Deducción Natural en los Lenguajes de Primer Orden

Deducción Natural

- Definimos inductivamente el conjunto DER_P de las derivaciones de la lógica de predicados.
- Caso base: derivación trivial (idem PROP)
- Para los conectivos: las mismas reglas de introducción y eliminación que en PROP
- Para los cuantificadores ($\forall$ y $\exists$) se agregan reglas de introducción y eliminación

Cómo probar un para todo?

H) $\delta_1 \ldots \delta_n$

T) Para todo x vale α

<u>Dem</u>

•Sea x arbitrario (no se puede suponer nada sobre x)

Probamos α

(usamos... $\delta_1 \ldots \delta_n$ ...)

Luego, α se cumple para todo x

$$\dfrac{\begin{array}{c}\delta_{1.} \ldots \delta_n \\ \ldots \\ \alpha\end{array}}{(\forall x)\ \alpha}\ (I_\forall)\ (**)$$

(**) La noción de *x arbitrario* se expresa sintácticamente por: *x no ocurre libre en las hipótesis no canceladas de* $\begin{array}{c}\delta_1. \ldots \delta_n \\ \ldots \\ \alpha\end{array}$

Cómo utilizar un para todo?

H) $\delta_1 \ldots \delta_n$

T) t tiene la propiedad α

<u>Dem</u>

•Probamos que para todo x vale α.

(usamos... δ1 ... δn ...)

Luego, en particular, α vale para t.

$$\dfrac{\begin{array}{c}\delta_1 \ldots \delta_n \\ \ldots \\ (\forall x)\ \alpha\end{array}}{\alpha\,[t/x]}\ (E_\forall)\ (*)$$

(*) Para poder realizar la sustitución: t debe estar libre para x en α

Cómo probar un existe?

H) $\delta_1 \ldots \delta_n$
T) Existe un x para el cual se cumple α

Dem

- Probamos que α vale para t
 (usamos... $\delta_1 \ldots \delta_n \ldots$)

Luego, existe un x para el cual vale α.

$$\dfrac{\begin{array}{c}\delta_{1.} \ldots \delta_n \\ \ldots \\ \alpha[t/x]\end{array}}{(\exists x)\ \alpha}\ (I_{\exists})$$

(*) Para poder realizar la sustitución: t debe estar libre para x en α

Cómo utilizar un existe?

H) $\delta_1. \ldots \delta_n, (\exists x)\alpha$
T) β

Dem

•Probamos β .
 (usamos.. $\delta_1 .. \delta_n ..$ y
 α para un x arbitrario)

Luego β

$$\dfrac{(\exists x)\alpha \qquad \begin{array}{c}\delta_1 \ldots \delta_n\ \cancel{\alpha}(x) \\ \ldots \\ \beta\end{array}}{\beta}\ (E_{\exists})(**)$$

(**) el único supuesto que se asume sobre x en la prueba es que se cumple $\alpha(x)$.
 Esto se expresa como: x no ocurre libre ni en $\delta_1. \ldots \delta_n$ ni en β

Derivaciones - DER_P

Def [DER_P]
El conjunto DER_P de las derivaciones de la lógica de predicados se define inductivamente como sigue:

HIP) Si $\varphi \in$ FORM entonces $\varphi \in DER_P$

$\wedge_I$) Si $\begin{array}{c} D \\ \varphi \end{array} \in DER_P$ **y** $\begin{array}{c} D' \\ \psi \end{array} \in DER_P$ **entonces** $\dfrac{\begin{array}{cc} D & D' \\ \varphi & \psi \end{array}}{\varphi \wedge \psi} \in DER_P$

$(\wedge_{E1})$ $(\wedge_{E2})$ $(\vee_{I1})$ $(\vee_{I2})$ $(\vee_E)$ $(\rightarrow_I)$ $(\rightarrow_E)$ $(\neg_I)$ $(\neg_E)$ $(\leftrightarrow_I)$ $(\leftrightarrow_{E1})$ $(\leftrightarrow_{E2})$ $(\perp_E)$ (RAA) se definen de la misma forma que para DER en lógica proposicional.

Der_p: $\forall$

$\forall_I$) Si $\begin{array}{c} D \\ \varphi \end{array} \in DER_P$ y $x \notin FV(H(D))$, entonces $\dfrac{\begin{array}{c} D \\ \varphi \end{array}}{(\forall x)\varphi} \in DER_P$

$\forall_E$) Si $\begin{array}{c} D \\ (\forall x)\varphi \end{array} \in DER_P$ y t está libre para x en φ, entonces

$$\dfrac{\begin{array}{c} D \\ (\forall x)\varphi \end{array}}{\varphi[t/x]} \in DER_P$$

Der_p: $\exists$

$\exists_I$) Si $\begin{array}{c} D \\ \varphi\,[t/x] \end{array} \in \mathrm{DER}_P$ y t está libre para x en φ, , entonces

$$\dfrac{\begin{array}{c} D \\ \varphi[t/x] \end{array}}{(\exists x)\varphi} \in \mathrm{DER}_P$$

$\exists_E$) Si $\begin{array}{c} D \\ (\exists x)\varphi \end{array} \in \mathrm{DER}_P$ y $\begin{array}{c} \varphi \\ D' \\ \Psi \end{array} \in \mathrm{DER}_P$ tales que:

$x \notin FV(H(D')-\{\varphi\}) \cup FV(\Psi)$, entonces $\dfrac{\begin{array}{c} D \\ (\exists x)\varphi \end{array} \quad \begin{array}{c} \cancel{\varphi} \\ D' \\ \Psi \end{array}}{\Psi} \in \mathrm{DER}_P$

Consecuencia Sintáctica

Def [consecuencia sintáctica]

Sea $\Gamma \subseteq$ FORM y $\varphi \in$ FORM. Decimos que φ es consecuencia sintáctica de Γ o que φ se deriva de Γ ssi existe $D \in \mathrm{DER}_P$ tal que :

$C(D) = \varphi$ y

$H(D) \subseteq \Gamma$

<u>Notación</u>:

$\Gamma \vdash \varphi$ se lee "φ se deriva de Γ"

$\varnothing \vdash \varphi$ se lee "φ es teorema"; se escribe $\vdash \varphi$

Ejemplos

$\vdash (\forall x_1)(\forall x_2)\ \alpha \rightarrow (\forall x_2)(\forall x_1)\ \alpha$

$\vdash (\exists x_1)(\exists x_2)\ \alpha \rightarrow (\exists x_2)(\exists x_1)\ \alpha$

$\vdash (\forall x_1)(\alpha \wedge \beta) \rightarrow (\forall x_1)\alpha \wedge (\forall x_1)\beta$

$\vdash (\exists x_1)(\alpha \vee \beta) \rightarrow (\exists x_1)\alpha \vee (\exists x_1)\beta$

$\vdash (\forall x)(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow (\exists x)\beta)$

$\vdash (\forall x)(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow (\forall x)\beta)$, si $x \notin FV(\alpha)$

Restricciones sobre las variables

Porqué las restricciones en las reglas de $\forall$ y $\exists$?

- Sin las restricciones, las reglas permiten construir derivaciones que corresponden a razonamientos incorrectos.
- Ejemplos:

  $\vdash \underline{c}_1 =' \underline{c}_1 \rightarrow (\forall x)\ x =' \underline{c}_1$

  $\vdash (\forall x)\ \neg(\forall y)\ x =' y \rightarrow \neg(\forall y)\ y =' y$

Propiedades de los cuantificadores

Lema [**propiedades de derivabilidad del $\forall$**]

- Si $\Gamma \vdash \varphi$ y $x \notin FV(\Gamma)$ entonces $\Gamma \vdash (\forall x)\varphi$
- Si $\Gamma \vdash (\forall x)\varphi$ y t libre para x en φ, entonces $\Gamma \vdash \varphi[t/x]$

Lema [**propiedades de derivabilidad del $\exists$**]

- Si t es libre para x en φ entonces $\varphi[t/x] \vdash (\exists x)\varphi$
- Si $x \notin FV(\psi) \cup FV(\Gamma)$ entonces,

  si $\Gamma, \varphi \vdash \psi$ luego $\Gamma, (\exists x)\varphi \vdash \psi$

$\varphi(\tilde{a})$, $\Gamma(\tilde{a})$

Para poder probar consistencia, debemos extender la definición de $\models$ a todo FORM:

Def [ã, Γ(ã)]

Sean $\Gamma \subseteq FORM$, $\varphi \in FORM$ y $\{x_{i1}, x_{i2}, \ldots\} = \bigcup_{\alpha \in \Gamma \cup \{\varphi\}} FV(\alpha)$

Sea $\mathcal{M}$ una estructura.

Si ã es una secuencia $(a_1, a_2, \ldots)$ de elementos de $|\mathcal{M}|$ (eventualmente repetidos), entonces $\Gamma(\tilde{a})$ y $\varphi(\tilde{a})$ se obtienen de Γ y φ sustituyendo simultáneamente en todas las fórmulas de Γ y en φ los x_{ij} por los a_j $(j \geq 1)$

(➔observar que pueden ser infinitos)

$M \models \Gamma(\tilde{a})$ - $\Gamma \models \varphi$

Intuitivamente, $\Gamma \models \varphi$ vale sólo si, para todas las estructuras M y todas las posibles asignaciones $\tilde{a}$ (en $|M|$) de valores a las variables libres de Γ y de φ, se verifica que: si las hipótesis en $\Gamma(\tilde{a})$ son ciertas, entonces también es cierta $\varphi(\tilde{a})$

Def 2.8.1 [$M \models \Gamma(\tilde{a})$ y $\Gamma \models \varphi$]

i) $M \models \Gamma(\tilde{a})$ si para todo $\alpha \in \Gamma(\tilde{a})$ se cumple $M \models \alpha$

ii) $\Gamma \models \varphi$ ssi

para toda estructura M y para toda secuencia $\tilde{a}$ en $|M|$,

si $M \models \Gamma(\tilde{a})$ entonces $M \models \varphi(\tilde{a})$

Obs: Esta definición generaliza la definición 2.2.4. Que se aplica sólo si $\Gamma \subseteq SENT$ y $\varphi \in SENT$.

Corrección de DER_P

Lema 2.8.2 [**corrección de DER_P**]

Si $\Gamma \vdash \varphi$ entonces $\Gamma \models \varphi$

Aplicaciones

Demostrar que:

$$\nvdash (\forall x)(\exists y)\,\varphi \rightarrow (\exists y)(\forall x)\,\varphi$$

$$(\forall x)\, P(x,x),\ (\forall yx)(P(x,y) \rightarrow P(y,x)) \nvdash (\forall xyz)(P(x,y) \wedge P(y,z) \rightarrow P(x,z))$$