Primer parcial de Lógica

Mayo 2009

Indicaciones generales

- La duración del parcial es de **tres (3)** horas.
- En esta prueba **no** se permite consultar material alguno.
- Puntaje: **40** puntos.
- Toda respuesta debe estar fundamentada. Pueden usarse los resultados que aparecen en el texto del curso, en esos casos debe describirse con precisión el enunciado que se utiliza.
- Numerar todas las hojas e incluir en cada una su nombre y número de estudiante, utilizar las hojas de un solo lado, escribir con lápiz, iniciar cada ejercicio en hoja nueva y poner en la primera hoja la cantidad de hojas entregadas.

Ejercicio 1 (8 puntos)

Considere el lenguaje proposicional $L \subseteq PROP$ con letras proposicionales $\{p_i : i \in N\}$ y conectivos $\{\neg, \rightarrow, \vee\}$. Considere las definiciones inductivas de los subconjuntos L_1 y L_2 de $PROP$.

1. $p_i \in L_1$ 2. Si $\alpha \in L_1$, entonces $(\neg\alpha) \in L_1$ 3. Si $\alpha \in L_1$ y $\beta \in L_1$, entonces $(\alpha \rightarrow \beta) \in L_1$	1. $p_i \in L_2$ 2. Si $\alpha \in L_2$, entonces $(\neg\alpha) \in L_2$ 3. Si $\alpha \in L_2$ y $\beta \in L_2$, entonces $(\alpha \vee \beta) \in L_2$

Pregunta *. Indique cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas y cuáles falsas. En el caso de las afirmaciones falsas, proporcione fórmulas que lo muestren.

1. $L_1 \cap L_2 = \emptyset$
2. $L \subseteq L_1 \cup L_2$

♣

Parte 1. Defina una función $G : L_1 \rightarrow L_1$ que intercambie los componentes de la implicación. Por ejemplo, $G((p_1 \rightarrow ((\neg p_2) \rightarrow p_3))) = ((p_3 \rightarrow (\neg p_2)) \rightarrow p_1)$

Parte 2. Demuestre que toda fórmula $\alpha \in L_1$ cumple que α `eq` $G(G(\alpha))$.

Ejercicio 2 (12 puntos)

Pregunta *. Considere $\alpha \in PROP$ que cumple: para cualquier $\beta \in PROP, \beta \models \alpha$. La fórmula α, ¿es una contradicción, una contingencia, una tautología, o no se puede afirmar nada al respecto? ♣

Considere una letra proposicional p_i. Indique cuáles de las siguientes afirmaciones son correctas y cuáles incorrectas. Justifique su respuesta.

1. Para todo $\alpha \in PROP$, si $\alpha \models p_i \rightarrow \alpha$ entonces α es tautología
2. Para todo $\alpha, \beta \in PROP$, si $\alpha \rightarrow p_i$ `eq` $p_i \vee \neg\beta$ entonces α `eq` β
3. Para todo $\alpha, \beta \in PROP$, si $\alpha \rightarrow p_i$ `eq` $p_i \vee \neg\beta$ y p_i no aparece en α ni en β entonces α `eq` β

Ejercicio 3 (10 puntos)

Pregunta *. Sean φ y ψ fórmulas de $PROP$ y Γ un subconjunto de $PROP$. Justifique la veracidad o falsedad de la siguiente frase: *Si* $\Gamma \vdash \varphi$ *entonces* $\Gamma \cup \{\psi\} \vdash \varphi$. ♣

1. Sean α, β, y γ fórmulas cualesquiera de $PROP$. Demuestre, mediante la construcción de una derivación, la siguiente afirmación:

$$\vdash \neg\alpha \wedge (\beta \to \gamma) \to ((\alpha \vee \beta) \to \gamma)$$

2. Sean α, β, γ, φ y σ fórmulas cualesquiera de $PROP$. Demuestre la siguiente afirmación:

$$\text{Si } \varphi \vdash (\beta \vee \sigma) \to \alpha \text{ y } \varphi \to \gamma \vdash \sigma \text{ entonces } \vdash (\varphi \to \gamma) \to (\varphi \to (\alpha \wedge \gamma)).$$

En ningún caso son aceptables justificaciones basadas en consideraciones semánticas

Ejercicio 4 (10 puntos)

Pregunta *. Indique si la siguiente afirmación es verdadera o falsa. Justifique brevemente.
La interesección de dos teorías no es vacía. ♣

Sea $\Gamma \subseteq PROP$, no vacío: $\Gamma = \{\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_n, \ldots\}$
Y los siguientes conjuntos definidos a partir de las fórmulas de Γ:

$$\begin{aligned} \Delta_{\neg} &= \{\neg\varphi_i : \varphi_i \in \Gamma\} \\ \Delta_{\to} &= \{\varphi_i \to \varphi_{i+1} : \varphi_i \in \Gamma, \varphi_{i+1} \in \Gamma\} \end{aligned}$$

Indique cuáles de los siguientes enunciados son verdaderos y cuáles son falsos. Justifique su respuesta.

1. Si Γ es consistente entonces $\Delta_{\neg} \vdash \bot$
2. Si $\Delta_{\to}$ es consistente entonces $\Gamma \not\models \bot$
3. Si Γ es consistente maximal entonces $\Delta_{\neg}$ es consistente maximal
4. Si Γ es consistente maximal entonces $\Delta_{\to} \subseteq \Gamma$