

Lógica Primer Parcial

Mayo 2002

Indicaciones Generales

- La duración del parcial es de **tres (3)** horas.
- En este parcial **no** se permite consultar material alguno.
- Puntaje: **40 puntos**
- Pueden usarse los resultados que aparecen tanto en el texto como en el material práctico y/o teórico del curso; en esos casos debe describirse con precisión el enunciado que se utiliza.
- Toda respuesta debe estar fundamentada.
- Numerar todas las hojas e incluir en cada una su nombre y cédula de identidad.
- Utilizar las hojas de un solo lado, escribir con lápiz.
- Iniciar cada ejercicio en hoja nueva.
- Poner en la primera hoja la cantidad de hojas entregadas.

Atención : cada ejercicio está antecedido por una **pregunta obligatoria** marcada con una estrella (*), la cual no tiene puntaje. Para que un ejercicio sea corregido, la pregunta obligatoria correspondiente al mismo debe ser contestada correctamente. O sea, si dicha pregunta no es contestada correctamente, el ejercicio en cuestión no se corregirá.

Problemas

Ejercicio 1. (12 pts.)

Pregunta (*) Enuncie el teorema de inducción primitiva para PROP.

- Defina recursivamente una función $f : \text{PROP} \rightarrow \text{PROP}$ tal que $f(\varphi)$ sea una proposición lógicamente equivalente a φ escrita sólo en términos de las conectivas $\{\perp, \wedge, \neg\}$.
- Demuestre por inducción que efectivamente se cumple

Para toda $\varphi \in \text{PROP}$, $f(\varphi) \text{ eq } \varphi$.

Ejercicio 2. (10 pts.)

Pregunta (*) Defina consecuencia lógica, es decir, $\Gamma \models \varphi$, con $\Gamma \subseteq \text{PROP}$ y $\varphi \in \text{PROP}$.

Sean φ y ψ fórmulas de PROP tales que:

$$\varphi \models \psi \qquad \models \varphi \vee \psi$$

Indique si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justifique su respuesta para los casos en que ésta sea afirmativa, y dé un contraejemplo si su respuesta es negativa.

- (a) $\models \varphi \wedge \psi$
- (b) $\models \psi$
- (c) $\models \neg(\varphi \rightarrow \psi)$

Ejercicio 3. (8 pts.)

Pregunta (*) Pruebe que si $\Gamma, \neg\alpha \vdash \perp$, entonces $\Gamma \vdash \alpha$.

Construya una derivación de $\neg\psi \rightarrow \neg\varphi \vdash \varphi \rightarrow ((\psi \rightarrow \neg\varphi) \rightarrow \sigma)$.

Debe incluir los nombres de las reglas empleadas en la derivación.

Ejercicio 4. (10 pts.)

Pregunta (*) Defina $\text{Cons}(\Gamma)$ con $\Gamma \subseteq \text{PROP}$.

Definimos la relación \sqsubseteq entre conjuntos de fórmulas como

$$\Gamma \sqsubseteq \Gamma' \text{ si y sólo si } \text{Cons}(\Gamma) \subseteq \text{Cons}(\Gamma').$$

Determine cuáles de las siguientes afirmaciones son correctas y cuáles no. En ambos casos justifique su respuesta.

- (a) Para cualquier Γ , $\emptyset \sqsubseteq \Gamma$.
- (b) Para cualquier Γ , $\Gamma \sqsubseteq \{\perp\}$.
- (c) Para cualquier Γ , si $\Gamma \sqsubseteq \emptyset$ entonces para cualquier valuación v y fórmula $\gamma \in \Gamma$ se tiene $v(\gamma) = 1$.