

Representación de curvas y superficies

Basado en: **Capítulo 9**

Del Libro: **Introducción a la Graficación por Computador**

Foley – Van Dam – Feiner – Hughes - Phillips

Resumen del capítulo

- Representación de curvas y superficies
- Mallas poligonales
- Curvas cúbicas paramétricas
- Superficies bicúbicas paramétricas
- Superficies de Hermite
- Superficies de Bézier
- Superficies B-splines
- Superficies cuádricas

Representación de curvas y superficies

Representación de curvas y superficies

¿Cómo modelar y/o representar objetos reales ?

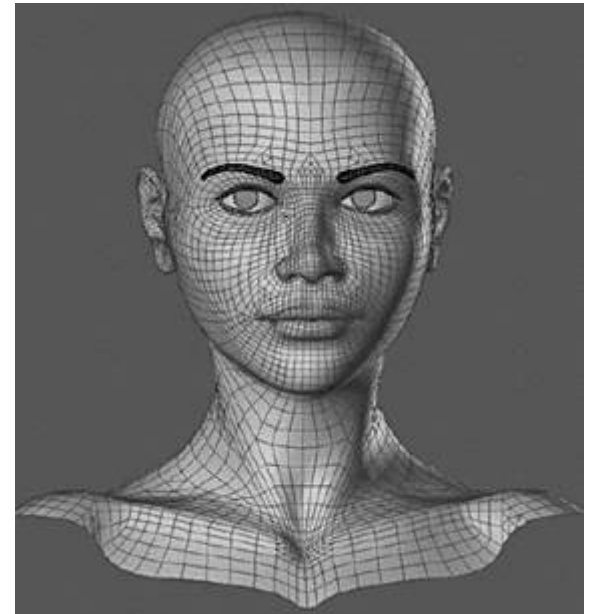
Problema:

No hay un modelo matemático del objeto

Solución:

Realizar una aproximación por trozos de:
Planos, esferas, otras formas 'simples'
de modelar.

Se intenta que el modelo sea lo más
cercano posible al objeto real.



Representación de curvas y superficies

Modelado de superficies

Se tratará las representaciones:

Superficies de malla poligonal

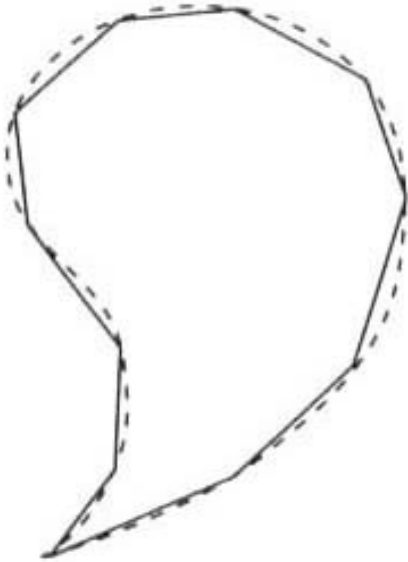
Superficies paramétricas

Superficies cuádricas

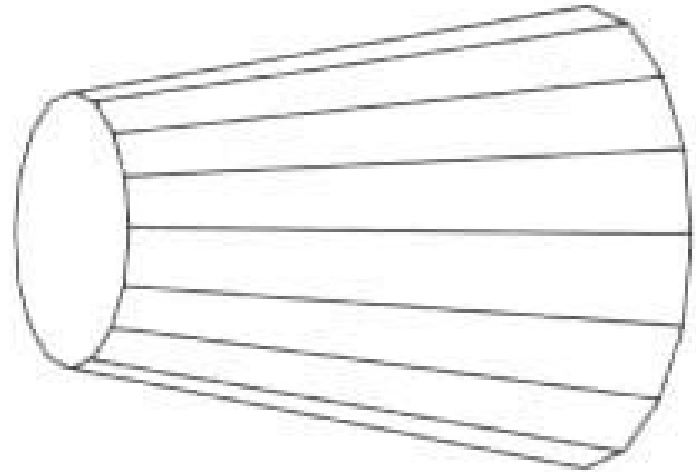
Mallas poligonales

Malla poligonal

Conjunto de superficies planas limitadas por polígonos conectados entre si.



Sección transversal de una forma curva (línea punteada) y su representación poligonal (líneas sólidas).



Objeto tridimensional representado con polígonos.

Mallas poligonales

Una malla poligonal es una colección de aristas, vértices y polígonos conectados de manera que cada arista esté compartida a lo sumo por dos polígonos.

Una arista puede ser compartida por dos polígonos adyacentes.

Un vértice es compartido al menos por dos aristas.

Cada arista forma parte de algún polígono.

Mallas poligonales

Una malla poligonal se puede representar de varias formas. Se debe elegir la representación mas apropiada.

Es tarea del programador elegir la representación más apropiada.

En una aplicación se pueden utilizar varias representaciones:

- Una para el almacenamiento interno
- Una para el almacenamiento externo
- Y otra más para que el usuario pueda crear la malla en forma interactiva

Mallas poligonales

Se puede emplear dos criterios básicos:

- Espacio
- Tiempo

Operaciones a tener en cuenta:

- Determinar todas las aristas incidentes a un vértice
- Detectar polígonos que comparten una arista o un vértice
- Hallar los vértices conectados por una arista
- Encontrar aristas de un polígono
- Dibujar la malla
- Etc.

Mallas poligonales

Diferentes formas de armar la estructura de un polígono

3 representaciones utilizadas:

- Explicitas
- Apuntadores a una lista de vértices
- Apuntadores a una lista de aristas

Mallas poligonales

Representación explícita.

Cada polígono se representa con una lista de coordenadas de vértices

$$P = (V_1, V_2, V_3, \dots, V_n)$$

$$P = ((x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3), \dots)$$

Los vértices se almacenan en el orden en que los detectaríamos en un recorrido por el polígono.

Hay aristas entre los vértices sucesivos en la lista, así como entre el primer y último vértice.

Mallas poligonales

En el caso de un solo polígono la representación es eficiente

En el caso de una malla poligonal se desperdicia mucho espacio.

No existe una representación explícita de las aristas y los vértices compartidos.

– Ejemplo:

Para arrastrar interactivamente un vértice y todas sus aristas incidentes es necesario hallar todos los polígonos que comparten el vértice

Al dibujar las aristas, cada arista compartida se dibuja dos veces.

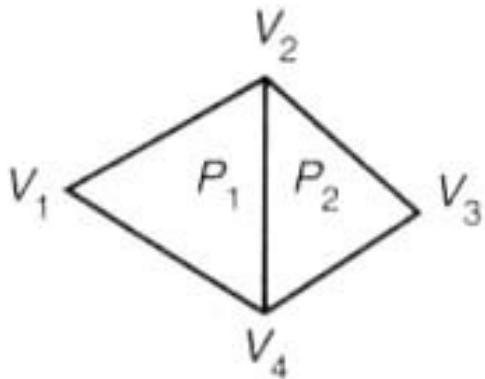
Mallas poligonales

Representación con apuntadores a una lista de vértices.

Se almacena solo una vez cada vértice de la malla poligonal

$$V = ((x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3), \dots)$$

El polígono se define con una lista de índices a la lista de vértices



$$V = (V_1, V_2, V_3, V_4) = ((x_1, y_1, z_1), \dots, (x_4, y_4, z_4))$$

$$P_1 = (1, 2, 4)$$

$$P_2 = (4, 2, 3)$$

Mallas poligonales

Esta representación ahorra espacio respecto a la representación poligonal explícita

Las coordenadas de un vértice se pueden modificar con facilidad.

Sigue siendo difícil encontrar polígonos que compartan una arista y aristas compartidas.

Este problema se puede eliminar representando explícitamente las aristas

Mallas poligonales

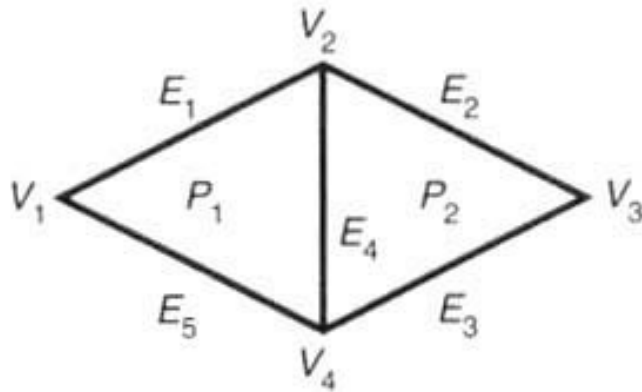
Representación con apuntadores a una lista de aristas.

Se mantiene la lista de vértices, pero el polígono no se representa con apuntadores a los vértices sino a una lista de aristas.

Cada arista se incluye una sola vez.

A su vez cada arista de la lista apunta a los dos vértices de la lista de vértices que definen la arista y además a los polígonos a los que pertenece la arista

Mallas poligonales



$$V = (V_1, V_2, V_3, V_4) = ((x_1, y_1, z_1), \dots, (x_4, y_4, z_4))$$

$$E_1 = (V_1, V_2, P_1, \lambda)$$

$$E_2 = (V_2, V_3, P_2, \lambda)$$

$$E_3 = (V_3, V_4, P_2, \lambda)$$

$$E_4 = (V_4, V_2, P_1, P_2)$$

$$E_5 = (V_4, V_1, P_1, \lambda)$$

$$P_1 = (E_1, E_4, E_5)$$

$$P_2 = (E_2, E_3, E_4)$$

Malla poligonal definida con listas de aristas para cada polígono (λ representa un valor nulo).

Mallas poligonales

En ninguna de estas tres representaciones

Polígonos explícitos

Apuntadores a vértices

Apuntadores a una lista de aristas

- No es sencillo determinar cuáles son las aristas incidentes a un vértice, hay que inspeccionar todas las aristas.
- Se puede añadir información explícitamente para solucionarlo

Mallas poligonales

Ecuaciones de planos

$$Ax + By + Cz + D = 0.$$

Los coeficientes A,B,C definen la normal al plano [A B C]

Dados los puntos P_1 , P_2 y P_3 la normal al plano se puede calcular con el producto vectorial entre los vectores que forman dichos puntos (por ej. $P_1P_2 \times P_1P_3$).

Para hallar D alcanza con poner en la ecuación las coordenadas de un punto.

