
Lógica Proposicional

Metateoría: Corrección y Completitud

Del conjunto de hipótesis Γ se deduce α ?

$\text{¿ } \Gamma \models \alpha \text{ ?}$

- Tablas de verdad
 - Equivalencia lógicas
- Existen métodos que
siempre responden
SI o NO

$\text{¿ } \Gamma \vdash \alpha \text{ ?}$

- Prueba formal
- Requiere ingenio

¿Estas dos formas de responder la pregunta
son equivalentes?

Corrección y completitud del cálculo proposicional

- Si construimos una prueba siguiendo las reglas dadas:
 - ¿estamos seguros que no puede ocurrir que las hipótesis sean ciertas y la conclusión no?
 - ¿Y recíprocamente? Si α es consecuencia lógica de Γ : ¿existe una derivación de α con hipótesis en Γ ?
- O sea: ¿se cumple $\Gamma \vdash \alpha \Leftrightarrow \Gamma \models \alpha$?

Corrección del cálculo proposicional

- La corrección de un cálculo nos indica que las reglas de construcción de sus juicios reflejan nociones semánticas. Un cálculo es correcto para una semántica.
- Lema 1.6.1 [corrección del sistema de pruebas]
 - Para toda $\Gamma \subseteq \text{Prop}$ y $\alpha \in \text{PROP}$, si $\Gamma \vdash \alpha$ entonces $\Gamma \models \alpha$

Corrección del cálculo proposicional

- Lema 1.6.1 [corrección del sistema de pruebas]
 - Para toda $\Gamma \subseteq \text{Prop}$ y $\alpha \in \text{PROP}$, si $\Gamma \vdash \alpha$ entonces $\Gamma \models \alpha$
- O lo que es lo mismo, con $\Gamma \subseteq \text{Prop}$ y $\alpha \in \text{PROP}$ cualesquiera,
 - $\forall D \in \text{Der}::(\text{H}(D) \models \text{C}(D))$
- Por lo que se puede demostrar por inducción en Der.

Algunos casos

(PB) HIP) Si $\phi \in \text{PROP}$ entonces $\phi \in \text{DER}$

T) $\phi \models \phi$

PI_{1,2})

$\wedge_1)$ Si $\begin{array}{c} \triangle D \\ \phi \end{array} \in \text{DER}$ y $\begin{array}{c} \triangle D' \\ \psi \end{array} \in \text{DER}$ entonces $\frac{\begin{array}{c} \triangle D \\ \phi \end{array} \quad \begin{array}{c} \triangle D' \\ \psi \end{array}}{\phi \wedge \psi} \in \text{DER}$

Hay que probar que $\Gamma \cup \Delta \models \phi \wedge \psi$, y podemos usar como hipótesis $\Gamma \models \phi$ y $\Delta \models \psi$

Algunos casos

$PI_{\rightarrow})$

\rightarrow i) Si $\frac{\varphi}{D} \in \text{DER}$ entonces $\frac{\frac{\varphi}{D}}{\varphi \rightarrow \psi} \in \text{DER}$

*Hay que probar que $\Gamma \models \varphi \rightarrow \psi$,
y podemos usar como hipótesis $\Gamma \cup \{\varphi\} \models \psi$*

Corrección

- Proporciona formas de mostrar que algo es consecuencia semántica, o que algo no es consecuencia sintáctica
- Otra forma de mostrar que algo es tautología
 - si $\vdash \alpha$ entonces $\models \alpha$
- Una forma de mostrar que algo **no** es teorema
 - si α no es tautología, entonces no es teorema

