Instituto de Computación **Facultad de Ingeniería**

Lógica

Primer Parcial

Mayo 2003

Indicaciones Generales

- La duración del parcial es de **tres (3)** horas.
- En este parcial **no** se permite consultar material alguno.
- Puntaje: **40 puntos**
- Pueden usarse los resultados que aparecen en el texto del curso. En esos casos debe describirse con precisión el enunciado que se utiliza.
- Toda respuesta debe estar fundamentada.
- Numerar todas las hojas e incluir en cada una su nombre y cédula de identidad.
- Utilizar las hojas de un solo lado, escribir con lápiz.
- Iniciar cada ejercicio en hoja nueva.
- Poner en la primera hoja la cantidad de hojas entregadas.

Atención : Cada ejercicio está antecedido por una **pregunta obligatoria** marcada con una estrella (*****), la cual no tiene puntaje. Para que un ejercicio sea corregido, la pregunta obligatoria correspondiente al mismo debe ser contestada correctamente. O sea, si dicha pregunta no es contestada correctamente, el ejercicio en cuestión no se corregirá.

Problemas

Ejercicio 1 (10 puntos)

Pregunta (*****) Defina inductivamente el conjunto $\text{PROP}^{\#}$ como el lenguaje del cálculo proposicional con infinitas letras proposicionales $p_1, p_2, p_3, \ldots$ y los siguientes conectivos: $\neg$ (unario), $\vee$ (binario), # (binario).

(a) Enuncie el principio de inducción primitiva para $\text{PROP}^{\#}$.

(b) La noción de valuación para $\text{PROP}^{\#}$ se define de la manera usual para los conectivos $\neg$ y $\vee$. Para el conectivo # se define de la siguiente manera:

$$v\,(\alpha \# \beta) = 1 - \max\,\{v(\alpha)\,,\,v(\beta)\}$$

Defina recursivamente una función $f : \text{PROP}^{\#} \to \text{PROP}^{\#}$ tal que $f(\alpha)$ sea una proposición lógicamente equivalente a α escrita sólo en términos del conectivo #.

Sugerencia: Observe que $\neg\alpha$ *eq* $(\alpha \# \alpha)$ y que $(\alpha \vee \beta)$ *eq* $\neg(\alpha \# \beta)$.

(c) Demuestre por inducción que efectivamente se cumple que:

Para toda $\alpha \in \text{PROP}^{\#}$, $f(\alpha)$ *eq* α

Nota: Puede utilizar las equivalencias presentadas en la parte anterior.

Ejercicio 2 (10 puntos)

Pregunta (*) Defina *tautología* y defina *equivalencia lógica* (*eq*)

Sean p, q dos letras proposicionales y sea $\varphi \in$ PROP la siguiente proposición:

$$(p \to q) \wedge (p \to \neg q)$$

(a) Dé una proposición $\alpha \in$ PROP que cumpla las siguientes tres condiciones:

- α **no** es contradicción (es decir, $\neg\alpha$ no es tautología)
- α **no** es lógicamente equivalente a φ
- $\models \alpha \to \varphi$

Justifique su respuesta. Si es imposible que exista una proposición α que cumpla con lo pedido, dé una prueba de su inexistencia.

(b) Dé una proposición $\beta \in$ PROP que cumpla las siguientes tres condiciones:

- β **no** es contradicción (es decir, $\neg\beta$ no es tautología)
- β **no** es lógicamente equivalente a φ
- $\models \beta \to \varphi[\neg\bot / p]$

Justifique su respuesta. Si es imposible que exista una proposición β que cumpla con lo pedido, dé una prueba de su inexistencia.

(c) Demuestre que para cualquier $\gamma \in$ PROP se cumple que $\models \gamma \to \varphi[\bot / p]$

Ejercicio 3 (10 puntos)

Pregunta (*) Enuncie la regla de *eliminación del absurdo* ($\bot_E$)

(a) Sea Γ un subconjunto arbitrario de PROP y sean $\alpha \in$ PROP y $\beta \in$ PROP tales que $\Gamma, \neg\alpha \vdash \beta$. Pruebe que: $\Gamma, \neg\beta \vdash \alpha$

(b) Sean α , β fórmulas cualesquiera de PROP. Construya una derivación de :

$$\neg (\alpha \wedge \neg (\alpha \to \beta)) \vdash \neg (\alpha \wedge \neg\beta)$$

Todo paso de la derivación debe estar justificado con el nombre de la regla empleada. En ningún caso son aceptables justificaciones basadas en consideraciones semánticas.

Ejercicio 4 (10 puntos)

Pregunta (*) Defina *conjunto consistente*

Se dice que dos conjuntos $\Gamma, \Delta \subseteq$ PROP son *mutuamente derivables* ssi se cumple que:

$$\Gamma \subseteq \text{Cons}(\Delta) \quad \text{y} \quad \Delta \subseteq \text{Cons}(\Gamma)$$

(a) Dé dos conjuntos disjuntos y no vacíos que sean mutuamente derivables. Justifique.

(b) Demuestre que si dos conjuntos son mutuamente derivables, entonces ambos son consistentes o ambos son inconsistentes.

(c) Sean Γ y Δ dos conjuntos mutuamente derivables. Demuestre que si Γ es consistente, entonces existe una valuación v tal que $v(\Gamma \cup \Delta) = 1$ (o sea, tal que para toda $\varphi \in \Gamma \cup \Delta$, $v(\varphi) = 1$).