INDUCCIÓN

Inducción - Plan

- Conjuntos Inductivos
  - Inducción como mecanismo primitivo para definir conjuntos
- Pruebas Inductivas
  - Principios de inducción asociados a los conjuntos inductivos como mecanismo de prueba
- Definiciones Recursivas
  - Esquemas de recursión primitiva como mecanismo de definición de funciones sobre conjuntos inductivos
  - Esquema de recursión general

1. Conjuntos Inductivos

Formas de Definir Conjuntos

- Hay dos formas típicas de definir conjuntos:
  - **Por extensión**, o sea dando cada uno de los elementos del conjunto.
    - Ej: A = {0, 2, 4}
  - **Por comprensión**, o sea, dando una condición que deben cumplir los elementos del conjunto.
    - Ej: B = { x | x es par y x < 5 }
- Cada forma tiene sus aplicaciones.

Definición Inductiva de Conjuntos

- La idea de la **Definición Inductiva de Conjuntos** es:
  - Agregar ciertos elementos individuales en el conjunto.
  - Construir nuevos elementos del conjunto combinando los elementos agregados anteriormente.
- Las definiciones suelen escribirse como reglas que debe cumplir el conjunto que se está definiendo.

Definición Inductiva de Conjuntos

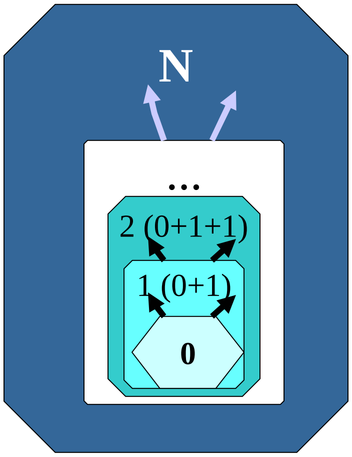
- Cómo definir los Naturales?
  - Dando una regla que diga que 0 es un natural.
  - Dando otra regla que diga que si tenemos un natural n, se puede construir otro natural aplicando el operador sucesor (o sumando 1).
- Definición Inductiva de los naturales.
  - $0 \in N$.
  - *Si* $n \in N$, *entonces* $n+1 \in N$.

Diferentes Visiones de las Definiciones Inductivas

- Visión Constructiva:
  - Las reglas describen un proceso que permite construir los elementos de un conjunto a partir de otros elementos que ya están en el conjunto.
- Visión Declarativa:
  - Las reglas describen directamente un conjunto determinado de todos aquellos que cumplen con las reglas.

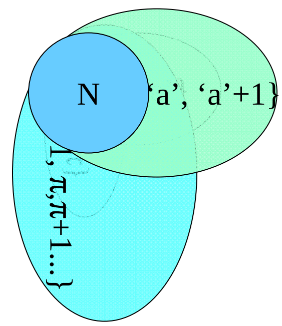
Visión Constructiva de una Definición Inductiva.

- Dado un conjunto inicial B
- Se aplican las reglas y se agranda B usando los elementos del conjunto.
- El conjunto que se define es el de todos los elementos que se pueden construir con la reglas.
- El conjunto resultante, cumple con las reglas dadas.



Visión Declarativa de las Definiciones Inductivas

- Dadas algunas reglas, hay varios conjuntos que cumplen con todas ellas.
- Cuál de todos esos es el que se está definiendo?
- Se define el ***mínimo*** conjunto que cumple con las reglas.
- O lo que es lo mismo la intersección de todos los conjuntos que cumplen con las reglas.



Significado de una definición inductiva

- Cuando damos una definición inductiva de un conjunto :
  1. Definimos un conjunto.
  2. Definimos una manera de recorrer (construir) sus elementos.
  3. Todos los elementos del conjunto se recorren con las reglas dadas.
  4. El orden al aplicar las reglas es relevante, dado que un orden distinto puede dar (y en general lo hace) elementos distintos.

Ejemplo: los pares P

- Consideremos las siguientes reglas:
  - $0 \in P$
  - $n+2 \in P$, si $n \in P$
- Queda definido inductivamente el conjunto de los pares P
  - $P = \{0,2,4,6,8,...\}$
- El conjunto base es el conjunto $\{0\}$.