Completitud

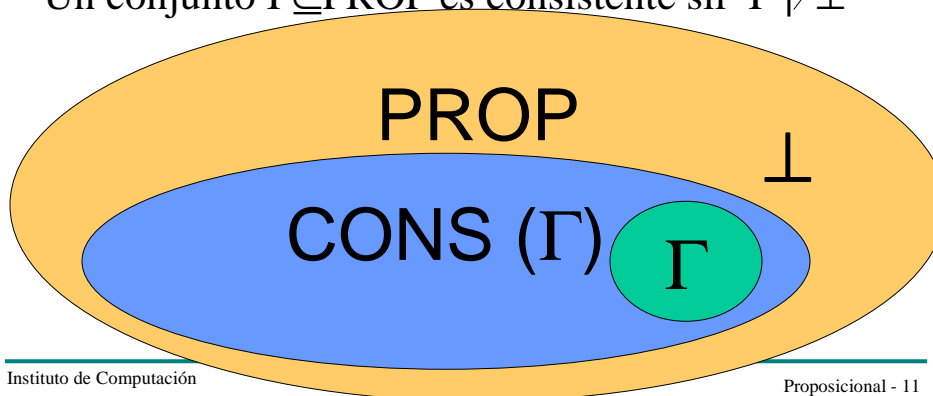
- $\Gamma \models \alpha \Rightarrow \Gamma \vdash \alpha$
- Observar que demostrar la afirmación anterior, implica transformar una noción semántica en sintáctica.
- Antes de llegar a ver la demostración de completitud, conviene estudiar las nociones de Consistencia.

Consistencia

Conjuntos Consistentes

Def. 1.6.2 [conjunto consistente o libre de contradicciones]

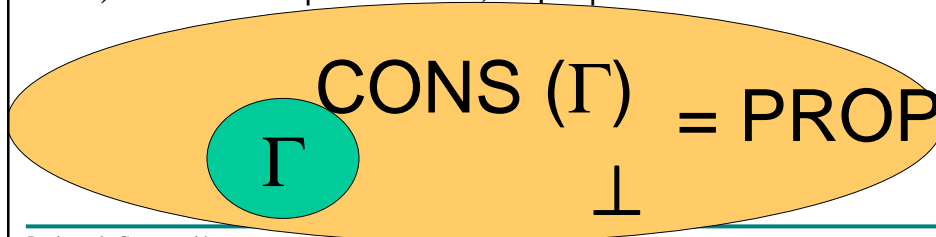
Un conjunto $\Gamma \subseteq \text{PROP}$ es consistente sii $\Gamma \not\vdash \perp$



Conjuntos Consistentes

• Lema 1.6.3. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

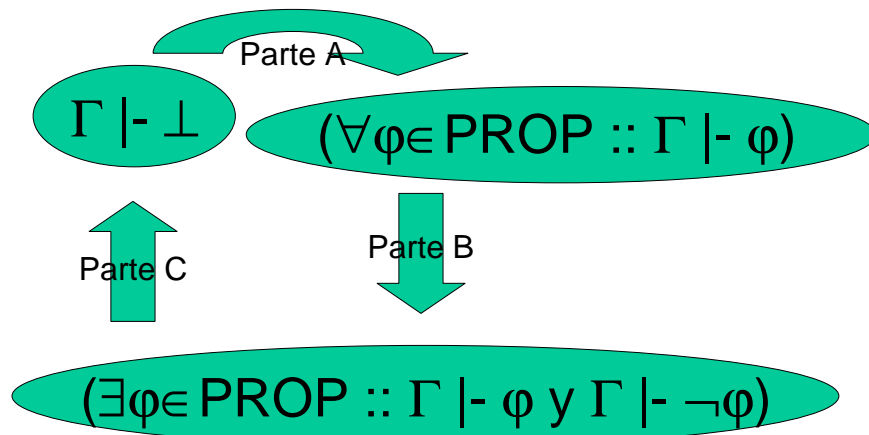
- i) Γ es inconsistente
- ii) Existe $\varphi \in \text{PROP}$, $\Gamma \vdash \varphi$ y $\Gamma \vdash \neg \varphi$
- iii) Para toda $\varphi \in \text{PROP}$, $\Gamma \vdash \varphi$



