Completitud en Lógica de Predicados

Pero antes, deducción natural

$\boxed{x \notin FV(\tau)}$

$$\dfrac{\dfrac{[\exists x\, \sigma(x)]^1 \qquad \dfrac{\dfrac{\forall x\, (\sigma(x) \to \tau)}{\sigma(x) \to \tau}(E\forall^*) \qquad [\sigma(x)]^2}{\tau}(E\to)}{\tau}(E\exists^{2**})}{\exists x\, \sigma(x) \to \tau}(I\to^1)$$

* Correcta, porque x está libre para x en $\sigma(x) \to \tau$

** Correcta, porque $x \notin FV(\forall x (\sigma(x) \to \tau))$ y $x \notin FV(\tau)$

Otra derivación

$x \notin FV(\sigma)$

$$\dfrac{\exists x\,(\sigma \to \tau(x)) \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{[\sigma \to \tau(x)] \qquad [\sigma]}{\tau(x)}}{\exists x\, \tau(x)}}{\sigma \to \exists x\, \tau(x)}}{\sigma \to \exists x\, \tau(x)}$$

Ejercicio: indique las reglas y realice las justificaciones correspondientes.

Armando derivaciones

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\sigma \to \exists x\, \tau(x) \qquad \sigma}{\exists x\, \tau(x)} \qquad \dfrac{\dfrac{[\tau(x)]}{\sigma \to \tau(x)}}{\exists x\,(\sigma \to \tau(x))}}{\exists x\,(\sigma \to \tau(x)) \qquad \neg\exists x\,(\sigma \to \tau(x))}}{\bot}}{\neg\sigma \qquad [\sigma]}}{\bot}}{\tau(x)}}{\sigma \to \tau(x)}}{\dfrac{\exists x\,(\sigma \to \tau(x)) \qquad \neg\exists x\,(\sigma \to \tau(x))}{\bot}}$$

$$\exists x\,(\sigma \to \tau(x))$$

Ejercicio: indique las reglas, marque las cancelaciones faltantes, y realice las justificaciones correspondientes.

Armando derivaciones

$\boxed{y \notin FV(\tau)}$

$$\dfrac{\exists x\,\tau(x) \qquad \dfrac{\dfrac{[\tau(x)]}{\exists x\,\tau(x) \to \tau(x)}}{\exists y\,(\exists x\,\tau(x) \to \tau(y))}}{\exists y\,(\exists x\,\tau(x) \to \tau(y))}$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\neg\exists x\,\tau(x) \qquad [\exists x\,\tau(x)]}{\bot}}{\tau(y)}}{\exists x\,\tau(x) \to \tau(y)}}{\exists y\,(\exists x\,\tau(x) \to \tau(y))}$$

Ejercicio: indique las reglas, marque las cancelaciones faltantes, realice las justificaciones correspondientes, y complete la prueba con las reglas que faltan.

Lemas sobre derivaciones (1)

- <u>Lema</u> 2.8.4 [variables libres y constantes]
- Sea y una variable que no ocurre en Γ ni en φ.
  - Si $\Gamma \vdash \varphi$ entonces $\Gamma[y/c] \vdash \varphi[y/c]$
  - ¡Cuidado! [y/c] no es la función de sustitución que conocemos.
  - El lema se demuestra mediante induccion en las derivaciones

Lemas sobre derivaciones (2)

- <u>Lema</u>
- Sea c una constante que no aparece en Γ ni en ψ ni en φ.
  - Si $\Gamma, \exists x\ \varphi(x) \to \varphi(c) \vdash \psi$ entonces $\Gamma \vdash \psi$
- <u>Dem.</u>
  1. $\Gamma \vdash (\exists x\ \varphi(x) \to \varphi(c)) \to \psi$
  2. $\Gamma \vdash (\exists x\ \varphi(x) \to \varphi(y)) \to \psi$, con y que no aparece en Γ ni en ψ ni en φ (Lema 2.8.4)
  3. ...