Mallas poligonales

Ecuaciones de planos

Otra forma de hallar los coeficientes A, B, C

Se puede demostrar que estos coeficientes son proporcionales a las áreas con signo de las proyecciones del polígono sobre los planos (y,z) (z,x) (x,y) respectivamente.

$$C = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (y_i + y_{i \oplus 1})(x_{i \oplus 1} - x_i),$$

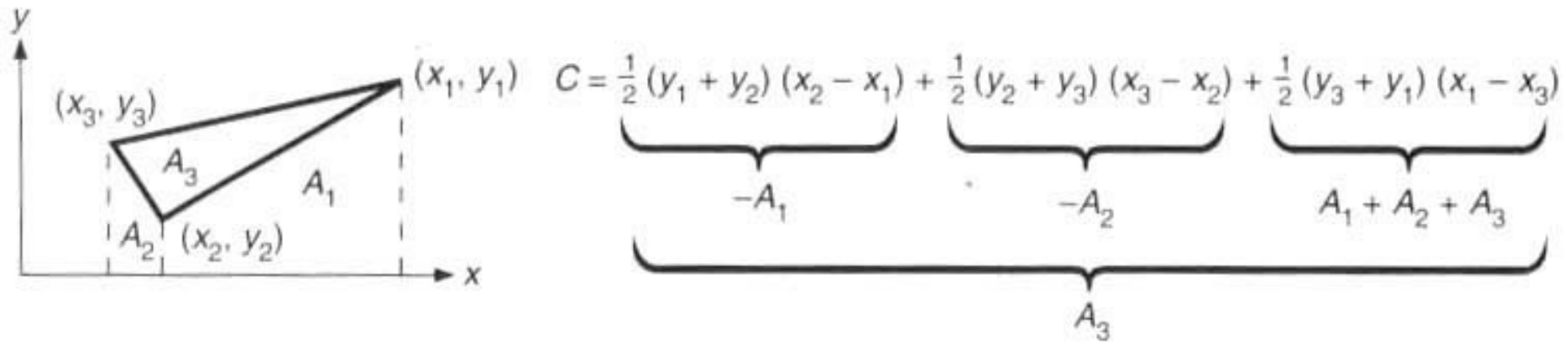
Cálculo de C, usando las coordenadas (x,y) del polígono.

$$d = \frac{Ax + By + Cz + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

Distancia de un punto (x,y,z) al plano.

Mallas poligonales

Ecuaciones de planos



Cálculo del área C de un triángulo usando la ecuación (9.2).

Representación de curvas

Hay tres formas de representar los objetos:

Explícitamente :

$$y = f(x)$$

Implícitamente:

$$f(x, y) = 0$$

Parametricamente:

$$x = x(t)$$

$$y = y(t)$$

Representación de curvas

Representación Explícita

En 2D, una curva será representada por

$$y = f(x)$$

Ejemplo

Una línea: $y = ax + b$

La mitad de un círculo: $y = \sqrt{r^2 - x^2}$

En 3D, para representar una curva se requieren dos ecuaciones:

$$y = f(x), z = g(x)$$

Una superficie será:

$$z = f(x, y)$$

Representación de curvas

Representación Implícita

En 2D, una curva será representada por

$$f(x, y) = 0 \quad \# f \text{ es evaluada en el par } (x, y)$$

Ejemplo

- Una línea: $ax + by + c = 0$
- Un círculo: $x^2 + y^2 - r^2 = 0$

En 3D, una superficie se describe por

$$f(x, y, z) = 0$$

Ejemplo

- Una esfera: $x^2 + y^2 + z^2 - r^2 = 0$
- Una curva corresponde a la intersección de dos superficies:

$$f(x, y, z) = 0 \quad \text{y} \quad g(x, y, z) = 0$$

Obs: el punto (x, y, z) debe pertenecer a ambas superficies

Representación de curvas

Representación Paramétrica

El valor de cada variable espacial se expresa en términos de una variable independiente (t), llamada parámetro.

En 2D, una curva paramétrica es descrita como:

$$p(t) = [x(t) \ y(t)]^T, \text{ con } t_1 \leq t \leq t_2$$

La derivada representa la tangente a la curva y es perpendicular a la normal del punto

$$dp(t)/dt = [x(t)' \ y(t)']^T$$

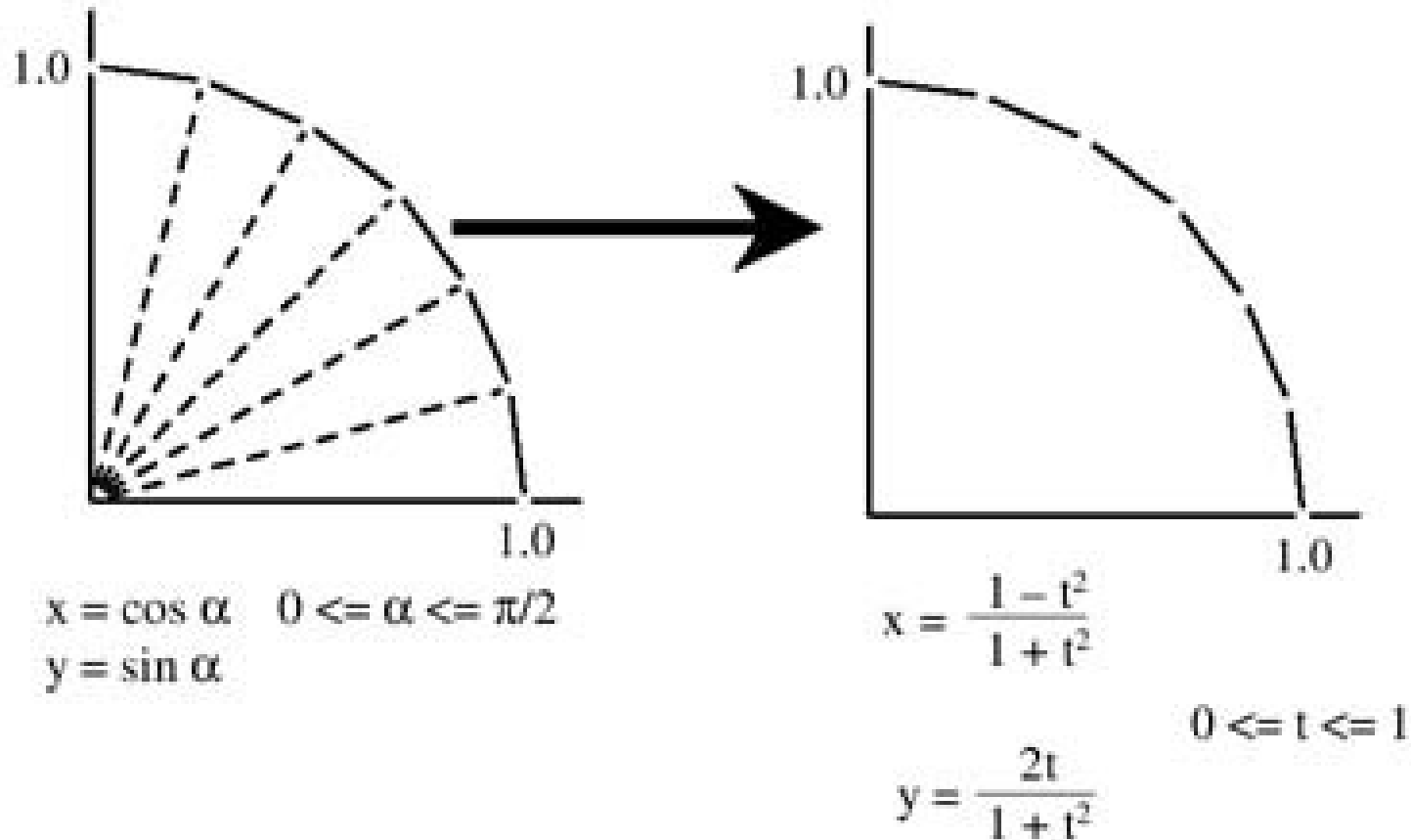
Frecuentemente se normaliza de modo que:

$$t_1 = 0 \ \text{y} \ t_2 = 1$$

Representación de curvas

Representación Paramétrica: Ejemplo

Ejemplo



Representación de curvas

Representación Paramétrica

Una superficie paramétrica requiere dos parámetros:

$$x = x(u,v)$$

$$y = y(u,v)$$

$$z = z(u,v)$$

Donde la representación vectorial es:

$$p(u,v) = [x(u,v), y(u,v), z(u,v)]^T$$

Obs: Los puntos de la superficie son generados por la variación de los parámetros u , v .

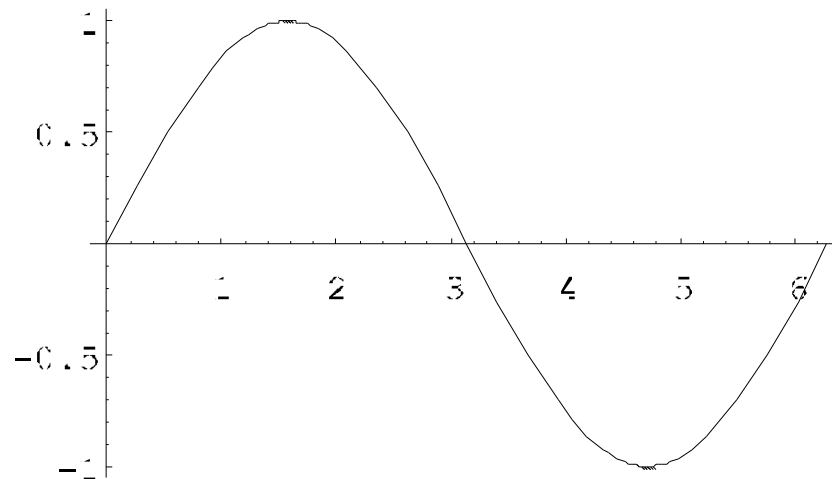
Representación de curvas

Ejemplo

Determinar la representación de la curva $f(\theta) = \sin(\theta)$.

Esta es una descripción paramétrica de la curva bidimensional con parámetro θ .

Los valores de θ pueden ser de $-\infty$ a $+\infty$. Limitando el dominio de la curva en $(0 \dots 2\pi)$:



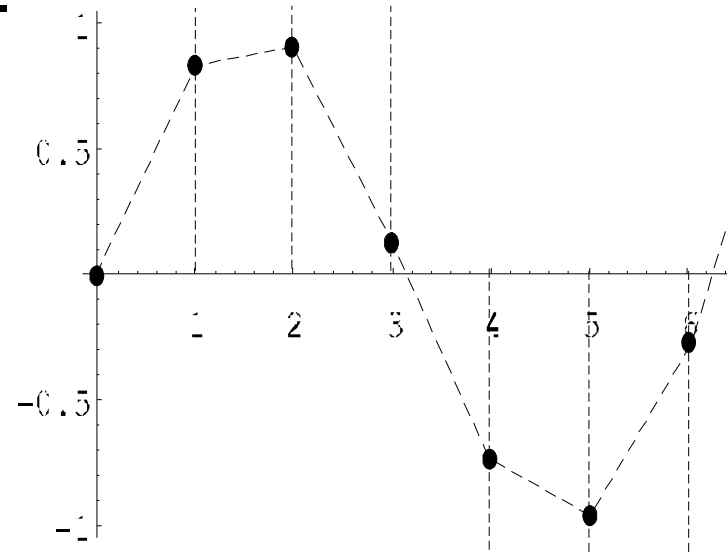
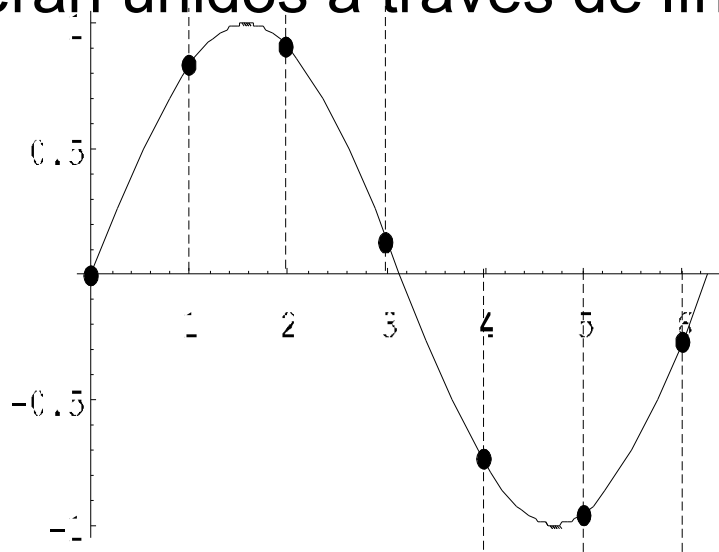
Pregunta: ¿Cómo dibujaría esta curva en la pantalla de la computadora?

