Identidad

Otro enfoque para la Igualdad

Otra Caracterización de =´

Hasta ahora usamos la convención de interpretar el símbolo =‘ como la relación de identidad en cada estructura. Otra alternativa es caracterizar el símbolo =‘ a través de axiomas:

I1. $\forall x\ (x =` x)$

I2. $\forall x\ \forall y\ (x =` y \rightarrow y =` x)$

I3. $\forall x\ \forall y\ \forall z\ (x =` y \wedge y =` z \rightarrow x =` z)$

I4. $\forall x_1 \ldots \forall x_n \forall y_1 \ldots \forall y_n (\bigwedge_{1 \leq i \leq n} x_i =` y_i) \rightarrow t(x_1 \ldots x_n) =` t(y_1 \ldots y_n)$

$\forall x_1 \ldots \forall x_n \forall y_1 \ldots \forall y_n (\bigwedge_{1 \leq i \leq n} x_i =` y_i) \rightarrow \varphi(x_1 \ldots x_n) \rightarrow \varphi(y_1 \ldots y_n)$

Obs: I4 son esquemas de axiomas

Propiedades de los Axiomas

- Si una estructura *M es* modelo de I1, I2, I3 entonces la relación que interpreta el símbolo =‘ es de equivalencia.
- I4 exige además que la relación sea de *congruencia* con respecto a todas las relaciones definibles en el lenguaje.
- Si interpretamos a =‘ como la identidad, se demuestra:

  Para toda estructura $M \models$ {I1, I2, I3,I4}

Identidad y Deducción Natural

Los axiomas I1 a I4 se pueden incorporar como reglas de derivación (t_i, s_i, $r \in$ Term) :

$$\frac{}{t='t}\ \textbf{RI1}$$

$$\frac{t_1='s_1 \ldots t_n='s_n}{t[t_1,\ldots t_n/ z_1,\ldots z_n] =' t\,[s_1,\ldots s_n/ z_1,\ldots z_n]}\ \textbf{RI4}$$

($t \in$ TERM)

$$\frac{t='s}{s='t}\ \textbf{RI2}$$

$$\frac{t_1='s_1 \ \ldots\ t_n='s_n \qquad \varphi\,[t_1,\ldots t_n/ z_1,\ldots z_n]}{\varphi\,[s_1,\ldots s_n/ z_1,\ldots z_n]}\ \textbf{RI4(*)}$$

$$\frac{t='s \qquad s='r}{t='r}\ \textbf{RI3}$$

(*) si t_i,s_i libres para z_i en φ i=1..n
($\varphi \in$ FORM)

Identidad y Deducción Natural (II)

Sea L un lenguaje de tipo $<r_1,..,r_n ; a_1,..,a_m ; k>$.
Entonces los axiomas I4 se pueden derivar de:

$$\frac{t_1 =' s_1 \quad \ldots \quad t_{aj} =' s_{aj}}{f_j\,(t_1, \ldots t_{aj}) =' f_j\,(s_1, \ldots s_{aj})} \; \textbf{RI4'} \quad \text{para } j=1,..m$$

$$\frac{t_1 =' s_1 \quad \ldots \quad t_{ri} =' s_{ri} \quad P_i\,(t_1, \ldots t_{ri})}{P_i\,(s_1, \ldots s_{ri})} \; \textbf{RI4'} \quad \text{para } i=1,..n$$

prueba: inducción en TERM y en FORM

Ejemplos

1. El lenguaje de la Identidad

Tipo del lenguaje: <-; -; 0>

Alfabeto: símbolo de predicado =‘

- Las estructuras de este tipo son de la forma <A> y satisfacen I1, I2, I3, I4 .
- Estas estructuras son tan simples que sólo pueden expresarse nociones de cardinalidad sobre ellas. Por ejemplo:
  - $\lambda_n := \exists y_1 \dots \exists y_n (\wedge_{i \neq j}\, y_i \neq y_j)$ (n>1)

    M |= λ_n ssi |M| tiene por lo menos n elementos
  - $\mu_n := \forall y_0 \dots \forall y_n (\vee_{i \neq j}\, y_i = y_j)$ (n>0)

    M |= μ_n ssi |M| tiene a lo sumo n elementos

2. El lenguaje de la Aritmética

Tipo del lenguaje: <-; 2,2,1; 1>

Alfabeto: símbolo de predicado =‘, símbolos de función +, *, S, símbolo de constante $\underline{0}$

Definición [estructura de Peano]

Una estructura de Peano es un modelo de las fórmulas:

- $\forall x\, \neg(\underline{0} =' S(x))$
- $\forall x\, \forall y\, (S(x) =' S(y) \rightarrow x =' y)$
- $\forall x\, (x+\underline{0} =' x)$
- $\forall x\, \forall y\, (x+S(y) =' S(x+y))$
- $\forall x\, (x*\underline{0} =' \underline{0})$
- $\forall x\, \forall y\, (x*S(y)) =' (x*y) + x$
- $\varphi(\underline{0}) \wedge \forall x\, (\varphi(x) \rightarrow \varphi\, (S(x))) \rightarrow \forall x\, \varphi(x)$

3. El lenguaje de los POSets

Tipo del lenguaje: < 2 ; - ; 0 >

Alfabeto: símbolos de predicado =‘, ≤

Definición [conjunto parcialmente ordenado]

Un conjunto parcialmente ordenado (POSet) es un modelo de las siguientes fórmulas:

- $\forall x \ (x \leq x)$
- $\forall x \forall y \ (x \leq y \wedge y \leq x \leftrightarrow x =' y)$
- $\forall x \forall y \forall z \ (x \leq y \wedge y \leq z \rightarrow x \leq z)$

4. El lenguaje de los Grupos

Tipo del lenguaje: < - ; 2,1 ; 1 >

Alfabeto: símbolo de predicado =‘, símbolos de función . , $^{-1}$, símbolo de constante $\underline{c}$

Definición [grupo]

Un grupo es un modelo de las siguientes fórmulas:

- $\forall x \forall y \forall z \ (x.y).z =' x.(y.z)$
- $\forall x \ (x.\underline{c} =' x \ \wedge \underline{c}.x =' x)$
- $\forall x \ (x.x^{-1} =' \underline{c} \ \wedge x^{-1}.x =' \underline{c})$