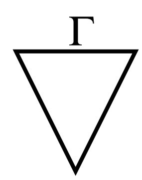
Lemas sobre derivaciones (2)

$\exists x\ \varphi(x) \to \exists y\ \varphi(y)$

1. pruebe que es una derivación correcta

2. pruebe que es teorema

3. verifique que ya vimos esto

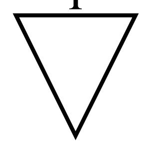


$$\frac{\dfrac{(\exists x\ \varphi(x) \to \varphi(y)) \to \psi}{\forall y\ ((\exists x\ \varphi(x) \to \varphi(y)) \to \psi)}}{\exists y\ (\exists x\ \varphi(x) \to \varphi(y)) \to \psi}$$

$(\exists x\ \varphi(x) \to \exists y\ \varphi(y)) \to \exists y\ (\exists x\ \varphi(x) \to \varphi(y))$ ***4. arme todo***

Lemas sobre derivaciones (2) Version 1.2b

Γ



$(\exists x\ \varphi(x) \to \varphi(y)) \to \psi$

$\forall y\ ((\exists x\ \varphi(x) \to \varphi(y)) \to \psi)$

$\exists y\ (\exists x\ \varphi(x) \to \varphi(y)) \to \psi$

1. pruebe que es una derivación correcta

2. verifique que ya vimos esto

$\exists y\ (\exists x\ \varphi(x) \to \varphi(y))$

3. arme todo

Teorema de Completitud

$$\Gamma \models \varphi \ \Rightarrow\ \Gamma \vdash \varphi$$

La prueba del teorema de completitud para la Lógica de Predicados sigue la misma secuencia de pasos que para la lógica proposicional

Completitud para PROP

1. Γ consistente $\Rightarrow$ existe Γ^* consistente maximal tal que $\Gamma \subseteq \Gamma^*$

   Resultados Auxilares:

   - Γ CM $\Rightarrow$ para toda $\varphi \in PROP$: $\varphi \in \Gamma$ o bien $\neg \varphi \in \Gamma$
   - Γ CM $\Rightarrow$ para toda $\varphi, \psi \in PROP$: $\varphi \to \psi \in \Gamma$ ssi (si $\varphi \in \Gamma$ entonces $\psi \in \Gamma$)

2. Γ consistente $\Rightarrow$ existe v tal que $v(\Gamma) = 1$

3. Corolario: $\Gamma \not\vdash \varphi \Rightarrow \Gamma \not\models \varphi$

4. Teorema de Completitud: $\Gamma \models \varphi \Rightarrow \Gamma \vdash \varphi$

Prueba para PROP

- Γ consistente $\Rightarrow$ existe Γ^* consistente maximal tal que $\Gamma \subseteq \Gamma^*$

  Enumeramos PROP: $\varphi_1, \ldots \varphi_n, \ldots$

  $\Gamma_0 = \Gamma$

  $$\Gamma_{n+1} = \begin{cases} \Gamma_n \cup \{\varphi_n\} & \text{si } \Gamma_n \cup \{\varphi_n\} \text{ consistente} \\ \Gamma_n & \text{si no} \end{cases}$$

  $\Gamma^* = \bigcup \Gamma_n$

- Γ consistente $\Rightarrow$ existe v tal que $v(\Gamma) = 1$

  - Tomamos Γ^* CM tal que $\Gamma \subseteq \Gamma^*$
  - Definimos $v(p_i) = \begin{cases} 1 & \text{si } p_i \in \Gamma^* \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$
  - Probamos $v(\Gamma^*) = 1$
  - Como $\Gamma \subseteq \Gamma^*$ luego $v(\Gamma) = 1$

Completitud para Predicados

- $\Gamma \models \varphi \Rightarrow \Gamma \vdash \varphi$
  - $\Gamma \models \varphi \Leftrightarrow (\forall M : M \models \Gamma : M \models \varphi)$
  - $\Gamma \vdash \varphi \Leftrightarrow (\exists D : D \in Der_p : H(D) \subseteq \Gamma$ y $C(D)=\varphi)$
- El lema básico en esto es:
  - Γ consistente $\Rightarrow$ existe $\mathcal{M}$ tal que $\mathcal{M} \models \Gamma$
  - Para demostrarlo se construye un modelo.
  - Para construir el modelo se necesita trabajar sobre una teoría Consistente Maximal que incluya a Γ

