks. Biological Cybernetics, v. 66 , p. 95-101, 1991.

[BC] Budelli, R, Catsigeras, E. Topological dynamics of contractive piecewise continuous maps in n dimensions. Sometido 2010.

[C1993] A.Candel. Uniformization of surface laminations. Ann. Sci. Ec. Norm. Super. 26, 489-516 (1993)

[CE05] Catsigeras, E., Enrich. H. Observable invariant measures. Arbitrado y Aceptado PMU en 2005 (Publicaciones Matema´ticas del Uruguay). En prensa desde 2005 hasta 2009, no publicado por razones ajenas a los autores. Evaluado positivamente por Yakov Sinai en abril de 2009, a pedido de los autores. Sometido a nuevo arbitraje en otra publicación en 2009. Aún en arbitraje (marzo 2010).

[CCE1] Catsigeras, E, Cerminara, M., Enrich, H. The analytic Feigenbaum-Coullet-Tresser attractor in the disk. Arbitrado y aceptado en Dynamical Systems International Journal. En prensa (Marzo 2010)

[CCE2] Catsigeras, E. Cerminara M., Enrich, H:: Simultaneous continuation of infinitely many sinks. Arbitrado y aceptado en Discrete and Continuous Dynamical Systems, Series A. En prensa (Abril 2010)

[Cat] Catsigeras, E.: Chaos and Stability in inhibitory neural networks. International Journal of Bifurcation and Chaos, vol. 20, N0 2, pp 349-360 (2010)

[BCR] Catsigeras, E. Rovella, A., Budelli, R.: Contractive piecewise continuous maps modeling networks of inhibitory neurons. Aceptado en International Journal of Pure and Applied Mathematics (2009). En prensa (marzo 2010).

[CE01] Catsigeras, E; Enrich, H. SRB measures for certain almost Anosov diffeomorphisms with a tangency. Discrete and Continuous Dynamical Systems v. 7– 1 , p. 177-202, 2001.

[CE99] Catsigeras, E; Enrich, H. Persistence of the Feigenbaum attractor in one-parameter families. Communications in Mathematical Physics, v. 207– 3 , p. 621-640, 1999.

[CGM] Catsigeras, E; Gambaudo, J M; Moreira, F. Infinitely renormalizable diffeomorphisms of the 2-disk at the boundary of Chaos. Proceedings of the American Mathematical Society, v. 126 1 , p. 297-304, 1998.

[Cat] Catsigeras, E. Cascades of period doubling bifurcations in n dimensions. Nonlinearity, v. 9 , p. 1061-1070, 1996.

[CE98] Catsigeras, E; Enrich, H. Homoclinic tangencias near cascades of period doubling bifurcations. Annales de L´Institut Henri Poincaré-Analyse Non Linéaire, v. 15 3 , p. 255-299, 1998.

[C1991] B.Chow. The Ricci flow on the 2-sphere. J. Differential Geom. 33 (1991), no. 2, 325-334.

[CM06] N. Chernov, R. Markarian. Chaotic billiards. Colección Mathematical Surveys and Monographs 127 AMS, Providence, 320 pp (2006)

[MdL] A. Da Luz, E. Maderna. On the free time minimizers of the Newtonian N body problem, (2009) aceptado para publicación en Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.

[DMM03] G. Del Magno, R. Markarian. Bernoulli Elliptical Stadia. Commun. Math. Phys. 233 (2003), 211 - 230.

[DMM08] G. Del Magno, R. Markarian. On the Bernoulli property of planar hyperbolic billiards. prepublicación (2008).

[D-K2007] B.Deroin; V.Kleptsyn. Random conformal dynamical systems. Geom. Funct. Anal. 17 (2007), no. 4, 1043–1105.

[DRRV] J.Delgado, N.Romero, A.Rovella, F.Vilamajó. Fund. Math. 193, (2007) 23-35

[Enr] Enrich, H. A heteroclinic bifurcation of Anosov diffeomorphisms. Dynamical Systems and Ergodic Theory. No. 18, pp 567-608, 1998.

[EGLL] Enrich, H., Guelman N, Larchanché A, Liousse I. Diffeomorphisms having rotation sets with non-empty interior. Nonlinearity. Vol. 22 N°. 8 pp 1899-1907 (2009).

[Fat] A. Fathi, E. Maderna. Weak KAM theorem on non compact manifolds, NoDEA Nonlinear Differential Equations Appl. 14 (2007), no. 1-2, pp. 1 - 27.