Representación de curvas

Respuesta posible: Aproximando esta curva con una poligonal.

Poniendo puntos a intervalos regulares de θ (i.e. $\theta = 0, 1, 2\dots$).

Así encontramos los puntos que serán mostrados. Los puntos serán unidos a través de líneas.



Curvas cúbicas paramétricas

Curvas cúbicas paramétricas

La idea es emplear funciones que sean de un grado mayor que el de las funciones lineales.

Ofrecen mayor facilidad de manipulación interactiva que las funciones lineales.

Funciones explícitas

Ecuaciones implícitas

Representación paramétrica

Curvas cúbicas paramétricas

Con esta representación la curva se aproxima con una curva polinomial por trozos en lugar de la curva lineal por trozos utilizada.

Cada segmento Q de la curva global está indicando por tres funciones x , y y z que son polinomios cúbicos en el parámetro t .

Son los más utilizados ya que los polinomios de grado menos no ofrecen mucha flexibilidad para controlar la forma de la curva y los de mayor grado pueden requerir más cálculos y pueden introducir ondulaciones indeseadas.

Curvas cúbicas paramétricas

Dado un polinomio cúbico con sus cuatro coeficientes, se usan cuatro incógnitas para resolver los coeficientes desconocidos.

Los cuatro valores conocidos podrán ser los dos puntos extremos y las derivadas en esos puntos.

Los dos coeficientes de un polinomio de primer orden se determinan con los dos puntos extremos.

En este caso la derivada en cada extremos se determina con la propia línea.

Las curvas de mayor grado requieren más condiciones para determinar los coeficientes y pueden ondular en formas difíciles de controlar.

Curvas cúbicas paramétricas

Características básicas

Los polinomios cúbicos que definen un segmento de curva

$Q(t) = [x(t) \ y(t) \ z(t)]^T$ tienen la forma

$$x(t) = a_x t^3 + b_x t^2 + c_x t + d_x,$$

$$y(t) = a_y t^3 + b_y t^2 + c_y t + d_y,$$

$$z(t) = a_z t^3 + b_z t^2 + c_z t + d_z, \quad 0 \leq t \leq 1.$$

Ec. 9.5

Curvas cúbicas paramétricas

Con $T = [t^3 \ t^2 \ t \ 1]^T$ y definiendo la matriz de coeficientes de los tres polinomios como

$$C = \begin{bmatrix} a_x & b_x & c_x & d_x \\ a_y & b_y & c_y & d_y \\ a_z & b_z & c_z & d_z \end{bmatrix},$$

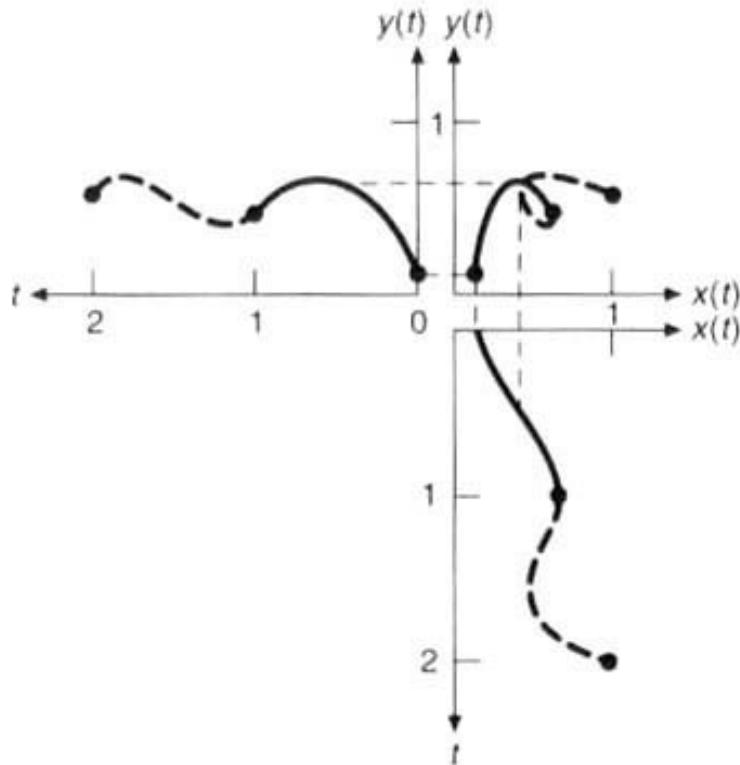
Se puede escribir la ecuación anterior como:

Curvas cúbicas paramétricas

$$Q(t) = [x(t) \ y(t) \ z(t)]^T = C \cdot T.$$

En la siguiente figura se presentan dos segmentos unidos de curvas paramétricas y sus polinomios.

Curvas cúbicas paramétricas



Dos segmentos unidos de curvas paramétricas bidimensionales y los polinomios que los definen. Las líneas punteadas entre el gráfico (x, y) y los gráficos $x(t)$ y $y(t)$ muestran la correspondencia entre los puntos en la curva (x, y) y los polinomios cúbicos de definición. Los gráficos $x(t)$ y $y(t)$ para el segundo segmento han sido trasladados para que inicien en $t = 1$, no en $t = 0$, para mostrar la continuidad de las curvas en su punto de unión.

Curvas cúbicas paramétricas

Continuidad entre segmentos de curva.

La derivada de $Q(t)$ es el vector tangente paramétrico de la curva. Al aplicar esta definición a la ecuación anterior se obtiene

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}Q(t) = Q'(t) &= \left[\frac{d}{dt}x(t) \quad \frac{d}{dt}y(t) \quad \frac{d}{dt}z(t) \right]^T = \frac{d}{dt}C \cdot T = C \cdot [3t^2 \quad 2t \quad 1 \quad 0]^T \\ &= [3a_x t^2 + 2b_x t + c_x \quad 3a_y t^2 + 2b_y t + c_y \quad 3a_z t^2 + 2b_z t + c_z]^T.\end{aligned}$$

Curvas cúbicas paramétricas

Continuidad paramétrica

Continuidad de orden Cero C^0 :

Las curvas se intersecan

El punto final de una sección de la curva es idéntico al punto inicial de la siguiente sección de la curva.

Continuidad de Primer orden C^1 :

La primera derivada en paramétrica (tangente) en el punto de intersección es la misma para ambas secciones de curva.

Continuidad de Segundo Orden C^2 :

La segunda derivada (curvatura) en el punto de intersección es la misma para ambas secciones de curva. Naturalmente, la primera derivada es también la misma.

Curvas cúbicas paramétricas

Continuidad paramétrica



Continuidad de orden Cero C^0 :

Continuidad de Primer Orden C^1 :



Continuidad de Segundo Orden C^2 :



Curvas cúbicas paramétricas

Continuidad geométrica

Continuidad de Orden Cero \mathbf{G}^0 :

Las curvas se intersecan (Idem a C^0).

El punto final de una sección de la curva es idéntico al punto inicial de la siguiente sección de la curva.

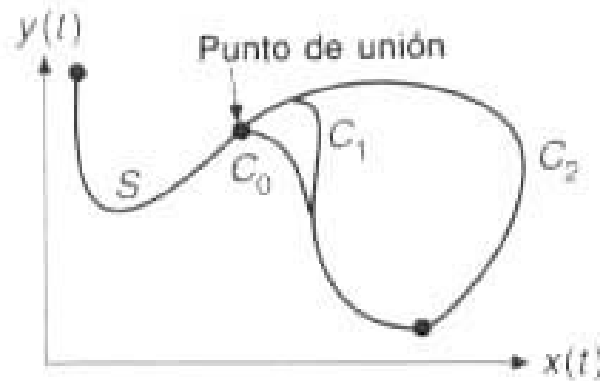
Continuidad de Primer Orden \mathbf{G}^1 :

Las tangentes son proporcionales (misma dirección, pero puede haber diferente magnitud).

Continuidad de Segundo Orden \mathbf{G}^2 :

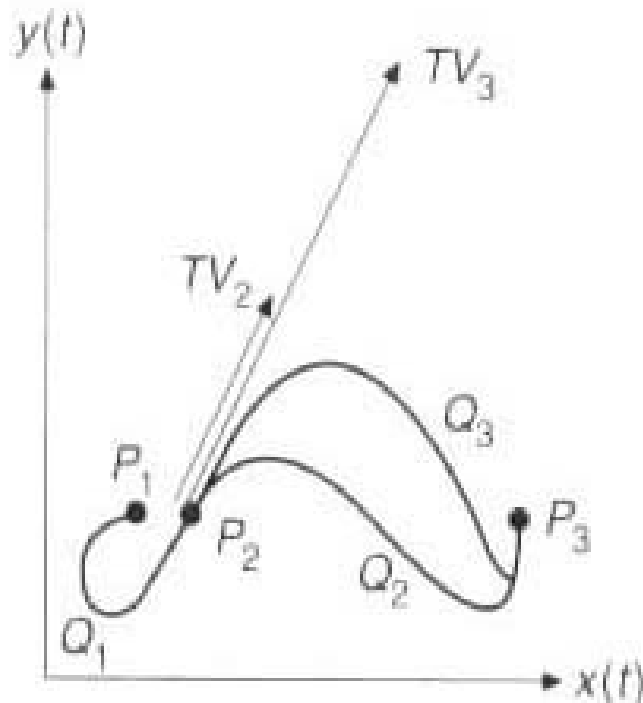
La primera y segunda derivada son proporcionales.

Curvas cúbicas paramétricas



Segmento de curva S
unido a los segmentos C_0 ,
 C_1 y C_2 con grados 0, 1 y 2
respectivamente, de
continuidad paramétrica.
La diferencia visual entre
 C_1 y C_2 es muy pequeña
cerca de la unión, pero
notoria lejos de ella.