Ejemplo': los pares P'

- Consideremos las siguientes reglas:
  - $0 \in P'$
  - $2 \in P'$
  - $n+4 \in P'$, si $n \in P'$
- Queda definido inductivamente el conjunto de los pares P'.
- El conjunto base es $\{0,2\}$

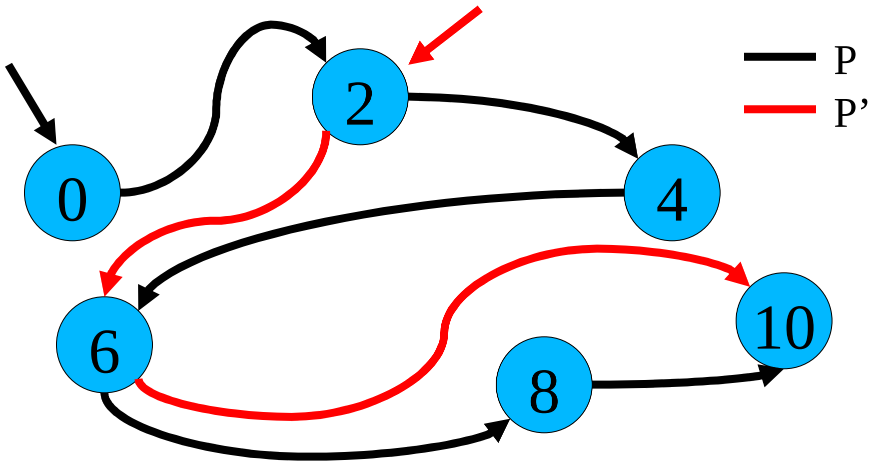
Pares: P versus P’

- Con respecto al significado de las definiciones:
  - Definimos dos conjuntos P y P’.
  - Pero sus definiciones inductivas son distintas, porque las formas de recorrer son diferentes.
  - Todos los elementos de los dos conjuntos son los generados exclusivamente por las reglas y son los mismos.

P versus P’

- Cómo se demuestra que 10 es par en términos de los conjuntos que manejamos?
  - Se construye el 10 de P.
  - Se construye el 10 de P’

P versus P’



Tiempo y/o Tamaño

- ¿Cuántas aplicaciones de reglas (qué tamaño) tiene el 10?
  - En P: 0, 2, 4, 6, 8, 10
  - En P’: 2, 6, 10
- Distintas definiciones inductivas llevan a funciones con distinta complejidad.
- El tamaño de un objeto puede ser distinto en función de reglas distintas para definir el conjunto.
- Un elemento complejo, siempre se compone de elementos más chicos o menos complejos.

Resumen: Definición inductiva de un conjunto

- Se define inductivamente el conjunto como el menor conjunto que cumple con las reglas.
- En el caso de los pares:
  1. 0 esta en P
  2. Si n esta en P, entonces n + 2 tambien lo esta
- También se puede ver como reglas de construcción de los elementos del conjunto y por lo tanto del propio conjunto.

Ejemplos Numéricos

- Naturales:
  - $0 \in N$
  - $n+1 \in N$, si $n \in N$
- Pares
  - $0 \in P$
  - $n + 2 \in P$, si $n \in P$
- Impares
  - $1 \in I$
  - $n+2 \in I$, si $n \in I$

Observar que:
• En las reglas inductivas, las metavariables (***n*** en este caso) siempre representan elementos que necesitan menos reglas para su construcción.

Lenguajes

- Se llama **Lenguaje** a un conjunto de frases o palabras (tiras, secuencias, strings, ...) construidas sobre un conjunto dado de símbolos.
- Ese conjunto de símbolos se le llama **Alfabeto** del lenguaje.
- Hay lenguajes que se pueden definir inductivamente y tratar como conjuntos inductivos.

Ejemplo: {a,b}*

- Sea {a,b} un conjunto de símbolos (alfabeto)
- {a,b}* es el conjunto de todas las posibles secuencias formadas con los símbolos a y b
- {a,b}* se define inductivamente por las siguientes cláusulas:
  i. $\varepsilon \in \{a,b\}^*$ (palabra vacía)
  ii. Si $w \in \{a,b\}^*$ entonces $aw \in \{a,b\}^*$
  iii. Si $w \in \{a,b\}^*$ entonces $bw \in \{a,b\}^*$
- Observar que ε es una palabra y no un símbolo del alfabeto!

Ejemplo: Σ^*

- Para un alfabeto Σ cualquiera, Σ^* es el conjunto de todas las palabras (secuencias de símbolos) formadas con elementos de Σ.
- Σ^* se define inductivamente por las cláusulas:

i. $\varepsilon \in \Sigma^*$ (palabra vacía)

ii. Si $w \in \Sigma^*$ y $x \in \Sigma$ entonces $xw \in \Sigma^*$

Ejemplo : Lenguajes específicos

- $L_1 \subseteq \{a,b\}^*$ definido inductivamente por:

i. $a \in L_1$

ii. si $w \in L_1$ entonces $bwb \in L_1$

– Es el conjunto de las tiras que tienen una sóla 'a' y la misma cantidad de 'b' antes y después de la 'a'.