[F-S2005] J.E.Fornaess, N.Sibony. Harmonic currents of finite energy and laminations. Geom. Funct. Anal. 15 (2005), no. 5, 962-1003.

[F-S2008] J.E.Fornaess, N.Sibony. Riemann surface laminations with singularities. J. Geom. Anal. 18 (2008), no. 2, 400–442.

[F-S2010] J.E.Fornaess, N.Sibony. Unique Ergodicity of Harmonic Currents On Singular Foliations of $\mathbb{P}2P2$. Geom. Funct. Anal. 19 (2010), no. 5, 1334–1377.

[For] M. Forester. On uniqueness of JSJ decompositions of finitely generated groups, Comment. Math. Helv. (2003), 78, pag 740-751

[GFo] Forni, Giovanni, On the Greenfield-Wallach and Katok conjectures in dimension three,arXiv:0706.3981, 2007

[H1998] R.S.Hamilton. The Ricci flow on surfaces. Mathematics and general relativity (Santa Cruz, CA, 1986), 237-262 Contemp. Math., 71, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1988.

[Hir] K. Hiraide. Expansive homeomorphisms of compact surfaces are pseudo-Anosov, Osaka J. Math. **27**(1990), no 1, 117–162

[Hur] Hurder, S., Problems on rigidity of group actions and cocycles, Ergodic Theory Dynam. Systems5, 1985,3,473–484,

[IP1] J.Iglesias, A.Portela. Dynamically defined Cantor sets under the conditions of Mc Duff's conjecture (aceptado para publicar en Colloquium Mathematicae)

[IP2] J.Iglesias, A.Portela. On the minimality of locally similar Cantor sets of S^1, Nonlinearity 22 (2009), no. 9, 2151–2159,

[IPR08] J. Iglesias, A. Portela, A. Rovella. Structurally stable perturbations of polynomials in the Riemann sphere. Ann. Inst. H. Poincare Anal. Non Lineaire 25 (2008), no. 6, 1209–1220.

[IPR09] J. Iglesias, A. Portela, A. Rovella. Stability modulo singular sets. Fund. Math. 204 (2009), no. 2, 155–175.

[IPR3] J. Iglesias, A. Portela, A. Rovella. C^1 stable maps: Examples without saddles. Fund. Math. 208 (2010), 23-33

[JG] Jorge Groisman. Expansive homeomorphisms of the plane, Ph.D thesis, Universidad de la República, Uruguay, 2007. Aceptado en DCDS.

[Kat01] Katok, Anatole,Cocycles, cohomology and combinatorial constructions in ergodic theory, Smooth ergodic theory and its applications, Seattle,Proc. Sympos. Pure Math.,69, 107–173In collaboration with E. A. Robinson, Jr., 2001,

[Kat03] Anatole Katok, Combinatorial constructions in ergodic theory and dynamics. University Lecture Series 30, 2003, iv+121

[Koc] Kocsard, Alejandro,Toward the classification of cohomology free vector fields, Thesis IMPA, Rio de Janeiro, Brazil,2007

[KT91] V. V. Kozlov, D. V. Treschev. Billiards. A genetic introduction to the dynamics of systems with impacts. AMS (1991).

[KM] P.B. Kronheimer y T.S. Mrowka, Gauge theory for embedded surfaces. I, Topology 32, 773–826 (1993).

[Lew] J. Lewowicz, Expansive homeomorphisms of surfaces. , Bol. Soc. Bras. Mat. **20**(1989), Fasc. 1, 113–133

[Lew1] Lewowicz, Jorge. Lyapunov functions and topological stability. J. Differential Equations 38 (1980), no. 2, 192–209.

[LS] Luz, Richard U. and dos Santos, Nathan M.,Cohomology-free diffeomorphisms of low-dimension tori, Ergodic Theory Dynam. Systems,Ergodic Theory and Dynamical Systems,18,1998, 4,985–1006,

[Mat] J. Mather. Action Minimizing Invariant Measures for Positive Definite Lagrangian Systems, Math. Z. 207 (1991), pp. 169 - 207.

[Mad02] E. Maderna. Invariance of global solutions of the Hamilton-Jacobi equation, Bull. Soc. Math. France 130 (2002), no. 4, pp. 493 - 506.

[MV] E. Maderna, A. Venturelli Globally minimizing parabolic motions in the Newtonian N-body problem, Arch. Ration. Mech. Anal. 194 (2009), no. 1, pp. 283 - 313.

[Mad06] E. Maderna. On weak KAM theory for N body problems, (2006) aceptado para publicación en Ergodic Theory Dynam. Systems.

