Lógica
Segundo Parcial
Julio 2004

Indicaciones Generales
- La duración del parcial es de **tres (3)** horas.
- En este parcial **no** se permite consultar material alguno.
- Puntaje: **60 puntos**
- Pueden usarse los resultados que aparecen en el texto del curso, en esos casos debe describirse con precisión el enunciado que se utiliza.
- Toda respuesta debe estar fundamentada.
- Numerar todas las hojas e incluir en cada una su nombre y número de cédula.
- Utilizar las hojas de un solo lado, escribir con lápiz.
- Iniciar cada ejercicio en hoja nueva.
- Poner en la primera hoja la cantidad de hojas entregadas.

Cada ejercicio está antecedido por una **pregunta obligatoria** *marcada con un asterisco (*), la cual no tiene puntaje. Para que un ejercicio sea corregido, la pregunta obligatoria correspondiente al mismo debe ser contestada correctamente. O sea, si dicha pregunta no es contestada correctamente, el ejercicio en cuestión no se corregirá.*

Problemas

Ejercicio 1. (15 pts.)

Pregunta * Demuestre o refute la siguiente afirmación, *utilizando la definición dada abajo*:

$$f(x_1) \text{ está libre para } x_2 \text{ en } \forall x_1 P(x_2).$$

Considere $\varphi \in FORM$, $t \in TERM$ y x una variable cualquiera del lenguaje.
Pruebe por inducción en $FORM$, utilizando la definición dada abajo, que si $V(t) \cap BV(\varphi) = \emptyset$ (o sea, las variables de t no ocurren ligadas en φ), entonces t está libre para x en φ.

Definición: *Sean $\varphi \in FORM$, $t \in TERM$ y x una variable del lenguaje. Decimos que t esta libre para x en φ si y sólo si se satisface alguna de las siguientes condiciones:*

1. *φ es atómica*
2. *$\varphi = (\varphi_1 \Box \varphi_2)$, t está libre para x en φ_1 y t está libre para x en φ_2, con $\Box \in \{\to, \leftrightarrow, \wedge, \vee\}$*
3. *$\varphi = (\neg\varphi_1)$ y t está libre para x en φ_1*
4. *$\varphi = (\forall z)\varphi_1$ y*
   a) *o bien $x \notin FV((\forall z)\varphi_1)$*
   b) *o bien $z \notin V(t)$ y t está libre para x en φ_1*
5. *$\varphi = (\exists z)\varphi_1$ y*
   a) *o bien $x \notin FV((\exists z)\varphi_1)$*
   b) *o bien $z \notin V(t)$ y t está libre para x en φ_1*

Ejercicio 2. (15 pts.)

Pregunta * Sea $\varphi \in FORM$ para un lenguaje de primer orden, y $\mathcal{M}$ una estructura del tipo adecuado. Defina $\mathcal{M} \models \varphi$ para los casos:

1. $\varphi \in SENT$.
2. $\varphi \notin SENT$.

Sea un lenguaje de tipo $\langle 1, 1; -; 0 \rangle$.

(a) De una estructura $\mathcal{M}_1$ tal que $\mathcal{M}_1 \models P_1(x_1) \vee P_2(x_1)$. Justifique.

(b) De una estructura $\mathcal{M}_2$ tal que $\mathcal{M}_2 \not\models P_1(x_1) \vee P_2(x_1)$. Justifique.

(c) Indique si es cierta o no la siguiente afirmación. En caso afirmativo, demuestre la afirmación, en caso negativo dé un contraejemplo y justifique.
Para toda estructura $\mathcal{M}$: $\mathcal{M} \models P_1(x_1) \vee P_2(x_1)$ si y sólo si $\mathcal{M} \models P_1(x_1)$ o $\mathcal{M} \models P_2(x_1)$.

Ejercicio 3. (15 pts.)

Pregunta * Sea $\Gamma \subseteq FORM$ y $\alpha \in FORM$. Para el siguiente resultado, diga qué regla de deducción natural usaría para justificarlo, y qué condiciones deben satisfacer las fórmulas de Γ para que sea válido:

$$\text{Si} \quad \Gamma \vdash \alpha \quad \textit{entonces} \quad \Gamma \vdash (\forall x)\alpha.$$

Construya derivaciones de :

(a) $\vdash \neg(\forall x)\neg\varphi \to (\exists x)\varphi$

(b) $\vdash \neg(\forall x)\neg(\neg\alpha \vee \beta) \to (\exists x)(\alpha \to \beta)$

Todo paso de las derivaciones debe estar justificado con el nombre de la regla empleada y en caso de que la regla lo exija se deben explicitar las restricciones correspondientes para las variables. En ningún caso son aceptables justificaciones basadas en consideraciones semánticas.

Ejercicio 4. (15 pts.)

Pregunta * Defina $Th(k)$ para k un conjunto de estructuras arbitrario.

(a) Indique y justifique si es posible encontrar dos conjuntos de estructuras no vacíos k_1 y k_2 tales que $Th(k_1) \cap Th(k_2) = \emptyset$.

(b) Sea $B = \{\varphi \in SENT \mid \ \models \neg\varphi\}$.
Demuestre que para todo $\Gamma \subseteq SENT$ consistente existe $\varphi \in SENT$ tal que $\varphi \notin B$ y $\varphi \notin \Gamma$ (o sea, que $(SENT - B) - \Gamma \neq \emptyset$).

(c) Sea $\Gamma \subseteq SENT$ consistente y B definido como en el inciso anterior.
Demuestre que si $\Delta = (SENT - B) - \Gamma$, entonces $Th(Mod(\Gamma \cup \Delta)) = SENT$.