La notación A^B

Luis Sierra

31 de mayo de 2003

Resumen

Esta nota espera aclarar un error cometido en la clase práctica del viernes 4 de Julio. En el mismo se empleó la notación A^2 para referirse al conjunto potencia de A. Sin embargo, la notación adecuada debió haber sido 2^A. A continuación exploraré esta notación y su significado.

Los símbolos y la notación En esta sección extraigo fragmentos del artículo *The Role of Conceptual Entities and their Symbols in Building Advanced Mathematical Concepts*, [1] de Guershon Harel y James Kaput. donde se da una explicación a la importancia de la notación para el aprendizaje matemático. El primer fragmento resalta el empleo de la notación como mecanismo para vincular ideas matemáticas complejas.

> The power of mathematics associated with the roles of conceptual entities is closely related to the roles of mathematical symbolism. Using mathematical notations, complex ideas or mental processes can be chunked and thus represented by physical notations which, in turn, can be reflected on or manipulated to generate new ideas.[pg.88]

En este segundo fragmento se peresenta uno de los posibles roles que juega la notación, el nominal.

> By providing continual *perceptual* experience, material notations help provide the basis for continuing *conceptual* presence. This role is based simply on notations as names - the notation serves to *name* an item in our conceptual world. We might term this the "nominal" role.[pg.89]

[1] Aparecido en *Advanced Mathematical Thinking*, edited by David Tall, Kluwer Academic Publishers, 1991.

Este último fragmento que tomo refiere al uso nominal de las notaciones. Pero, por supuesto, advierte del peligro del aprendizaje memorístico de las notaciones; conducta habitual en muchos estudiantes que bloquean su aprendizaje.

> Having an explicit name for a mental event helps objectify it through a kind of transference of object permanence - from the permanence of the physical notational name (which produces perceptual experience on a more or less continuous basis) to a cognitive permanence. Of course, the perceptual item must somehow come to be integrated with the conceptual one. Otherwise, all one might end up with is, say, an easily reproducible mental experience of a mark or character string, with no other mental activity or structure beyond that primitive experience - which is the experience of altogether too many students.[pg.89]

Por estas consideraciones, entre otras, es que me tomo el trabajo de explicar la notación A^B.

Identidad e igualdad Cuando dos objetos puestos en juego representan el mismo concepto decimos que son *idénticos*. La notación que emplearé en estas notas para esta relación es $\equiv$. Por ejemplo, podemos afirmar que $2+2 \equiv 2+2$; el objeto de la izquierda es la aplicación de la función suma a los números 2 y 2, mientras que el objeto de la derecha es exactamente el mismo. Siempre que empleamos la identidad, podemos reemplazarla por la igualdad. Afirmamos que $2+2 = 2+2$ porque, como ambos lados son idénticos, al evaluar el lado izquierdo obtenemos el mismo valor que al evaluar el lado derecho. También puedo afirmar la oración $2+2=4$, en la que sostengo que el valor que se obtiene de sumar 2 con 2 es igual al valor 4.

Sin embargo, no puedo sostener la afirmación inversa; no puedo reemplazar la igualdad por la identidad en cualquier ocasión. Esto se debe a que el uso de la igualdad implica una noción de cómputo, ausente en el caso de la identidad. Hemos visto que la oración $2+2=4$ es verdadera, pero naturalmente $2+2 \not\equiv 4$, en el sentido que hemos usado la identidad; la aplicación de una función, en este caso la suma, no es lo mismo que un valor. Puede ser que el resultado de su evaluación coincida, pero los objetos matemáticos puestos en juego difieren.

Usar notaciones distintas para referirnos al mismo objeto matemático es una práctica habitual. Algunos ejemplos simples en los que se involucran los mismos objetos, pero notados o nombrados en forma diferentes, se muestran a continuación:

$$m * n \equiv m \times n \equiv m \cdot n \equiv mn$$
$$C_n^m \equiv \binom{m}{n}$$

Las funciones Las funciones nos permiten relacionar elementos de un cierto conjunto A con elementos de otro conjunto B. La notación empleada para expresar que f es una función de A en B es $f : A \to B$. El conjunto de todas las funciones que van de A a B se nota B^A.