Curvas cúbicas paramétricas



Los segmentos de curva Q_1 , Q_2 y Q_3 se unen en el punto P_2 y son idénticos excepto por sus vectores tangente en P_2 . Q_1 y Q_2 tienen vectores tangente idénticos y por lo tanto ambos tienen continuidad G^1 y C^1 en P_2 . Q_1 y Q_3 tienen vectores tangente en la misma dirección, pero Q_3 tiene el doble de magnitud, de manera que sólo tienen continuidad G^1 en P_2 . El vector tangente mayor de Q_3 significa que la curva es jalada más hacia la dirección del vector tangente antes de dirigirse hacia P_3 . El vector TV_2 es el vector tangente de Q_2 mientras que TV_3 es el de Q_3 .

Curvas cúbicas paramétricas

Relación con las restricciones

$$Q(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{bmatrix} = [G_1 \quad G_2 \quad G_3 \quad G_4] \begin{bmatrix} m_{11} & m_{21} & m_{31} & m_{41} \\ m_{12} & m_{22} & m_{32} & m_{42} \\ m_{13} & m_{23} & m_{33} & m_{43} \\ m_{14} & m_{24} & m_{34} & m_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t^3 \\ t^2 \\ t \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (9.9)$$

$$x(t) = (t^3 m_{11} + t^2 m_{21} + t m_{31} + m_{41})g_{1x} + (t^3 m_{12} + t^2 m_{22} + t m_{32} + m_{42})g_{2x} \\ + (t^3 m_{13} + t^2 m_{23} + t m_{33} + m_{43})g_{3x} + (t^3 m_{14} + t^2 m_{24} + t m_{34} + m_{44})g_{4x}. \quad (9.10)$$

Al multiplicar solo $x(t) = G_x \cdot M \cdot T$

Las ponderaciones son polinomios cúbicos de t y se denominan funciones de mezcla.

M es la matriz base y G es la matriz geométrica.

Curvas cúbicas paramétricas

Métodos para representar curvas

Hermite

Curvas de Bezier

Splines

B-splines

Curvas cúbicas paramétricas

Curvas de Hermite

Esta determinada por las restricciones de los puntos extremos P_1 y P_4 y los vectores tangente en los puntos extremos R_1 y R_4 .

Para obtener la Matriz Hermitiana M_h

Se escriben 4 ecuaciones para hallarla

Si se define Gh_x el componente x de la matriz geométrica como:

Curvas cúbicas paramétricas

$$G_{hx} = [P_{1x} \ P_{4x} \ R_{1x} \ R_{4x}]$$

Rescribiendo $X(t)$ de las ecuaciones 9.5 y 9.9 como

$$x(t) = a_x t^3 + b_x t^2 + c_x t + d_x = C_x \cdot T = G_{H_x} \cdot M_H \cdot T = G_{H_x} \cdot M_H [t^3 \ t^2 \ t \ 1]^T, \quad (9.13)$$

Curvas cúbicas paramétricas

Las restricciones de $X(0)$ y $X(1)$ se pueden encontrar por sustitución directa en la ecuación anterior:

$$X(0) = P_1 = G_{11} \cdot M_{11} [0 \ 0 \ 0 \ 1]^T, \quad (9.14)$$

$$X(1) = P_4 = G_{11} \cdot M_{11} [1 \ 1 \ 1 \ 1]^T. \quad (9.15)$$

Curvas cúbicas paramétricas

Encontrar $X'(t)$

$$X'(t) = G_{H_x} \cdot M_H \cdot [3t^2 \ 2t \ 1 \ 0]^T$$

Por lo tanto las ecuaciones de restricción de vectores tangentes quedan

$$x'(0) = R_{1,} = G_{H,} \cdot M_H [0 \ 0 \ 1 \ 0]^T,$$

$$x'(1) = R_{4,} = G_{H,} \cdot M_H [3 \ 2 \ 1 \ 0]^T.$$

Curvas cúbicas paramétricas

Las cuatro restricciones anteriores se pueden escribir en forma matricial de la siguiente forma:

$$[P_1, P_4, R_1, R_4] = G_{H_1} = G_{H_1} \cdot M_H \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Curvas cúbicas paramétricas

Para que se satisfaga la ecuación anterior M_H debe ser la inversa de la matriz de 4 x 4 en la ecuación anterior.

$$M_H = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Curvas cúbicas paramétricas

M_H se usa en $X(t) = G_H \cdot M_H \cdot T$ para hallar $X(t)$ con base en el vector de geometría G_H . De forma similar para $Y(t)$ y $Z(t)$.

Por lo tanto se puede escribir

$$Q(t) = [x(t) \ y(t) \ z(t)]^T = G_H \cdot M_H \cdot T,$$

En donde G_H es:

$$[P_1 \ P_4 \ R_1 \ R_4]$$

Curvas cúbicas paramétricas

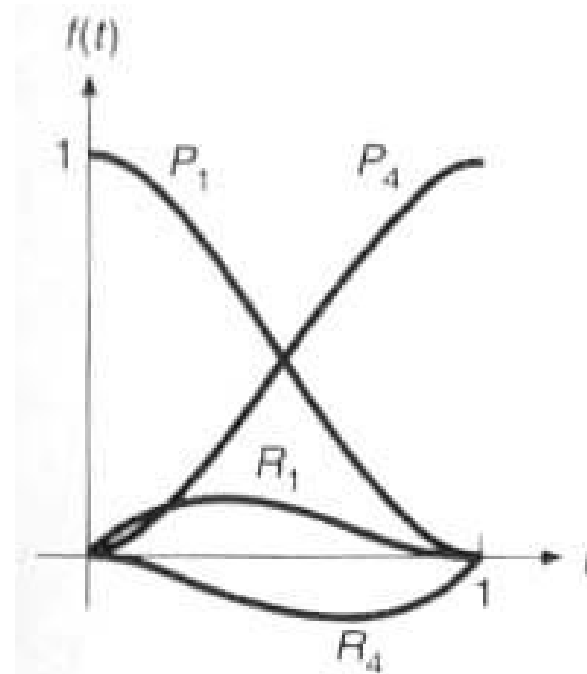
Expandiendo el producto $M_H \cdot T$ en $Q(t) = G_H \cdot M_H \cdot T$ se obtienen las funciones de mezcla de Hermite B_H

Los polinomios ponderan cada elemento de la matriz de geometría:

$$\begin{aligned} Q(t) &= G_H \cdot M_H \cdot T = G_H \cdot B_H \\ &= (2t^3 - 3t^2 + 1)P_1 + (-2t^3 + 3t^2)P_4 + (t^3 - 2t^2 + t)R_1 + (t^3 - t^2)R_4. \end{aligned}$$

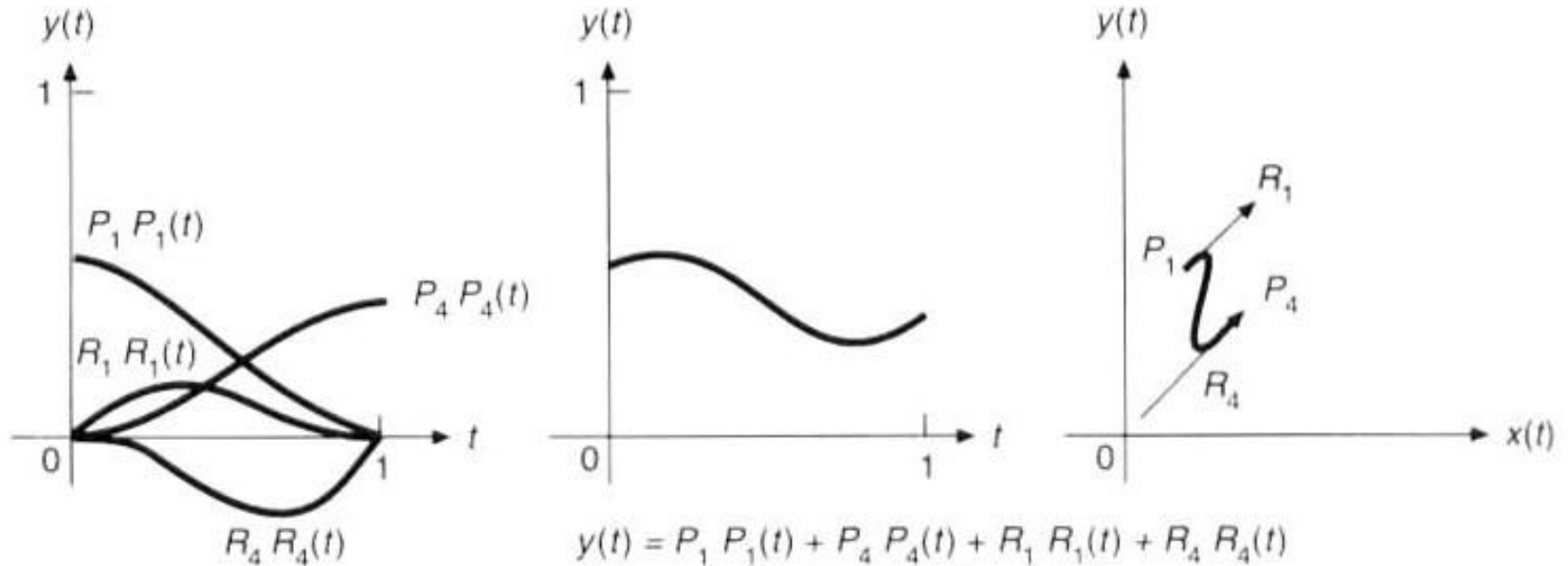
Curvas cúbicas paramétricas

Funciones de mezcla



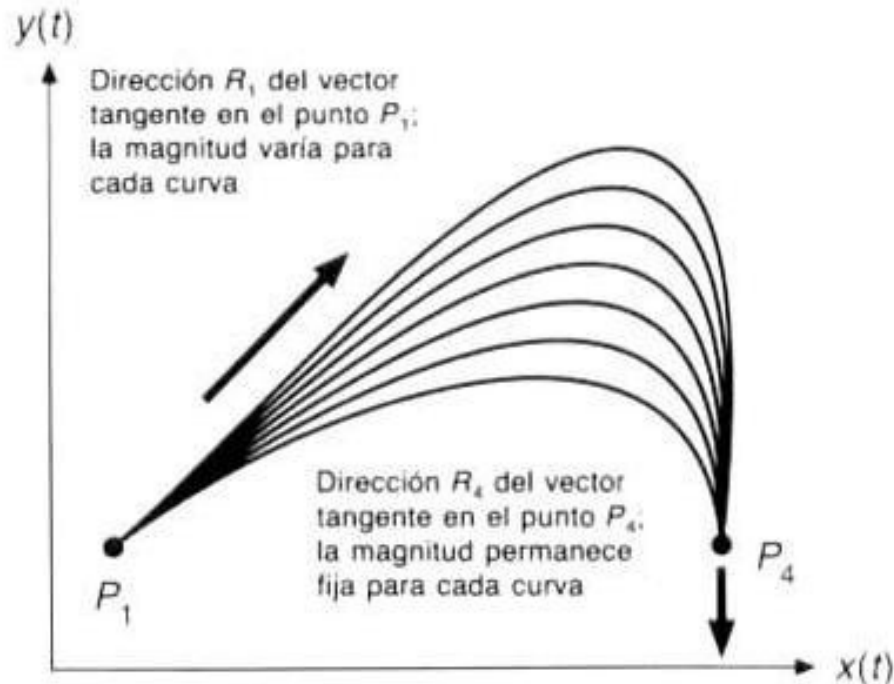
Las funciones de mezcla de Hermite, rotuladas con los elementos del vector de geometría que ponderan.