- $L_2 \subseteq \{a,b,c\}^*$ definido inductivamente por:

i. $b \in L_2$

ii. Si $w \in L_2$ entonces $awc \in L_2$

Pertenencia a un conjunto inductivo

- Para probar que un objeto pertenece a un conjunto inductivo basta con mostrar cómo lo formamos (su *secuencia de formación* está dada por las cláusulas utilizadas)
- Ejemplo: bbabb $\in$ L1 porque:
  - a $\in$ L1 por i)
  - luego bab $\in$ L_1 por ii)
  - y finalmente bbabb $\in$ L1 por ii)

2. Pruebas Inductivas

Formas de Probar Propiedades de Conjuntos

- Hay dos formas típicas de definir conjuntos:
  - Por extensión
  - Por comprensión
- Cada forma induce una forma de probar propiedades sobre el conjunto:
  - Por extensión
    - Se prueba que cada uno de los elementos del conjunto cumple la propiedad.
  - Por comprensión
    - Se prueba que los elementos que cumplen con la definición del conjunto cumplen la propiedad.

Principios de Inducción

- Sabemos exactamente cómo se construyen los elementos de un conjunto inductivo
  - Podemos usar esta información para probar propiedades de ellos.
- Ejemplo: todos los elementos de L_1 tienen una cantidad impar de símbolos.
- Una prueba que aprovecha el conocimiento de cómo se generan los objetos de L_1 sería de la forma:
  i. a tiene una cantidad impar de símbolos
  ii. Si w tiene una cantidad impar de símbolos, entonces bwb también

Principio de Inducción Primitiva para N

- **N** definido inductivamente por:
  i. $0 \in N$
  ii. Si $n \in N$ entonces $S(n) \in N$
- <u>Principio de Inducción Primitiva para **N**</u>
  – Sea **P** una propiedad sobre los elementos de **N** que cumple lo siguiente:
    i. P(0) se cumple
    ii. Si P(n) se cumple, entonces P(S(n)) se cumple
  – Entonces, **P** se cumple para todos los elementos de **N**

Principio de Inducción Primitiva para N

H) Sea **P** una propiedad sobre los elementos de **N** que cumple lo siguiente:
  i. P(0) se cumple
  ii. Si P(n) se cumple, entonces P(S(n)) se cumple

T) P(n) se cumple para cualquier $n \in N$

Dem.
– Considere el conjunto $X = \{x \mid x \in N \text{ y } P(x)\}$
– Por hip., P cumple i y ii lo que significa que X cumple las reglas que definen a los naturales.
– Como los naturales son el **mínimo** conjunto que cumple con esas reglas entonces $N \subseteq X$.
– Entonces todos los naturales cumplen P porque están en X.

♦

Aplicación del Principio de Inducción

- Para aplicar el principio de inducción, se debe probar que la propiedad a demostrar está en las hipótesis del Principio, por lo tanto, la propiedad se cumple para todos los elementos del conjunto
- Ej: Probar que para todo $n \in N$, $\Sigma_{0<=k<=n}\ k = n.(n+1)/\ 2$
  - Para probar eso, hay que probar que:
    - $\Sigma_{0<=k<=0}\ k=0.(0+1)/2$
    - si $\Sigma_{0<=k<=n}\ k=n.(n+1)/2$, entonces $\Sigma_{0<=k<=n}\ k=(n+1).(n+2)/2$
  - Y luego aplicando el p.i.p., concluir que todo $n \in N$ lo cumple.

Principio de Inducción Primitiva para un Conjunto Inductivo

- Sea A un conjunto definido inductivamente
- Para probar que una propiedad se cumple para todos los objetos de A alcanza con:
  - Probar que la propiedad se cumple para los objetos de A obtenidos de aplicar cláusulas base
  - Probar que la propiedad se cumple para los objetos de A obtenidos de aplicar cláusulas inductivas, suponiendo que la misma se cumple para el (los) objeto(s) anterior(es) (*hipótesis inductiva*)

Principio de Inducción Primitiva para Σ*

- Sea P una propiedad sobre los objetos de Σ* que cumple lo siguiente:
  i. P(ε) se cumple
  ii. Si P(w) se cumple, entonces para todo $x \in \Sigma$, P(xw) se cumple
- Entonces, P se cumple para todos los elementos de Σ*

Principio de Inducción Primitiva para L_1

- Sea P una propiedad sobre los objetos de L_1 que cumple lo siguiente:
  i. P(a) se cumple
  ii. Si P(w) se cumple, entonces P(bwb) se cumple
- Entonces, P se cumple para todos los elementos de L_1
- Aplicaciones
  – Probar que todos los elementos de L_1 tienen una cantidad impar de símbolos
  – Probar que todos los elementos de L_1 son palíndromos