Lemma 1.6.3

- Probar que α , β , y γ son equivalentes
 - Se quiere probar $(\alpha \leftrightarrow \beta) \wedge (\beta \leftrightarrow \gamma) \wedge (\gamma \leftrightarrow \alpha)$
 - Que es lo mismo que $(\alpha \rightarrow \beta) \wedge (\beta \rightarrow \gamma) \wedge (\gamma \rightarrow \alpha)$
 - Que es lo mismo que $(\alpha \leftrightarrow \beta) \wedge (\beta \leftrightarrow \gamma)$
 - Que es lo mismo que $(\neg\alpha \leftrightarrow \neg\beta) \wedge (\neg\beta \leftrightarrow \neg\gamma)$
 - Que es lo mismo que $(\neg\alpha \rightarrow \neg\gamma) \wedge (\neg\gamma \rightarrow \neg\beta) \wedge (\neg\beta \rightarrow \neg\alpha)$
 - Que **no** es lo mismo que $(\alpha \leftrightarrow \beta \leftrightarrow \gamma)$
 - Que **no** es lo mismo que $(\alpha \rightarrow \beta) \wedge (\beta \rightarrow \gamma)$
 - Que **no** es lo mismo que $(\alpha \rightarrow \beta) \leftrightarrow (\beta \rightarrow \gamma)$
 - ¿Por qué?

Lemma 1.6.3



Lema 1.6.3 Parte A

H) $\Gamma \vdash \perp$

T) $\Gamma \vdash \varphi$

$\Gamma \vdash \perp$

\Leftrightarrow (Notación \vdash)

$(\exists D \in \text{DER} :: H(D) \subseteq \Gamma \text{ y } C(D) = \perp)$

\Rightarrow (Eliminación de \perp)

$(\forall \varphi :: (\exists D :: H(D) \subseteq \Gamma \text{ y } C(D) = \varphi))$

\Leftrightarrow (Notación \vdash)

$(\forall \varphi :: \Gamma \vdash \varphi)$

Condición suficiente de consistencia

Lema. 1.6.4 Sea $\Gamma \subseteq \text{PROP}$. Si existe una valuación v tal que $v(\varphi) = 1$ para toda $\varphi \in \Gamma$, entonces Γ es consistente

Se prueba el contrarrecíproco

Γ es inconsistente

$\Rightarrow \Gamma \vdash \perp$ **Ejercicio: justifique todos los pasos**

$\Rightarrow \Gamma \models \perp$

$\Rightarrow (\forall v :: \text{si } (\forall \gamma \in \Gamma :: v(\gamma) = 1) \text{ entonces } v(\perp) = 1)$

$\Rightarrow (\forall v :: (\exists \gamma \in \Gamma :: v(\gamma) = 0))$

Ejercicio

- ¿Cuáles de los siguientes conjuntos es consistente?
 1. $\{\neg p_1 \wedge p_2 \rightarrow p_0, p_1 \rightarrow (\neg p_1 \rightarrow p_2), p_0 \leftrightarrow \neg p_2\}$
 2. $\{p_i \rightarrow p_{i+1} : i \in \mathbb{N}\}$
 3. $\{p_i \rightarrow p_{i+1} : i \in \{0, 1, 2\}\} \cup \{p_2 \rightarrow \neg p_0\}$
 4. $\{p_i \rightarrow p_{i+1} : i \in \{0, 1, 2\}\} \cup \{p_3 \rightarrow \neg p_0\}$

Conjuntos Consistentes

Lema. 1.6.5

- i) Si $\Gamma \cup \{\neg \varphi\}$ es inconsistente entonces $\Gamma \vdash \varphi$
- ii) Si $\Gamma \cup \{\varphi\}$ es inconsistente entonces $\Gamma \vdash \neg \varphi$

Otra lectura

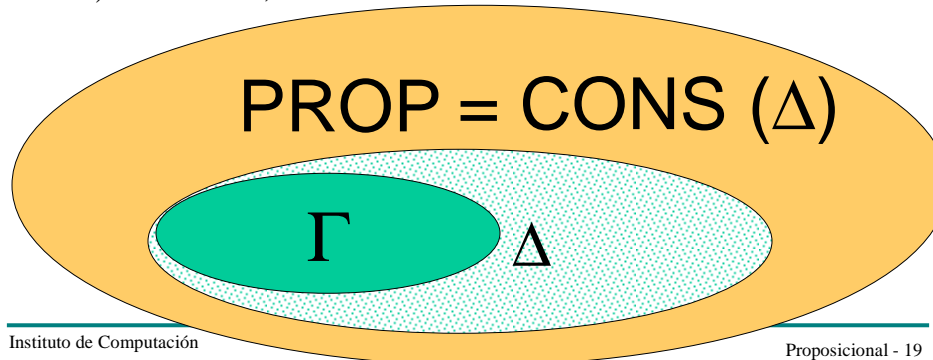
- i) Si $\Gamma \not\vdash \varphi$, entonces $\Gamma \cup \{\neg \varphi\}$ es consistente
- ii) Si $\Gamma \not\vdash \neg \varphi$, entonces $\Gamma \cup \{\varphi\}$ es consistente