Curvas cúbicas paramétricas



Curva hermitiana que muestra los cuatro elementos del vector de geometría ponderado por las funciones de mezclado (las cuatro curvas de la izquierda), su suma $y(t)$ y la curva bidimensional (a la derecha). $x(t)$ se define con una suma ponderada similar.

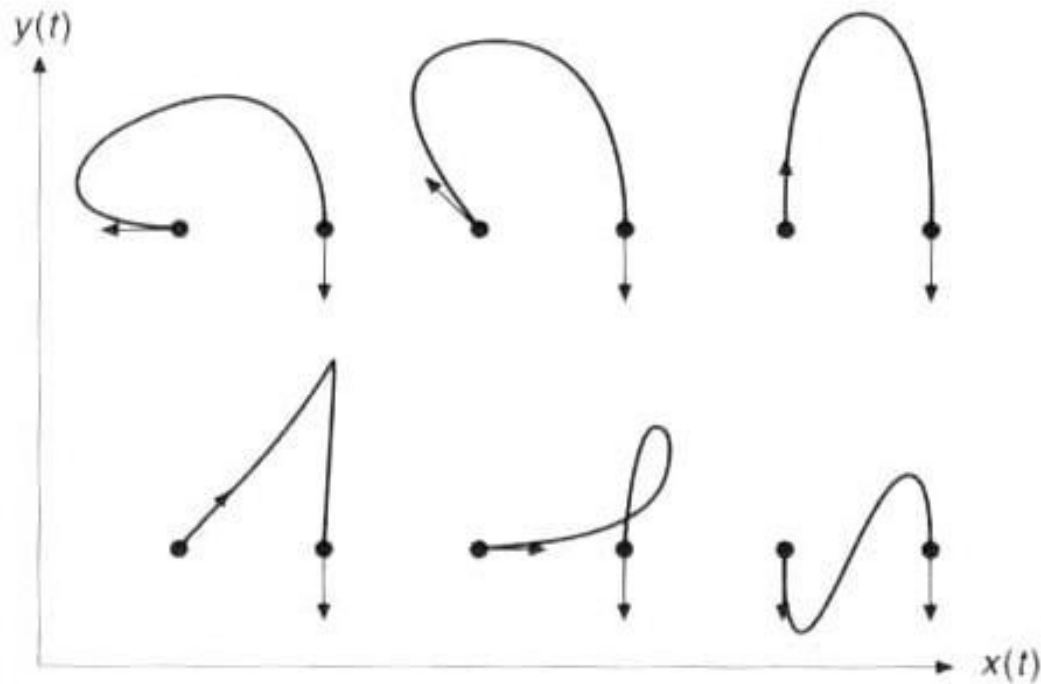
Curvas cúbicas paramétricas



Familia de curvas cúbicas paramétricas hermitianas. Sólo R_1 , el vector tangente en P_1 , varía para cada curva, aumentando en magnitud para las curvas superiores.

Diferencia: longitud del vector tangente R_1 . La dirección de los vectores tangentes son fijas.

Curvas cúbicas paramétricas



Familia de curvas cúbicas paramétricas hermitianas. Sólo varía la dirección del vector tangente en el punto de partida de la izquierda; todos los vectores tangente tienen la misma magnitud. Si la magnitud fuera menor, se eliminaría el lazo en la curva.

Curvas cúbicas paramétricas

Dibujo de curvas paramétricas:

Las curvas cúbicas paramétricas hermitianas y otras similares son fáciles de dibujar:

Se evalúa la ecuación 9.5 en n valores sucesivos de t separados por un incremento delta.

Por más información ver Foley pag. 379

Curvas cúbicas paramétricas

Curvas de Bézier

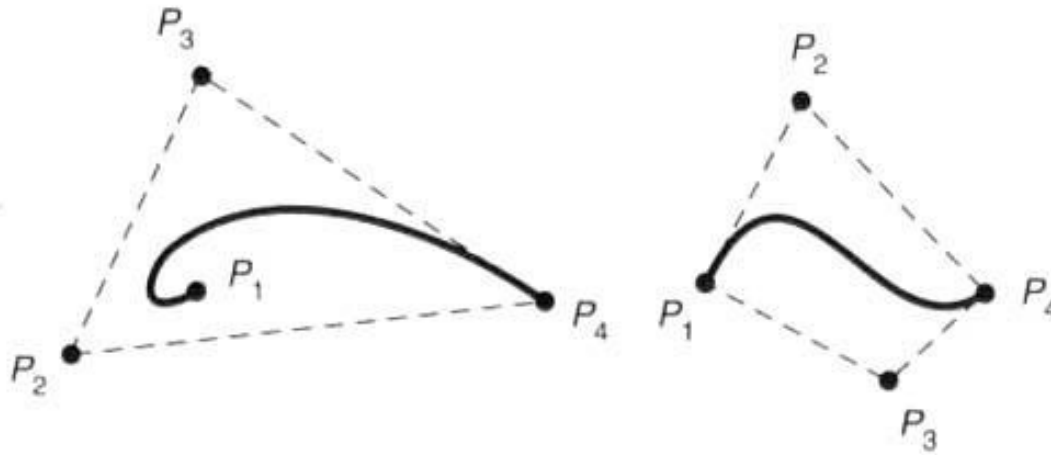
Desarrollado para el diseño de automóviles en la compañía Renault.

Especifica de manera indirecta el vector tangente de punto extremo.

Definición de dos puntos intermedios que no están en la curva.

Los vectores tangentes inicial y final se determinan con los vectores P_1P_2 y P_3P_4 .

Curvas cúbicas paramétricas



Dos curvas de Bézier y sus puntos de control. Observe que la envolvente convexa (el mínimo polígono convexo que contiene a los puntos de control), presentadas con líneas punteadas, no tienen que tocar los cuatro puntos de control.

Curvas cúbicas paramétricas

Se relacionan con R_1 y R_4 mediante la ecuación

$$R_1 = Q'(0) = 3(P_2 - P_1), R_4 = Q'(1) = 3(P_4 - P_3).$$

La matriz de geometría de Bézier G_B es :

$$G_B = [P_1 \ P_2 \ P_3 \ P_4].$$

Curvas cúbicas paramétricas

Por lo tanto la matriz M_{HB} que define la relación $G_H = G_B \cdot M_{HB}$ entre la matriz de geometría hermitiana G_H y la matriz de geometría de Bézier G_B , no es más que la matriz de 4 x 4 siguiente que reescribe la ecuación anterior:

$$G_H = [P_1 \ P_4 \ R_1 \ R_4] = [P_1 \ P_2 \ P_3 \ P_4] \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} = G_B \cdot M_{HB} \cdot$$

Curvas cúbicas paramétricas

Para encontrar la matriz base de Bézier M_B , se emplea la ecuación 9.20 para la forma hermitiana, se sustituye $G_H = M_{HB} \cdot G_B$ y se define $M_B = M_H \cdot M_{HB}$

$$Q(t) = G_H \cdot M_H \cdot T = (G_B \cdot M_{HB}) \cdot M_H \cdot T = G_B \cdot (M_{HB} \cdot M_H) \cdot T = G_B \cdot M_B \cdot T.$$

Curvas cúbicas paramétricas

Al desarrollar la multiplicación $M_B = M_{HB} \cdot M_H$ se obtiene

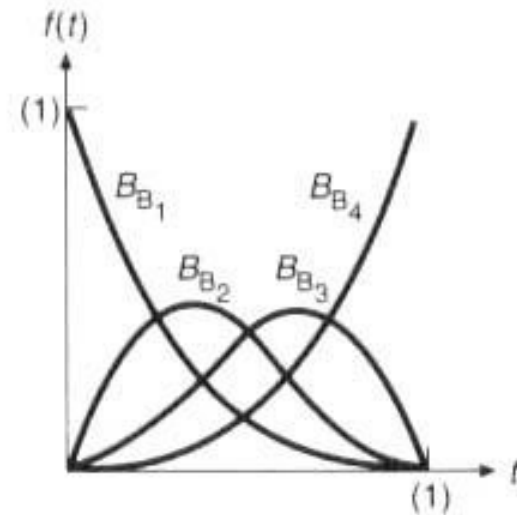
$$M_B = M_{HB} \cdot M_H = \begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

Y el producto $Q(t) = G_B \cdot M_B \cdot T$ es

$$Q(t) = (1 - t)^3 P_1 + 3t(1 - t)^2 P_2 + 3t^2(1 - t) P_3 + t^3 P_4.$$

Curvas cúbicas paramétricas

Los cuatro polinomios $B_B = M_B \cdot T$ que son las ponderaciones en la ecuación anterior se denominan polinomios de Bernstein y se presentan en la figura a la derecha



Los polinomios de Bernstein, que son las funciones de ponderación para las curvas de Bézier. En $t = 0$, sólo B_{B_1} es distinto de cero, de manera que la curva interpola P_1 ; en forma similar, en $t = 1$ sólo B_{B_4} es distinto de cero y la curva interpola P_4 .

Curvas cúbicas paramétricas

Importancia de la envolvente convexa.

En la figura anterior los cuatro polinomios B_B , se observa que su suma siempre es la unidad y que cada polinomio es no negativo para $0 \leq t < 1$.

$Q(t)$ es un promedio ponderado de los cuatro puntos de control.

Esta condición significa que cada segmento de curva, que a su vez es la suma de cuatro puntos de control ponderados por los polinomios, está totalmente contenida en la envolvente convexa de los cuatro puntos de control.

Propiedad válida para todas las cúbicas definidas por la suma ponderada de puntos de control si las funciones de mezcla no son negativas y su suma es uno.

Curvas cúbicas paramétricas

Splines cúbicas

Continuidad de segundo orden.
Se agregan mas restricciones.

Hay varios tipos

Especificar las derivadas en X_1 y X_n (spline cúbica interpolante completa)

Estimar las derivadas en X_1 y X_n a partir de los datos.

Forzar que las derivadas segundas en X_1 y X_n sean cero.

Implica que fuera de $[X_1 X_n]$ la spline sería una recta. (spline natural)

Curvas cúbicas paramétricas

Desventajas:

Al mover un punto de control se afecta toda la curva.

El tiempo de computación necesario para invertir la matriz puede interferir con el cambio rápido de la forma de la curva.