Completitud para PROP

1. Γ consistente $\Rightarrow$ existe Γ^* consistente maximal tal que $\Gamma \subseteq \Gamma^*$
2. Γ consistente $\Rightarrow$ existe v tal que $v(\Gamma) = 1$
3. Corolario: $\Gamma \nvdash \varphi \Rightarrow \Gamma \not\models \varphi$
4. Teorema de Completitud: $\Gamma \models \varphi \Rightarrow \Gamma \vdash \varphi$

Completitud para Predicados

1. T teoria consistente $\Rightarrow$ existe Tm consistente maximal tal que $T \subseteq Tm$ (extension conservativa)

2. Γ consistente $\Rightarrow$ existe $\mathcal{M}$ tal que $\mathcal{M} \models \Gamma$

3. Corolario: $\Gamma \nvdash \varphi \Rightarrow \Gamma \nvDash \varphi$

4. Teorema de Completitud: $\Gamma \models \varphi \Rightarrow \Gamma \vdash \varphi$

Teorías

<u>Notación</u>: $\mathrm{Cons}(\Gamma) = \{ \varphi \mid \Gamma \vdash \varphi \}$

<u>Def</u> 3.1.2 [teoria, conjunto de axiomas]

- Un conjunto $T \subseteq$ SENT es una teoría si es cerrado bajo derivación (es decir, $T \vdash \varphi \Rightarrow \varphi \in T$)
- Dada una teoría T, decimos que Γ es un conjunto de axiomas para T si $T = \mathrm{Cons}(\Gamma)$

<u>Def</u> 3.1.3 [extensión, extensión conservativa]

Sean T una teoría en el lenguaje L y T' una teoría en L'.

- T' es una extensión de T si $T \subseteq T'$
- T' es una extensión conservativa de T si $T' \cap L = T$

Teorías de Henkin

Def 3.1.2 (iii) [teoría de Henkin]

- Una teoría T es de Henkin si para toda sentencia $\exists x\varphi \in$ SENT existe un símbolo de constante *c* tal que $\exists x\varphi \rightarrow \varphi[c/x] \in T$. *c* se llama testigo de $\exists x\varphi$.

Lema 3.1.8 [ser de Henkin se preserva en extensiones]

- Si T es una teoría de Henkin y T' es una extensión de T, en el mismo lenguaje, entonces T' es de Henkin.
  - Como no se cambia el lenguaje, no aparecen nuevos existenciales, y no preciso incorporar nuevos testigos

Operador *

Def 3.1.4 [L*, T*]

- Sea T una teoría con lenguaje L.
- L* es la extensión de L que se obtiene agregando un símbolo c para cada sentencia $\exists x\ \varphi(x) \in L$.
- $T^* = Cons(T \cup$

  $\{\exists x\varphi(x) \rightarrow \varphi(c) \mid \exists x\varphi(x) \in SENT \text{ con testigo } c\})$

Completitud: Paso 1

- T teoría consistente $\Rightarrow$ existe T_m consistente maximal tal que $T \subseteq T_m$ (extensión conservativa)
  - T* conservativa con respecto a T con idea de ser de Henkin (pero no se sabe si llega a serlo).
  - T_w conservativa con respecto a T y de Henkin
  - T_m De Henkin, Conservativa respecto a T y CM.
- $T \subseteq T^* \subseteq T_w \subseteq T_m$

Teorías de Henkin II

Lema 3.1.5

T* es conservativo con respecto a T ($T^* \cap L = T$).

- La idea es probar que:
  - $\Gamma, \exists x\varphi \rightarrow \varphi[c/x] \mid\!- \psi \Rightarrow T \mid\!- \psi$
- ¡Qué bueno, ya lo probamos!

Teorías de Henkin III

<u>Lema</u> 3.1.6 [T_w]

- Definimos:
  - $T_0 = T$
  - $T_{n+1} = (T_n)^*$
  - $T_w = \cup\ T_n$
- Luego T_w es una teoria de Henkin y es conservativa con respecto a T.