$$B^A \equiv \{f | f : A \to B\}$$

Tomemos como ejemplo el conjunto $\mathsf{Quiniela}$ de las funciones que van del conjunto $\{1, \ldots, 20\}$ al conjunto $\{0, \ldots, 999\}$. De acuerdo a la notación introducida hasta ahora, tenemos

$$\mathsf{Quiniela} \equiv \{0, \ldots, 999\}^{\{1,\ldots,20\}}.$$

Como vemos, el conjunto $\{1, \ldots, 20\}$ es un conjunto finito con veinte elementos linealmente ordenados. Cualquier conjunto de veinte elementos linealmente ordenados puede mostrarse isomorfo a este conjunto, empleando una función adecuada. Por ejemplo, podemos encontrar un isomorfismo entre $\{1, \ldots, 20\}$ y $\{a, b, c, \ldots, s, t, u\}$, donde el orden del segundo conjunto es el habitual orden alfabético. Notaré 20 a cualquiera de estos conjuntos. Y con un razonamiento análogo, notaré 1000 al conjunto $\{0, \ldots, 999\}$. Obtengo así una notación más compacta:

$$\mathsf{Quiniela} \equiv 1000^{20}.$$

Cada día la Dirección Nacional de Loterías y Quinielas nos proporciona una función $f \in \mathsf{Quiniela}$. ¿De entre cuántas funciones elige la que nos proporciona? Bueno, "casualmente" esa cantidad coincide con la notación empleada: 1000^{20} funciones distintas.

Las listas Podemos, alternativamente, ver la lista de la quiniela de cada día. Y es que cada elemento de $\mathsf{Quiniela}$ es, efectivamente, una lista finita de números. Las listas de largo n de objetos de un cierto tipo A no son más que elementos de A^n.

Naturalmente, las parejas son solamente listas de largo 2. Así hemos visto que $A^2 \equiv A*A$, donde $A*A \equiv A \times A$ son las notaciones usuales para denotar el producto cartesiano. Y es claro que es la misma cosa: cada elemento de $A * A$ es una función f que podríamos notar $\langle f(0), f(1)\rangle$, recordando que 2 es una notación que comprende al conjunto $\{0, 1\}$.

El conjunto potencia Consideremos dado un conjunto arbitrario U. El conjunto potencia, o conjunto de las partes, es el conjunto que comprende a todos los subconjuntos de U. Las dos notaciones usuales para representarlo son $\wp(U)$ y 2^U.

Ahora bien, la notación 2^U ¿estará vinculada a la notación que hemos visto en paragráfos previos? La respuesta es afirmativa, porque cada subconjunto F de U lo podemos ver como la función *característica* $f : U \to \{0,1\}$ tal que

$$f(u) = 1 \text{ si y sólo si } u \in F.$$

Por ejemplo, el conjunto de los impares en el conjunto $\{1, 2, \ldots, 20\}$ es la función módulo 2.

Nuestra notación nos lleva, además, a reconocer viejos resultados. Por ejemplo, dada una fórmula φ que tiene n letras proposicionales, y viendo que cada renglón de una tabla de verdad corresponde a una asignación de valores de verdad a cada letra, la cantidad de renglones que tiene su tabla de verdad será 2^n. Más aún, la cantidad de tablas de verdad diferentes que se pueden obtener para n letras distintas está dada por las distintas funciones que a cada valuación le hace corresponder un elemento de $2 \equiv \{0,1\}$, es decir, 2^{2^n}.

Los números El lector perspicaz habrá observado que usé el número 2 para designar cualquier conjunto que tuviera dos elementos. Más aún, también escribí que $2 \equiv \{0,1\}$. El motivo reside en la forma habitual de definir los números naturales en las teorías de conjuntos.

En la teoría de conjuntos los únicos objetos que existen son, precisamente, conjuntos. Existe un axioma que indica que existe un conjunto sin elementos, llamado conjunto vacío, y notado usualmente como $\{\}, \emptyset$, o 0. En esta teoría, que subyace a gran parte de las matemáticas modernas, el número natural 0 no es otra cosa que otra notación para $\emptyset$. La siguiente afirmación es verdadera: $\emptyset \equiv 0$.

Una vez que disponemos de $\emptyset$, podemos construír el conjunto cuyo único elemento sea dicho conjunto. Nos encontramos ante el conjunto $\{\emptyset\}$ que tiene un único elemento. En esta teoría el número natural 1 es solamente una forma alternativa de nombrar dicho conjunto: $\{\emptyset\} \equiv \{0\} \equiv 1$.

Me he valido de esta notación tradicional y habitual para mostrar que $\mathsf{Quiniela} \equiv 1000^{20}$ entre otras cosas.

Conclusiones En estas notas he hecho una breve incursión sobre la notación empleada para hablar de las funciones. Hemos observado que dicha notación es consistente con las construcciones habituales de producto cartesiano, listas y subconjuntos. Además nos hemos valido de la misma para recordar algunos resultados de cardinalidad.