Curvas cúbicas paramétricas

B-splines uniformes, no racionales

Consisten en segmentos de curva cuyos coeficientes polinomiales depende de unos cuantos puntos de control.

Este comportamiento se conoce como control local.

El mover un punto afecta sólo una pequeña parte de la curva.

Además se reduce considerablemente el tiempo que se requiere para calcular los coeficientes.

Curvas cúbicas paramétricas

Las B-splines tienen la misma continuidad que las splines naturales, pero no interpolan sus puntos de control.

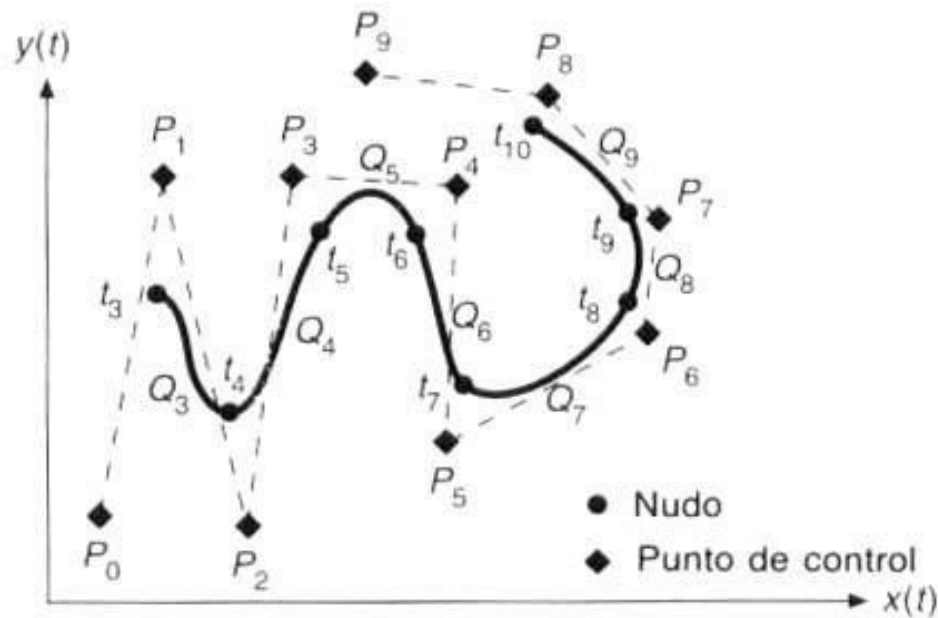
Las B-splines cúbicas aproximan una serie de $m + 1$ puntos de control P_0, P_1, \dots, P_m $m \geq 3$ con $m - 2$ segmentos de curva Q_3, Q_4, \dots, Q_m

El parámetro t se ajusta con una sustitución del tipo $t = t + k$ de manera que los dominios de parámetros de los segmentos de curva sean secuenciales.

El intervalo del parámetro donde está definido Q_i es $t_i \leq t < t_{i+1}$ para
 $3 \leq i < m$

Para cada $i \geq 4$ hay un punto de unión o nudo entre Q_{i-1} y Q_i en el valor t_i del parámetro. El valor del parámetro en este punto se le conoce como valor de nudo.

Curvas cúbicas paramétricas



Spline B con segmentos de curva Q_3 a Q_9 . Esta figura y muchas más de este capítulo se crearon con un programa escrito por Charles Castellsaqué.

Curvas cúbicas paramétricas

El termino uniforme quiere decir que los nudos están espaciados a intervalos iguales del parámetro t .

Cada uno de los $m - 2$ segmentos de una curva de B-spline está definido por cuatro puntos de los $m + 1$ punto de control. El segmento Q_i está definido por los puntos P_{i-3} , P_{i-2} , P_{i-1} y P_i .

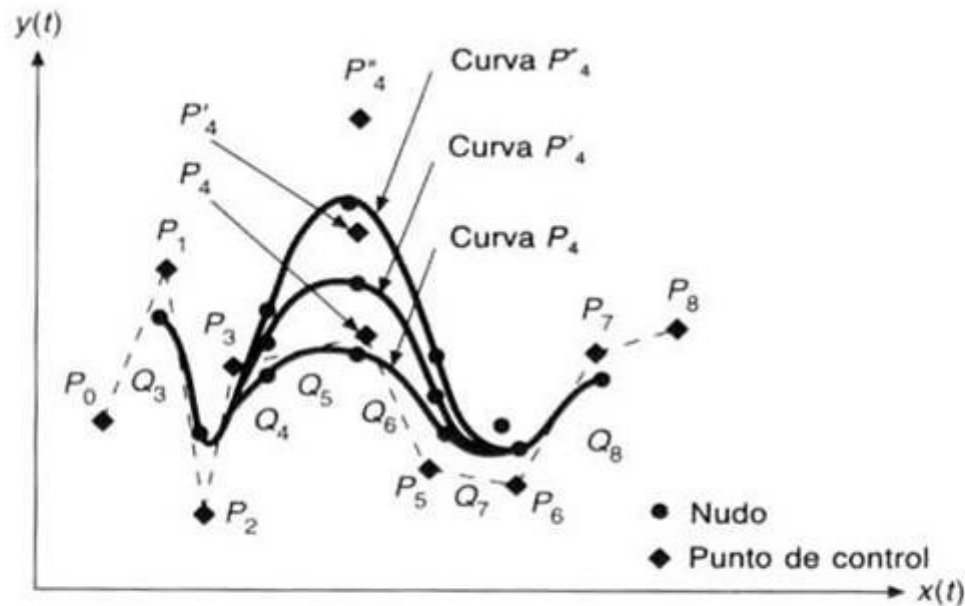
Por lo tanto la matriz de geometría de B-spline G_{Bsi} para el segmento Q_i es

$$G_{Bsi} = [P_{i-3} \ P_{i-2} \ P_{i-1} \ P_i], \quad 3 \leq i \leq m.$$

Curvas cúbicas paramétricas

$$Q_i(t) = G_{B_{B_i}} = M_{B_{B_i}} \cdot T_i, \quad t_i \leq t \leq t_{i+1}. \quad (9.32)$$

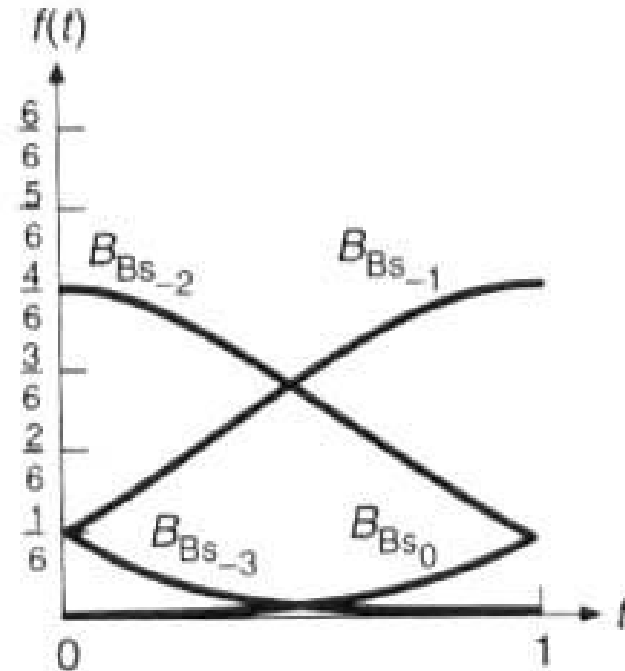
$$M_{B_{B_i}} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -3 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (9.33)$$



B-Spline con el punto de control P_4 en distintos lugares.

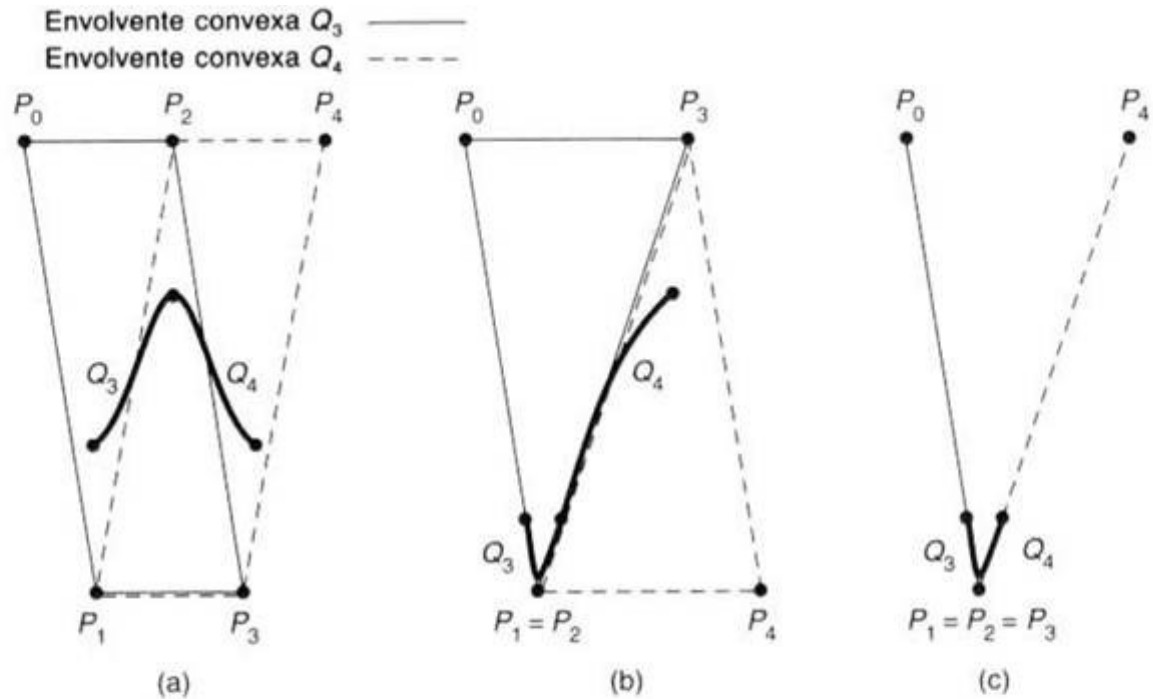
Curvas cúbicas paramétricas

Las funciones de mezclado de B-spline, B_{Bs} , se obtienen del producto $M_{Bs} \cdot T_i$ en forma análoga a como se obtuvieron en las formulaciones de Bézier y de Hermite.



Las cuatro funciones de mezcla de *B-spline* de la ecuación (9.34). Sólo tres de las funciones son distintas de cero en $t = 0$ y en $t = 1$.

Curvas cúbicas paramétricas



Efecto de varios puntos de control sobre una curva de *B-spline* uniforme. En (a) no hay puntos de control múltiples. Las envolventes convexas de las dos curvas se superponen; el punto de unión entre Q_3 y Q_4 está en la región compartida por las dos envolventes convexas. En (b) hay un doble punto de control, de manera que las envolventes convexas comparten la arista P_2P_3 ; por consiguiente, el punto de unión está restringido a esta arista. En (c) hay un punto de control triple y las envolventes convexas son líneas rectas que comparten el punto triple; por consiguiente, el punto de unión también está en el punto triple. Como las envolventes convexas son líneas rectas, los dos segmentos de curva también deben ser líneas rectas. En la unión hay continuidad C^2 pero sólo continuidad G^0 .