Consistencia Maximal

Def 1.6.6 [consistencia maximal]

$\Gamma \subseteq \text{PROP}$ es consistente maximal ssi:

- i) Γ es consistente, y
- ii) Para todo Δ consistente tal que $\Gamma \subseteq \Delta$ se cumple $\Gamma = \Delta$
o ii) Para todo Δ , si $\Gamma \subset \Delta$ entonces Δ es inconsistente



Consistencia maximal

- Cada valuación determina un conjunto consistente maximal
 - $\Gamma = \{\varphi \in \text{PROP} \mid v(\varphi)=1\}$
 - Considere Δ , tal que $\Gamma \subset \Delta$
 - Tome $\psi \in \Delta \setminus \Gamma$
 - Muestre que $\neg \psi \in \Gamma$
 - Concluya que Δ es inconsistente

Consistencia Maximal y Teorías

Def [teoría]

- Un conjunto $\Gamma \subseteq \text{PROP}$ es una teoría sii $\text{CONS}(\Gamma) \subseteq \Gamma$
- o sea,
 - para todo $\alpha \in \text{PROP}$, si $\Gamma \vdash \alpha$ entonces $\alpha \in \Gamma$)

Lema 1.6.8

- Si Γ es consistente maximal entonces Γ es teoría
 - $\Gamma \vdash \alpha$
 - $\Rightarrow \Gamma \not\vdash \neg\alpha$ (consistencia, Lema 1.6.3 – contrarrec.)
 - $\Rightarrow \Gamma \cup \{\alpha\}$ es consistente (Lema 1.6.5)
 - $\Rightarrow \alpha \in \Gamma$ (maximalidad)

Consistencia Maximal (cont.)

Lema 1.6.9

- Si Γ es consistente maximal entonces:
 - i) para toda $\alpha \in \text{PROP}$ o bien $\alpha \in \Gamma$ o bien $\neg\alpha \in \Gamma$
 - ii) para todas $\alpha, \beta \in \text{PROP}$
 $\alpha \rightarrow \beta \in \Gamma$ ssi (si $\alpha \in \Gamma$ entonces $\beta \in \Gamma$)

Corolario [pertenencia a un conjunto maximal]

- Si Γ es consistente maximal entonces:
 - i) $\alpha \in \Gamma$ ssi $\neg\alpha \notin \Gamma$
 - ii) $\neg\alpha \in \Gamma$ ssi $\alpha \notin \Gamma$

Lema. 1.6.7 [consistencia y consistencia maximal]

- Si Γ es consistente entonces existe Γ^* consistente maximal tal que $\Gamma \subseteq \Gamma^*$

Lema 1.6.9.i

Si Γ es consistente maximal entonces:

i) para toda $\alpha \in \text{PROP}$ o bien $\alpha \in \Gamma$ o bien $\neg \alpha \in \Gamma$

Dem.

$\alpha \notin \Gamma$

\Rightarrow

$\Gamma \cup \{\alpha\} \vdash \perp$

\Rightarrow

$\Gamma \vdash \neg \alpha$

\Rightarrow

$\neg \alpha \in \Gamma$

$\neg \alpha \notin \Gamma$

\Rightarrow

$\Gamma \cup \{\neg \alpha\} \vdash \perp$

\Rightarrow

$\Gamma \vdash \alpha$

\Rightarrow

$\alpha \in \Gamma$

Lema 1.6.9.ii (directo)

Si Γ es consistente maximal entonces:

ii) para todas $\alpha, \beta \in \text{PROP}$

Si $\alpha \rightarrow \beta \in \Gamma$ entonces

(si $\alpha \in \Gamma$ entonces $\beta \in \Gamma$)

Dem. \Rightarrow

Suponga $\alpha \in \Gamma$.

