

# Lógica

## Segundo Parcial

Julio 2000

### Indicaciones Generales

- La duración del parcial es de **tres (3)** horas.
- En este parcial **no** se permite consultar material alguno.
- Puntaje: **60 puntos**
- Pueden usarse los resultados que aparecen en el texto del curso, en esos casos debe describirse con precisión el enunciado que se utiliza.
- Toda respuesta debe estar fundamentada.
- Numerar todas las hojas e incluir en cada una su nombre y número de estudiante.
- Utilizar las hojas de un solo lado,
- Escribir con lápiz.
- Iniciar cada ejercicio en hoja nueva.
- Poner en la primera hoja la cantidad de hojas entregadas.

### Problemas

#### Ejercicio 1. (19 pts.)

- (a) Defina los símbolos del alfabeto para un lenguaje de primer orden de tipo  $\langle 1, 2; 1, 2; 2 \rangle$ .
- (b) Defina una estructura  $\mathcal{A}$  del tipo adecuado para tal lenguaje, y dé una fórmula  $\varphi$  tal que  $FV(\varphi) = \{x\}$  y se cumpla:
  - $\mathcal{A} \not\models \forall x \varphi$
  - $\mathcal{A} \models \exists x \varphi$
- (c) Para la fórmula  $\varphi$  dada en el punto anterior, decir si se cumplen las siguientes afirmaciones. Justifique su respuesta para los casos en que ésta sea afirmativa y dé un contraejemplo si su respuesta es negativa:
  - (i)  $\mathcal{A} \models \exists x \neg \varphi$
  - (ii)  $\models \exists x \varphi$
  - (iii)  $\not\models \forall x \varphi$
  - (iv)  $\{\exists x \varphi, \exists x \neg \varphi\}$  es un conjunto consistente

**Ejercicio 2.** (15 pts.) Sean  $\varphi$  y  $\psi$  fórmulas de un lenguaje de primer orden tales que  $FV(\varphi) = FV(\psi) = \{x\}$ . Indique si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justifique su respuesta para los casos en que ésta sea afirmativa, y dé un contraejemplo si su respuesta es negativa:

- (a)  $\forall x(\varphi \vee \psi) \models \exists x\neg\varphi \rightarrow \exists x\psi$
- (b)  $\exists x(\neg\varphi \vee \psi) \models \neg\exists x\varphi \vee \exists x\psi$
- (c)  $\exists x(\varphi \rightarrow \psi) \models \forall x\varphi \rightarrow \exists x\psi$

**Ejercicio 3.** (10 pts.)

Construya una derivación de  $\exists x(\varphi \vee \psi) \vdash \forall x\neg\varphi \rightarrow \exists x\psi$ . Justifique cuando corresponda que las restricciones sobre las variables se cumplen al aplicar las reglas.

**Ejercicio 4.** (16 pts.)

Sean  $\Gamma, \Delta \subseteq \text{FORM}$  tales que  $\text{Mod}(\Gamma \cup \Delta) = \text{Mod}(\Gamma)$ .

- (a) Probar las siguientes afirmaciones:
  - (i)  $\text{Mod}(\Gamma) = \text{Mod}(\text{CONS}(\Gamma))$
  - (ii)  $\text{Mod}(\Gamma) \subseteq \text{Mod}(\Delta)$
  - (iii) Si  $\Gamma$  es consistente entonces  $\Delta$  también lo es
- (b) Mostrar que la siguiente afirmación no vale:  $\text{Mod}(\Gamma \cap \Delta) \subseteq \text{Mod}(\Delta)$