Superficies bicúbicas paramétricas

Superficies bicúbicas paramétricas

Uno de los objetivos más comunes que persigue la computación gráfica es lograr establecer una representación lo más exacta posible del mundo real.

En él, se pueden encontrar infinidad de objetos de las más diversas formas y colores, con características que son todo un reto tratar de modelar.

Parte de estas características particulares se pueden alcanzar con combinaciones de superficies curvas.

Superficies bicúbicas paramétricas

Existen tres representaciones muy comunes de superficies tridimensionales:

Superficies de malla poligonal

Superficies paramétricas

Superficies cuádricas

Superficies bicúbicas paramétricas

Malla poligonal es un conjunto de superficies planas limitadas por polígonos conectados entre si.

Funciona bien cuando se pretende visualizar volúmenes acotados por intersecciones de planos, como ser paredes, cajas, etc.

Las curvas polinomiales paramétricas especialmente cúbicas (polinomios de grado tres) son la opción por excelencia.

Las superficies basadas en curvas polinomiales paramétricas de grado tres, se les denomina Superficies Bicúbicas Paramétricas.

Superficies bicúbicas paramétricas

En virtud, de que las curvas cúbicas paramétricas son funciones de una sola variable $f(t)$, es lógico pensar que las superficies serían funciones de dos variables $f(s,t)$, de aquí el nombre de Bicúbicas.

Entre las posibles representaciones también están las superficies cuádricas, y son aquellas que se definen implícitamente con una ecuación $f(x,y,z) = 0$, donde f es un polinomio de segundo grado en x , y y z . Las superficies cuádricas constituyen una representación práctica de la esfera, el elipsoide y el cilindro.

Superficies bicúbicas paramétricas

Constituyen una generalización de la curvas cúbicas paramétricas.

Forma general de la curva cúbica paramétrica

$$\mathbf{Q}(t) = \mathbf{G} \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{T}$$

Donde \mathbf{G} es la matriz de geometría (constante)

Superficies bicúbicas paramétricas

Por facilidad de notación se reemplaza t con s para obtener

$$Q(s) = G \cdot M \cdot S$$

Se hace variar los puntos de G en tres dimensiones sobre trayectoria parametrizada en t .

$$\text{Se obtiene } Q(s,t) = [G_1(t) \ G_2(t) \ G_3(t) \ G_4(t)] \cdot M \cdot S \quad 9.40$$

Superficies bicúbicas paramétricas

Para una t_1 fija, $Q(s, t_1)$ es una curva ($Q(t)$ es constante)

Para t_2 con $t_2 - t_1$ muy pequeño entonces $Q(s, t)$ es una curva ligeramente diferente.

Repitiendo el proceso para varios valores de t_2 entre 0 y 1 se define una familia completa de curvas.

Cada uno de los miembros está arbitrariamente cerca de otra curva.

El conjunto de estas curvas define una superficie.

Superficies bicúbicas paramétricas

Si las $G_i(t)$ son por si mismas cúbicas se dice que es una superficie bicúbica paramétrica.

Si continuamos con el caso en que las $G_i(t)$ son cúbicas, cada una de ellas se puede representarse como $G_i(t) = G_i \cdot M \cdot T$ donde $G_i = [g_{i1} \ g_{i2} \ g_{i3} \ g_{i4}]$

G_{i1} es el primer elemento de la matriz de geometría para la curva $G_i(t)$, etc

Si se transpone la ecuación $G_i(t) = T^T \cdot M^T \cdot G_i^T$ usando la identidad

$$(A \cdot B \cdot C)^T \cdot C^T \cdot B^T = A^T \text{ el resultado es } G_i(t) = T^T \cdot M^T \cdot [g_{i1} \ g_{i2} \ g_{i3} \ g_{i4}]^T$$

Sustituyendo el resultado en la ecuación 9.40 para cada uno de los cuatro puntos se obtiene

Superficies bicúbicas paramétricas

$$Q(s, t) = T^T . M^T \cdot \begin{bmatrix} g_{11} & g_{21} & g_{31} & g_{41} \\ g_{12} & g_{22} & g_{32} & g_{42} \\ g_{13} & g_{23} & g_{33} & g_{43} \\ g_{14} & g_{24} & g_{34} & g_{44} \end{bmatrix} . M . S$$

Superficies bicúbicas paramétricas

○

$$Q(s, t) = T^T . M^T . \mathbf{G} . M . S \quad 0 \leq s, t \leq 1$$

Si se escribe por separado para x, y, z la forma es:

$$x(s, t) = T^T . M^T . G_x . M . S$$

$$y(s, t) = T^T . M^T . G_y . M . S$$

$$z(s, t) = T^T . M^T . G_z . M . S$$

Superficies de Hermite

Superficies de Hermite

Las superficies de Hermite o hermitianas están totalmente definidas por una matriz de geometría G_H de cuatro por cuatro. La obtención de G_H sigue las mismas pautas para hallar las últimas dos ecuaciones.

Se obtendrá la ecuación solo para $x(s,t)$

Se reemplaza t y s en la ecuación 9.13 para obtener $x(s) = G_{Hx} \cdot M_H \cdot S$

Se reescribe la ecuación de manera que la matriz de geometría hermitiana G_{Hx} no sea constante sino una función de t se obtiene:

$$x(s, t) = G_{Hx}(t) \cdot M_H \cdot S = [P_{1x}(t) P_{4x}(t) R_{1x}(t) R_{4x}(t)] \cdot M_H \cdot S. \quad (9.44)$$

Superficies de Hermite

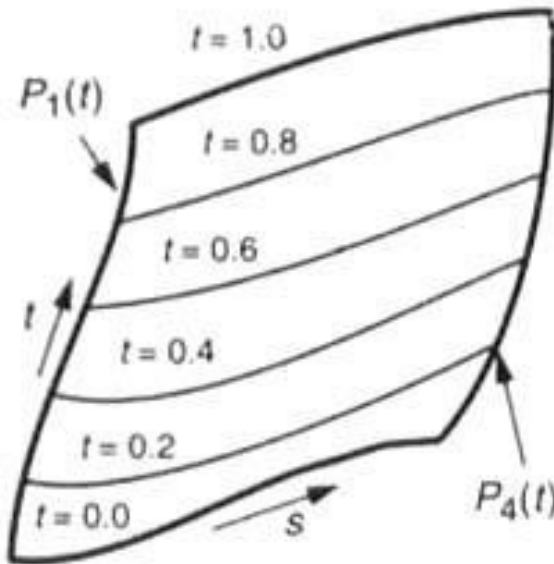
Las funciones $P_{1x}(t)$ y $P_{4x}(t)$ definen los componentes x de los puntos inicial y final de la curva en el parámetro s

En forma similar R_{1x} y $R_{4x}(t)$ son los vectores tangente en estos puntos.

Para cualquier valor de t hay dos puntos extremos y vectores tangente específicos.

En la siguiente figura se muestran $P_1(t)$ y $P_4(t)$ y la curva única en s que se define cuando t toma los valores que se muestran en ella.

Superficies de Hermite



Línea de valores de parámetro constante en una superficie bicúbica: $P_1(t)$ está en $s = 0$ y $P_4(t)$ está en $s = 1$.

Superficies de Hermite

Continuando con la obtención, representemos $P_{1x}(t)$, $P_{4x}(t)$, $R_{1x}(t)$, $R_{4x}(t)$ en forma hermitiana como

$$\begin{aligned} P_{1_x}(t) &= [g_{11} \ g_{12} \ g_{13} \ g_{14}]_x \cdot M_H \cdot T, & P_{4_x}(t) &= [g_{21} \ g_{22} \ g_{23} \ g_{24}]_x \cdot M_H \cdot T, \\ R_{1_x}(t) &= [g_{31} \ g_{32} \ g_{33} \ g_{34}]_x \cdot M_H \cdot T, & R_{4_x}(t) &= [g_{41} \ g_{42} \ g_{43} \ g_{44}]_x \cdot M_H \cdot T, \end{aligned} \tag{9.45}$$

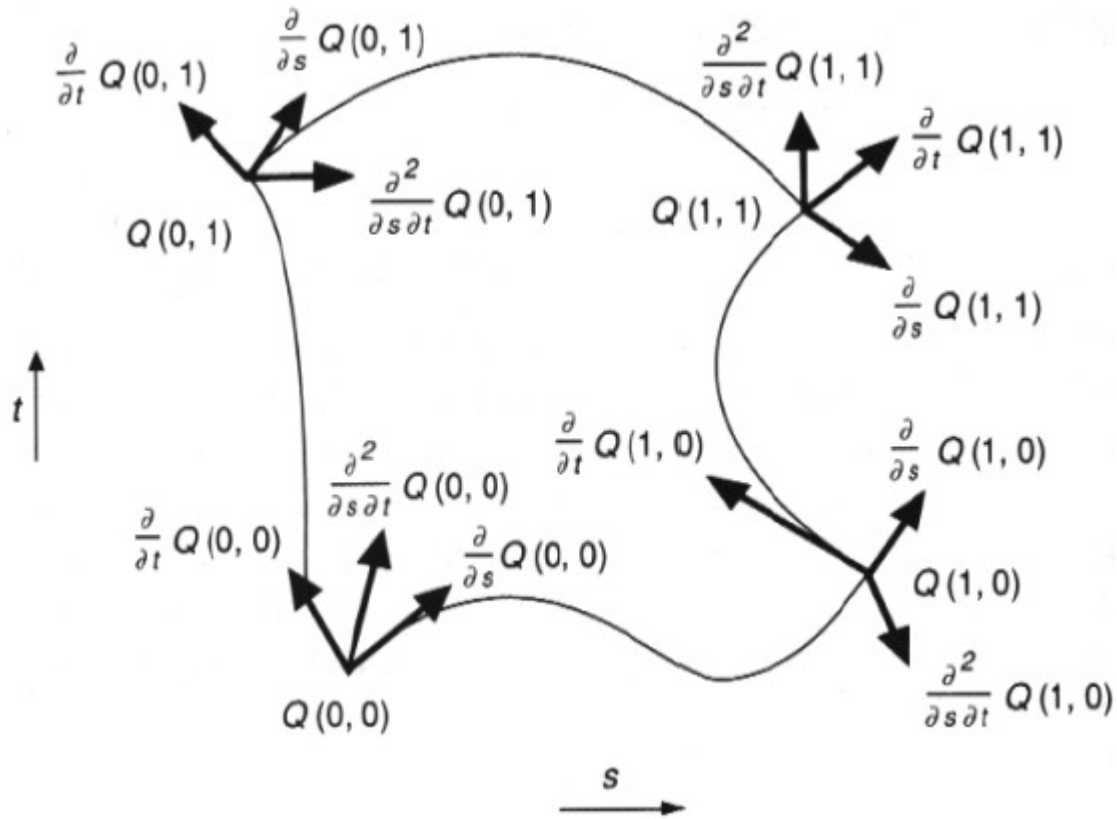
Superficies de Hermite

Estas cuatro cúbicas se pueden escribir juntas en una sola ecuación:

$$[P_{1_i}(t) \ P_{4_i}(t) \ R_{1_i}(t) \ R_{4_i}(t)]^T = G_{H_x} \cdot M_H \cdot T, \quad (9.46)$$

$$G_{H_x} = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{21} & g_{31} & g_{41} \\ g_{12} & g_{22} & g_{32} & g_{42} \\ g_{13} & g_{23} & g_{33} & g_{43} \\ g_{14} & g_{24} & g_{34} & g_{44} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x(0,0) & x(0,1) & \frac{\partial}{\partial t}(0,0) & \frac{\partial}{\partial t}(0,1) \\ x(1,0) & x(1,1) & \frac{\partial}{\partial t}(1,0) & \frac{\partial}{\partial t}(1,1) \\ \frac{\partial}{\partial s}(0,0) & \frac{\partial}{\partial s}(0,1) & \frac{\partial^2}{\partial t \partial s}(0,0) & \frac{\partial^2}{\partial t \partial s}(0,1) \\ \frac{\partial}{\partial s}(1,0) & \frac{\partial}{\partial s}(1,1) & \frac{\partial^2}{\partial t \partial s}(1,0) & \frac{\partial^2}{\partial t \partial s}(1,1) \end{bmatrix}$$

Superficies de Hermite



Superficies de Hermite

Al transponer ambos lados de la ecuación 9.46 se obtiene

$$[P_{1,}(t) \ P_{4,}(t) \ R_{1,}(t) \ R_{4,}(t)] = T^T \cdot M_H^T \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{g}_{11} & \mathbf{g}_{21} & \mathbf{g}_{31} & \mathbf{g}_{41} \\ \mathbf{g}_{12} & \mathbf{g}_{22} & \mathbf{g}_{32} & \mathbf{g}_{42} \\ \mathbf{g}_{13} & \mathbf{g}_{23} & \mathbf{g}_{33} & \mathbf{g}_{43} \\ \mathbf{g}_{14} & \mathbf{g}_{24} & \mathbf{g}_{34} & \mathbf{g}_{44} \end{bmatrix}_x = T^T \cdot M_H^T \cdot \mathbf{G}_{H_x}. \quad (9.48)$$

Superficies de Hermite

Si sustituimos la ecuación 9.48 en la ecuación 9.44 se obtiene

$$x(s, t) = T^T \cdot M_H T \cdot G_{H_s} \cdot M_H \cdot S; \quad (9.49)$$

Y en forma similar

$$y(s, t) = T^T \cdot M_H^T \cdot G_{H_s} \cdot M_H \cdot S, \quad z(s, t) = T^T \cdot M_H^T \cdot G_{H_s} \cdot M_H \cdot S. \quad (9.50)$$

Superficies de Hermite

Las tres matrices de cuatro por cuatro G_{Hx} , G_{Hy} y G_{Hz} tienen una función similar en las superficies hermitianas que la matriz G_H en el caso de las curvas.

La bicúbica hermitiana permite continuidad C^1 y G^1 de un parche a otro en una forma muy parecida a como la cúbica hermitiana permite continuidad C^1 y G^1 de un segmento de curva al otro.

Superficies de Bézier

Superficies de Bézier

La formulación de Bézier se puede derivar exactamente de la misma manera que en el caso de la cúbica hermitiana. Los resultados son:

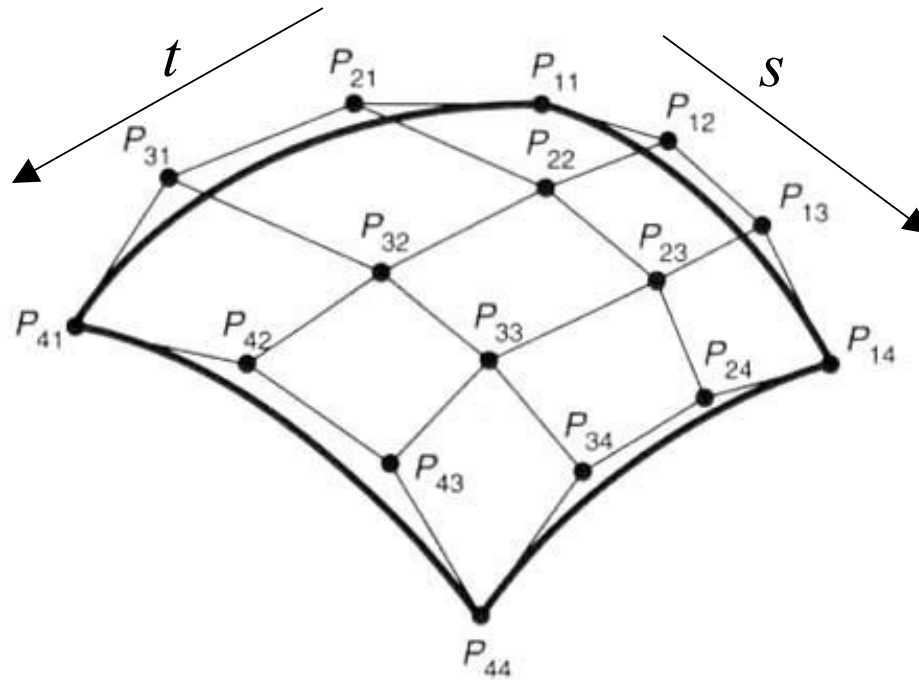
$$x(s, t) = T^T \cdot M_B^T \cdot G_{B_x} \cdot M_B \cdot S,$$

$$y(s, t) = T^T \cdot M_B^T \cdot G_{B_y} \cdot M_B \cdot S, \quad (9.51)$$

$$z(s, t) = T^T \cdot M_B^T \cdot G_{B_z} \cdot M_B \cdot S.$$

Superficies de Bézier

La matriz de geometría de Bézier G consiste en 16 puntos de control como se ilustra en la figura



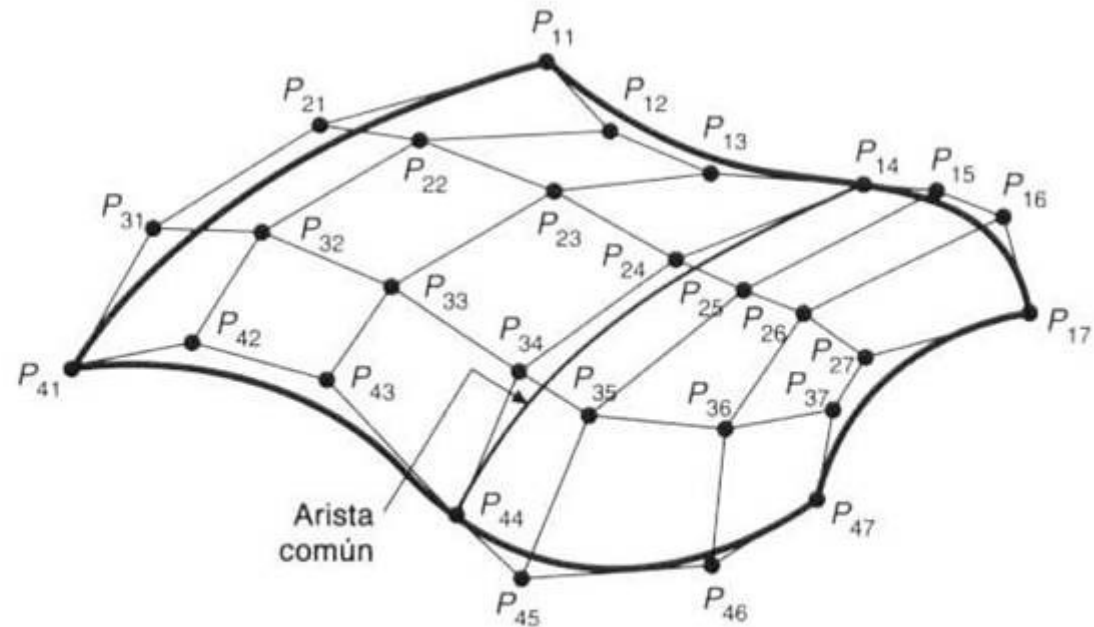
16 puntos de control para un parche bicúbico de Bézier.

Superficies de Bézier

$$x(s, t) = T^T \underbrace{\begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{M}_B^T} \underbrace{\begin{bmatrix} p_{11_x} & p_{21_x} & p_{31_x} & p_{41_x} \\ p_{12_x} & p_{22_x} & p_{32_x} & p_{42_x} \\ p_{13_x} & p_{23_x} & p_{33_x} & p_{43_x} \\ p_{14_x} & p_{24_x} & p_{34_x} & p_{44_x} \end{bmatrix}}_{\mathbf{G}_{B_x}} \underbrace{\begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{M}_B} S$$

Superficies de Bézier

Estas superficies son atractivas para el diseño interactivo por la misma razón que las curvas de Hermite.



Dos parches de Bézier unidos en la arista P_{14} , P_{24} , P_{34} y P_{44} .

Superficies de B-spline

Superficies B-spline

Los parches B-spline se representan como

$$x(s, t) = T^T \cdot M_{Bs}^T \cdot G_{Bs_x} \cdot M_{Bs} \cdot S,$$

$$y(s, t) = T^T \cdot M_{Bs}^T \cdot G_{Bs_y} \cdot M_{Bs} \cdot S, \quad (9.52)$$

$$z(s, t) = T^T \cdot M_{Bs}^T \cdot G_{Bs_z} \cdot M_{Bs} \cdot S.$$

Superficies B-spline

Continuidad C^2

Las superficies bicúbicas B-splines no uniformes y racionales, así como otras superficies racionales son análogas a sus contrapartes cúbicas.

Todas las técnicas de presentación se transfieren directamente al caso bicúbico.

Superficies cúbicas

Superficies cuádricas

La ecuación de superficie implícita de la forma

$$f(x,y,z) = ax^2 + by^2 + cz^2 + 2dxy + 2eyz + 2fzx + 2hy + 2jz + k = 0$$

Define la familia de superficies cuádricas.

Por ejemplo si $a = b = c = -k = 1$ y los demás coeficientes son cero se define una esfera unidad en el origen.

Si de a a f son cero se define un plano.

Superficies cuádricas

Razones para usar cuádricas incluyen la facilidad para:

Calcular la normal a la superficie

Determinar si un punto está en la superficie (basta con sustituir el punto en la ecuación evaluar y probar un resultado con una de cero.

Calcular z a partir de x e y (importante en los algoritmos de superficies ocultas)

Calcular intersecciones entre superficies.

FIN