Se puede construir la siguiente derivación:

$$\frac{\alpha \rightarrow \beta \quad \alpha}{\beta} (\text{E} \rightarrow)$$

Lema 1.6.9.ii (Reciproco)

Si Γ es consistente maximal entonces:

ii) para todas $\alpha, \beta \in \text{PROP}$

Si (si $\alpha \in \Gamma$ entonces $\beta \in \Gamma$)
entonces $\alpha \rightarrow \beta \in \Gamma$

Dem. \Leftarrow

Dado que (si $\alpha \in \Gamma$ entonces $\beta \in \Gamma$) ocurre uno de los dos casos:

<p>Caso 1: $\alpha \in \Gamma$ \Rightarrow(por “entonces”) $\beta \in \Gamma$ \Rightarrow $\alpha \rightarrow \beta \in \Gamma$</p>	<p>Caso 2: $\alpha \notin \Gamma$ \Rightarrow(por parte i) $\neg\alpha \in \Gamma$ \Rightarrow Se puede hacer la siguiente deriv.</p>	$\frac{\cancel{\alpha} \quad \neg\alpha}{\perp} (E\neg)$ $\frac{\perp}{\beta} (E\perp)$ $\frac{\beta}{\alpha \rightarrow \beta} (I\rightarrow)$
---	--	---

Lema 1.6.7.

- Todo conjunto consistente S se encuentra incluido en algún conjunto consistente maximal.
1. Enumere las proposiciones: $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2 \dots$
 2. Defina recursivamente la siguiente familia de conjuntos de fórmulas proposicionales

$$S_0 := S$$

$$S_{n+1} := \begin{cases} S_n \cup \{\varphi_n\} & \text{consistente,} \\ S_n & \text{entonces } S_n \cup \{\varphi_n\}, \\ & \text{sino } S_n \end{cases}$$

Lema 1.6.7.

3. Defina el conjunto de fórmulas proposicionales $S^* := \cup \{S_n\}$
4. Pruebe que S_n es consistente (inducción)
5. Pruebe que S^* es consistente (contrarrecíproco)
6. Pruebe que S^* es consistente maximal (contrarrecíproco)

Resumen de Consistencia

- Definiciones
 - Conjunto de fórmulas Consistente
 - Conjunto de fórmulas Consistente Maximal
 - Teoría
- Principales Consecuencias de las Definiciones
 - Si $\exists v$ valuación / $v(\Gamma)=1 \Rightarrow \Gamma$ Consistente
 - Γ Consistente $\Rightarrow \exists \Delta$ CM / $\Gamma \subseteq \Delta$
- Notar que:
 - si dos fórmulas $\alpha, \beta \in \Gamma$ CM, entonces las fórmulas que se construyen con α y β y debieran ser verdaderas si α y β lo son ($\alpha \wedge \beta, \alpha \vee \beta, \dots$), también están en Γ .

Completitud del Cálculo de Deducción Natural en Proposicional

Completitud

Lema 1.6.10

Si $\Gamma \subseteq \text{PROP}$ es consistente entonces existe una valuación v tal que $v(\alpha) = 1$ para toda $\alpha \in \Gamma$.

1. Γ incluido en Γ^* consistente maximal
2. Defino v con $v(p_i) = 1$ sii $p_i \in \Gamma^*$
3. Pruebo $v(\alpha) = 1$ sii $\alpha \in \Gamma^*$ (inducción)

Completitud

Corolario 1.6.11

Para todas $\alpha \in \text{PROP}$, $\Gamma \subseteq \text{PROP}$, $\Gamma \not\vdash \alpha$ si y sólo si existe una valuación v tal que:

- $v(\alpha) = 0$
 - para toda $\beta \in \Gamma$ se cumple $v(\beta) = 1$
- $$\Gamma \not\vdash \alpha$$
- $$\Leftrightarrow$$
- $$\Gamma \cup \{\neg\alpha\} \not\vdash \perp$$
- $$\Leftrightarrow$$
- $$(\exists v :: (\forall \varphi \in \Gamma \cup \{\neg\alpha\} :: v(\varphi) = 1))$$
- $$\Leftrightarrow$$
- $$(\exists v :: (\forall \varphi \in \Gamma :: v(\varphi) = 1) \text{ y } v(\alpha) = 0)$$

