

Lógica
Segundo Parcial
Julio 2008

Indicaciones Generales

- La duración del parcial es de **3** horas.
- En este parcial **no** se permite consultar material alguno.
- Puntaje: **60** puntos.
- Toda respuesta debe estar fundamentada. Pueden usarse los resultados que aparecen en el texto del curso, en esos casos debe describirse con precisión el enunciado que se utiliza.
- Numerar todas las hojas e incluir en cada una su nombre y número de estudiante utilizar las hojas de un solo lado, escribir con lápiz, iniciar cada ejercicio en hoja nueva y poner en la primera hoja la cantidad de hojas entregadas.

Atención:

Cada ejercicio está antecedido por una pregunta obligatoria marcada con un asterisco (*), la cual no tiene puntaje. Para que un ejercicio sea corregido, la pregunta obligatoria correspondiente al mismo debe ser contestada correctamente. O sea, si dicha pregunta no es contestada correctamente, el ejercicio en cuestión no se corregirá.

EJERCICIO 1 (15 puntos)

Considere el lenguaje de primer orden L de tipo $\langle -, 1 ; 1 \rangle$ con conectivos \neg , \rightarrow y \forall , únicamente.

Pregunta * Defina el lenguaje $TERM_C$ de los términos cerrados para L . (No considere lenguaje extendido)

- a) Defina L .
- b) Defina por recursión primitiva la función $G: TERM_C \rightarrow TERM_C$ que duplica toda ocurrencia de los símbolos de función. Por ejemplo: $G(f_1(x_1)) = f_1(f_1(x_1))$
- c) Considere la estructura $A = \langle N, Suc, 0 \rangle$ (donde Suc es el sucesor). Pruebe que todo término cerrado t cumple: $2 \times t^A = (G(t))^A$.
- d) Considere la extensión de la función G a las constantes del lenguaje extendido. En ese caso, ¿vale la propiedad anterior? Justifique..

EJERCICIO 2 (15 puntos)

Considere un lenguaje de primer orden de tipo $\langle -,2,2;0 \rangle$ con símbolos de función f y g .

Pregunta * Escriba una fórmula de primer orden que defina la siguiente noción: la función g tiene neutro.

Considere la siguiente fórmula:

$$\varphi = \exists x (x = f(x,y) \wedge y = g(x,y))$$

Dé estructuras A y B tales que

- a) $A \models \varphi$
- b) $B \not\models \varphi$

Justifique sus respuestas.

EJERCICIO 3 (15 puntos)

Considere un lenguaje L de primer orden de tipo $\langle 2,-;0 \rangle$ con símbolo de predicado P .

Pregunta * De una fórmula de L tal que $\varphi \vdash \forall x \varphi$.

Construya derivaciones que justifiquen los siguientes juicios:

- a) $\forall x \forall y \neg P(x,y) \vdash \neg \forall x \exists y (P(x,y) \wedge P(x,x))$
- b) $\vdash \forall w \exists y \exists z (w = y \wedge y = z)$

EJERCICIO 4 (15 puntos)

Considere un lenguaje de primer orden de tipo $\langle 2,-;0 \rangle$ con símbolo de predicado P .

Pregunta * De un elemento de $\text{Mod} (\{\forall x \exists y P(x,y)\})$.

Considere los siguientes conjuntos de fórmulas:

$$\Gamma = \{ \forall x \exists y P(x,y), \forall x \neg \forall y P(x,y) \}$$

$$\Delta = \{ \forall x \forall y \neg P(x,y), \exists y \forall x P(x,y) \}$$

Para cada una de las siguientes afirmaciones indique si la afirmación es correcta o no.

Justifique su respuesta.

- a) Γ es consistente
- b) $\Delta \models P(x,x)$
- c) $\text{Mod} (\Gamma) = \text{Mod} (\Delta)$