[MP] R. Mañé and C. Pugh. Stability of endomorphisms. Lecture Notes in Math. Vol 468. Springer Verlag. 175-184, 1975.

[MD] D. Mc Duff C1-minimal subset of the circle. Ann. Inst. Fourier, Grenoble. 31 (1981), 177-193.

[M2006] . Measures on hyperbolic surface laminations. Ergod. Theory Dyn. 26 847-867 (2006)

[MOP10] R. Markarian, S. Oliffson, S. Pinto. Pinball billiards in convex domains. (trabajo en elaboración).

[MPS] R. Markarian, E Pujals, M. Sambarino. Pinball billiards with dominated splitting. Aceptado para pubicación Erg. Theory and Dyn. Sys. Versión electrónica aparecida en nov 2009. http://premat.fing.edu.uy (2008).

[Mu07] R. Muñiz, Painlev'e VI equation from invariant instantons, Geometric and topological methods for quantum fields theory, Contemp. Math. 434, 215-222 (2007).

[Mu09] R. Muñiz, Isomonodromic deformations and SU_2-invariant instantons on S^4, J. Geom. Phys. 59, 1036-1047 (2009).

[N] A. Norton Denjoy minimal sets are far from affine. Ergod. Th. and Dynam. Sys. 22 (2002), 1803-1812.

[Prz] F. Przytycki. On Ω-stability and structural stability of endomorphisms satisfying Axiom A.Studia Mathematica 60, 61-77, 1977.

[PS1] E. Pujals, M. Sambarino, Homoclinic tangencies and hyperbolicity for surface diffeomorphisms, *Ann. of Math.* **151** (2000), no. 3, 961–1023.

[PS2] E. Pujals, M. Sambarino, On the dynamics of dominated splitting. *Annals of Mathematics*, **169**(3), 2009, p. 675- 739.

[PS3] E. Pujals, M. Sambarino, Integrability on codimension one dominated splitting, *Bull Braz. Math. Soc.* (2007), **38**(1),1-19.

[PS4] E. Pujals, M. Sambarino, Density of hyperbolicity and tangencies in sectional dissipative regions (en coautoría E. Pujals). *Annales de l'Institut Henri Poincaré, Analyse non lineaire.* **26** (2009), no. 5, 1971–2000.

[PS5] E. Pujals, M. Sambarino, A suficient condition for robustly minimal foliations, *Ergodic Theory & Dynamical Systems* (2006), **26**, 281-289.

[PoS] R. Potrie, M. Sambarino, Codimension one generic homolcinic classes with interior, *Bull Braz. Math. Soc., New series* **41**(1), 2010, 125-138.

[PPSV] M. Pacífico, E. Pujals, M. Sambarino, J. Vieitez; Robustly expansive codimension one homoclinic classes are hyperbolic. A aparecer en *Ergodic Theory & Dynamical Systems*

[RH] Rodriguez Hertz, Federico and Rodriguez Hertz, Jana,Cohomology free systems and the first Betti number,Discrete Contin. Dyn. Syst., 15, 2006, 193–196,

[Rif] L. Rifford. Generic regularity of weak KAM solutions and Mañé conjecture, conference in Nonlinear Analysis and PDEs, University of Texas at Austin (USA), 2010.

[Sh] M. Shub. Endomorphisms of compact differentiable manifols. Amer. J. Math., 91, 175-199, 1969.

[Sin] Ya. G.Sinai. Dynamical Systems with Elastic Reflections. Ergodic properties of dispersing billiards. Russ. Math. Surveys 24 (1970), 137 - 189.

[SV1] M. Sambarino, J. Vieitez, On C^1 persistently expansive homoclinic classes, *Discrete and Continuous Dyn. Sys.*(2006), **14**(3), 465-481.

[SV2] M. Sambarino, J. Vieitez C^1 robustly expansive homoclinic classes are generically hyperbolic. *Discrete and continuous Dynamical Systems*,**24** (2009), no. 4, 1325–1333.

[Ta95] S. Tabachnikov. Billiards, Panorama. Synth 1, SMF (1995)

[Tau] Taubes, Clifford Henry,The Seiberg-Witten equations and the Weinstein conjecture, Geom. Topol.,11,2007, 2117–2202,

[Thu] W. Thurston. On the geometry dynamics of diffeomorphisms of surfaces, Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)**19** (1988), no 2, 417–431

[Zav] M. Zavidovique. Weak KAM for commuting Hamiltonians, Nonlinearity, 23 n.4 (2010).