Completitud

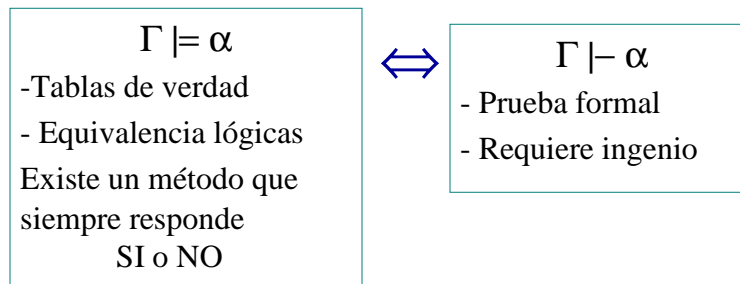
Teorema 1.6.12 [completitud del cálculo proposicional]

Para todas $\alpha \in \text{PROP}$, $\Gamma \subseteq \text{PROP}$,
si $\Gamma \models \alpha$ entonces $\Gamma \vdash \alpha$

Es el contrareciproco del anterior.

Corrección y Completitud

Para todos $\Gamma \subseteq \text{PROP}$, $\alpha \in \text{PROP}$ $\Gamma \models \alpha$ sii $\Gamma \vdash \alpha$



Los teoremas nos autorizan a *combinar* ambas técnicas y utilizar equivalencias semánticas y pruebas (que es lo que usualmente hacemos en matemática)

Prueba del teorema de completitud

- Demostrar : Si $\Gamma \models \varphi$ entonces $\Gamma \vdash \varphi$
 - Implica probar que existe una derivación de φ a partir de Γ teniendo como única información los valores de verdad de φ y Γ
- ¿Cómo construir la derivación?
 - La demostración de 1.6.12 no nos da el método
- Se puede dar una prueba constructiva del teorema de completitud [Post-Bernay-Kalmar]
 - Esta prueba nos da una derivación de φ a partir de Γ sabiendo que $\Gamma \models \varphi$

Prueba constructiva de completitud

- Si $\Gamma = \{\alpha_1 \dots \alpha_n\}$ es finito, demostrar $\alpha_1 \dots \alpha_n \vdash \beta$ es equivalente a demostrar $\vdash \alpha_1 \rightarrow \dots \rightarrow \alpha_n \rightarrow \beta$
- Se prueban los siguientes resultados:
 - para toda $\alpha \in \text{PROP}$ se deriva $\vdash \alpha^c \leftrightarrow \alpha$
 - (α^c es la forma normal conjuntiva de α)
 - una forma normal conjuntiva φ^c es tautología si y sólo si cada “factor” de la conjunción contiene a $\neg \perp$ o a un par $p_i \vee \neg p_i$ para alguna letra p_i .

Prueba constructiva de completitud (cont.)

Para construir una derivación de la tautología $\alpha = \alpha_1 \rightarrow \dots \rightarrow \alpha_n \rightarrow \beta$:

1. Encontrar α^c
2. Como α^c es tautología, construir una derivación para cada $(p_i \vee \neg p_i)$ y una derivación para cada $\neg \perp$ que ocurran en α^c .
3. Componer estas derivaciones para obtener una prueba de α^c
4. Utilizar la derivación de $\vdash \alpha^c \leftrightarrow \alpha$ para construir la derivación de $\vdash \alpha$

Ejemplo

$p, p \rightarrow q \models q$

- Para escribir una derivación de $\vdash p \rightarrow (p \rightarrow q) \rightarrow q$

– La forma normal conjuntiva de la formula es:

$$(p \vee \neg p) \wedge (p \vee \neg p \vee q)$$

– La derivación buscada es:

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{ccc}
 \begin{array}{c} \nabla \\ \hline p \vee \neg p \end{array} & & \begin{array}{c} \nabla \\ \hline \frac{p \vee \neg p}{p \vee \neg p \vee q} \end{array} & & \begin{array}{c} \nabla \\ \hline ((p \vee \neg p) \wedge (p \vee \neg p \vee q)) \leftrightarrow (p \rightarrow (p \rightarrow q) \rightarrow q) \end{array} \\
 \hline
 (p \vee \neg p) \wedge (p \vee \neg p \vee q) & & & & \\
 \hline
 p \rightarrow (p \rightarrow q) \rightarrow q & & & &
 \end{array}
 \end{array}$$

Fin