Demostracion

1. Cada T_n es conservativa sobre T
2. T_w es teoria
3. T_w es de Henkin
4. T_w es conservativa sobre T

Demostracion

Induccion **Parte 1**

$T_0 = T$

$T_{n+1} = T_n^*$, que es conservativa sobre T

Ser conservativa sobre T es una equivalencia

Parte 2

T_w |- σ

➔ (Def. |-)

($\underline{\exists}\varphi_1,...\varphi_n \in T_w$:: $\varphi_1,...\varphi_n$ |- σ)

➔ (Def. T_w, y encajonamiento)

($\underline{\exists}$ k, $\varphi_1,...\varphi_n$: $\varphi_1,...\varphi_n \in T_k$: $\varphi_1,...\varphi_n$ |- σ)

➔ (Teoria)

($\underline{\exists}$ k :: $\sigma \in T_k$)

➔ (Def. T_w)

$\sigma \in T_w$.

Parte 3

$\exists x\varphi \in L_w$

➔

($\underline{\exists}$ k :: $\exists x\varphi \in L_k$)

➔

($\underline{\exists}$ k,*c* :: $\exists x\varphi$ -> $\varphi(c) \in T_{k+1}$)

➔

($\underline{\exists}$*c* :: $\exists x\varphi$ -> $\varphi(c) \in T_w$)

Parte 4

$\sigma \in$ L y T_w |- σ

➔

$\sigma \in$ L y ($\underline{\exists}$ k :: T_k |- σ)

➔

$\sigma \in$ L y T |- σ

Un poco de orden (1)

- Un conjunto parcialmente ordenado (poset) es una estructura (U, ≤) tal que
  - ($\underline{\forall}$ a :: a ≤ a)
  - ($\underline{\forall}$ a, b : a ≤ b, b ≤ a : a = b)
  - ($\underline{\forall}$ a, b, c : a ≤ b, b ≤ c : a ≤ c)
  - por ejemplo, (Pot (Nat), $\subseteq$)
- Un subconjunto C $\subseteq$ U es una cadena si
  - C ≠ ∅ y ($\underline{\forall}$ a, b :: a ≤ b ó b ≤ a)
  - por ejemplo, {{}, {1}, {1,2}, {1,2,3}}

Un poco de orden (2)

- Un elemento a $\in$ U es una cota superior de C $\subseteq$ U si
  - $(\underline{\forall}\ c \in C :: c \leq a)$
  - por ejemplo, {1,2,3,4,5} es cota superior de {{}, {1}, {1,2}, {1,2,3}}
  - la union tambien es una cota superior
- Un elemento m $\in$ U es maximal si
  - $(\underline{\forall}\ a \in U : m \leq a : a = m)$
  - por ejemplo, Nat

Un poco de orden (3)

- Lema de Zorn
  - ***Sea*** U un poset. ***Luego***,
  - ***si*** toda cadena de U tiene una cota superior en U
  - ***entonces*** U tiene un elemento maximal.

Completitud: Parte I (cont.)

Lema 3.1.7 [Lindenbaum]

- **Si T es una teoría consistente, entonces existe Tm consistente maximal tal que T $\subseteq$ Tm**

1. Sea A := {T' : T' es extension consistente de T}
2. Toda cadena $\{T_i : i \in I\}$ tiene una cota superior: $\cup \{T_i : i \in I\}$
3. Existe una extension consistente maximal que llamamos T_m (Lema de Zorn)

¿Qué tenemos hasta ahora?

- Partimos de Γ consistente.
- Tomamos T = Cons(Γ), que también es consistente
- Definimos T_w que es una extensión conservativa (luego consistente) de T y es de Henkin (lema 3.1.6)
- T_w puede extenderse a una teoría maximal T_m (lema 3.1.7)
- T_m es de Henkin (lema 3.1.8: no cambiamos el lenguaje) y también una extensión conservativa maximal de T

Completitud: Paso 2

<u>Lema</u> 3.1.1 [consistencia $\Rightarrow$ existencia de modelo]

Si Γ es consistente,

entonces existe $\mathcal{M}$ tal que $\mathcal{M} \models \Gamma$

- <u>Esquema de la prueba:</u>
  - Sea T= Cons(Γ)
  - Consideramos T_m una teoría de Henkin tal que es extensión consistente maximal de T_w.
  - (L_m es el lenguaje de T_m)
  - Construimos un modelo.

Construcción del modelo sintáctico

- A := { $t \in Lm$ | t es cerrado}
- Para cada símbolo de constante $\underline{c} \in Lm$ se define la constante c^ :=$\underline{c}$
- Para cada símbolo de función n-ario $f \in Lm$ se define la función f^: $A^n \to A$ como: $f\hat{}(t_1..t_n) = f(t_1,..t_n)$
- Para cada símbolo de predicado p-ario $P \in Lm$ se define la relación $P\hat{} \subseteq A^p$ como

$$P\hat{} = \{ <t_1..t_n> \mid T_m \vdash P(t_1\ldots t_p) \}$$

- $\sim := \{ (t,s) \in A^2 \mid T_m \vdash t =' s \}$

  ~ es de equivalencia ([t] denota la clase de t)

Construcción del modelo sintáctico (II)

- Se construye M :

$\mathcal{M} = \langle A/\sim, \tilde{P}_1 \ldots \tilde{P}_n, \tilde{f}_1, \ldots \tilde{f}_m, \{c_i \mid i \in I\} \rangle$ **(modelo sintáctico)**

$\tilde{c}_i := [c_i\hat{}]$

$\tilde{f}_j ([t_1], .. [t_{aj}]) = [f_j\hat{} (t_1, \ldots t_{aj})]$

$\tilde{P}_i := \{ \langle [t_1], \ldots [t_{ri}] \rangle \mid \langle t_1 \ldots t_{ri} \rangle \in P_i\hat{} \}$

está bien definido pues =´ es una conguencia!

Se prueba : $(\underline{\forall}\ \varphi \in T_m :: \mathcal{M} \models \varphi)$. O sea, $\mathcal{M} \models T_m$

Modelos y Teorías

<u>Def</u> [Mod]

$Mod(\Gamma) = \{\mathcal{M} \mid \mathcal{M} \models \alpha$ para toda $\alpha \in \Gamma\}$

también escribimos $\mathcal{M} \models \Gamma$ por $\mathcal{M} \in Mod(\Gamma)$

Sea $\mathcal{K}$ una clase de estructuras para un tipo de similaridad:

<u>Def</u> [Th]

$Th(\mathcal{K}) = \{\alpha \mid \mathcal{M} \models \alpha$ para todo $\mathcal{M} \in \mathcal{K}\}$

<u>Propiedades</u>:

- $\Gamma \subseteq Th(Mod(\Gamma))$
- $\mathcal{K} \subseteq Mod(Th(\mathcal{K}))$
- $Cons(\Gamma) = Th(Mod(\Gamma))$

Fin

Prueba para Predicados

- T teoría consistente $\Rightarrow$ existe Tm consistente maximal tal que $T \subseteq Tm$ (extensión conservativa)

Aplica el lema de Zorn para obtener Tm
(El lenguaje puede no ser numerable debido a los símbolos de constante a)

- Γ consistente $\Rightarrow$ existe $\mathcal{M}$ tal que $\mathcal{M} \models \Gamma$

(1) Definimos $\_^*$

(2) $T_0 = Cons(\Gamma)$
$T_{n+1} = (T_n)^*$
$Tw = \cup\, T_n$

(3) $\left.\begin{array}{l} Tm \text{ CM} \\ Tw \subseteq Tm \end{array}\right\} \Rightarrow$ Tm es de Henkin

(i) Tomamos Tm CM tal que $\Gamma \subseteq T \subseteq Tw \subseteq Tm$ (donde $T=Cons(\Gamma)$)
(ii) Definimos la estructura $\mathcal{M}$ (se utiliza la definición de Tm)
(iii) Probamos $\mathcal{M} \models Tm$

Como $\Gamma \subseteq Tm$ luego $\mathcal{M} \models \Gamma$