3. Definiciones Recursivas

Recursión

- Dado un conjunto inductivo, sabemos exactamente cómo se construyen sus elementos.
- Esta información sirve para:
  - Probar propiedades de sus elementos (inducción)✓
  - Definir funciones sobre sus elementos (*recursión*)

Qué es una función?

- Una función es una relación que:
  - Asocia **efectivamente** un único elemento del codominio a cada elemento del dominio.
- Una función es un mecanismo de cómputo tal que:
  - Cada vez que se le da un valor del dominio como entrada devuelve **efectivamente** el mismo valor del codominio.
- "Efectivamente" significa:
  - Para cualquier elemento del dominio hay una imagen.
    - El cómputo termina para cualquier elemento del dominio.
  - Ningún elemento del dominio tienen más de una imagen.

Recursión

- Ejemplo: definir una función *f* que calcula la cantidad de símbolos de una palabra de {a,b}*
- Para asegurarse de cubrir todo el dominio se puede explotar conocimiento de cómo se generan los objetos de {a,b}*:
  - *i.* $f(\varepsilon)=0$
  - *ii.* $f(aw)= 1+ f(w)$
  - *iii.* $f(bw) = 1+ f(w)$

Es fácil definir No Funciones.

- Dado Z definido inductivamente como:
  - $0 \in Z$
  - $n + 1 \in Z$
  - $n - 1 \in Z$
- $f: Z \rightarrow N$
  - $f(0)=0$
  - $f(n+1)=f(n)+1$
  - $f(n-1)=f(n)+1$

Tiene más de un valor

- Cuánto vale f(1)?
  - $f(0)=0$
  - $f(n+1)=f(n+2)$
  - $f(n-1)=f(n-2)$

Calcular f(1) necesita f(2),f(3),…
Nunca se termina de calcular.

Conclusión:
Conviene seguir un esquema de definición que garantice que se define una función.

Esquema de Recursión Primitiva para N

- N definido inductivamente por:
  i. $0 \in N$
  ii. Si $n \in N$ entonces $S(n) \in N$
- Esquema de Recursión Primitiva para N (informal)
  - Sea B un conjunto cualquiera.
  - Entonces un conjunto de ecuaciones como sigue basta para definir una única función $F: N \rightarrow B$
    i. $F(0) = ...$
    ii. $F(S(n)) = ..F(n)..n..$

Aplicación del Esquema de Recursión

- Esquema de recursión primitiva para N:
  - Método que se aplica para definir funciones sobre objetos de N
  - Usa el conocimiento de cómo se generan los objetos de N
  - Justificación: Recordar que al dar una definición inductiva decimos que la única forma de construir los objetos del conjunto es mediante las cláusulas dadas
- Aplicaciones:
  - Definir + ; x ; $\Sigma_{1 \leq k \leq n}$ k ; k^n, para k,n $\in$ N ; *fact* : N $\rightarrow$ N

Esquema de Recursión Primitiva para un Conjunto Inductivo

- Sea A un conjunto definido inductivamente
- Para definir una función f :A$\rightarrow$B, alcanza con definir a f mediante ecuaciones que determinen:
  - El valor de f para los objetos de A obtenidos de aplicar cláusulas base
  - El valor de f para los objetos de A obtenidos de aplicar cláusulas inductivas, utilizando el valor de f en el (los) objeto(s) anterior(es) y también el (los) objeto(s) anterior(es) (*llamadas recursivas)*

Esquema de Recursión Primitiva para Σ^*

- Sea B un conjunto arbitrario.
- Entonces un conjunto de ecuaciones como sigue basta para definir una única función F: $\Sigma^* \rightarrow B$
  i. $F(\varepsilon) = ...$
  ii. $F(xw) = ..F(w)..w..x..$
- **Aplicaciones**:
  - Definir longitud: $\Sigma^* \rightarrow N$; inversa: $\Sigma^* \rightarrow \Sigma^*$; palindromo: $\Sigma^* \rightarrow$ Bool ; espejo: $\Sigma^* \rightarrow \Sigma^*$.....

Esquema de Recursión Primitiva para L1

- Sea B un conjunto arbitrario.
- Entonces un conjunto de ecuaciones como sigue basta para definir una única función F: $L1 \rightarrow B$
  i. $F(a) = ...$
  ii. $F(bwb) = ..F(w)..w..$

Esquema de Recursión Primitiva para N -Formalización-

- **H) Sea B un conjunto y sean**
  - $f_0 \in B$
  - $f_s: N \times B \rightarrow B$
- **T) Entonces existe una única función F: N $\rightarrow$B tal que:**
  i. $F(0) = f_0$
  ii. $F(S(n)) = f_s(n,F(n))$

Esquema de Recursión Primitiva -Formalización-

Ejemplo:

fact(0) = 1	$f_0 = 1$ ($\in$ B)
fact(S(n)) = S(n) x fact(n)	$f_s(n,r)$ = S(n) x r (N x B$\rightarrow$B)

Esquema de Recursión Primitiva -Formalización-

Esquema de Recursión Primitiva para Σ^*

Sea B un conjunto y sean

- $f_\varepsilon \in B$
- $f_1: \Sigma \times \Sigma^* \times B \rightarrow B$

Entonces existe una única función $F: \Sigma^* \rightarrow B$ tal que:

i. $F(\varepsilon) = f\,\varepsilon$

ii. $F(xw) = f_1(x,w,F(w))$

Ejemplo:

espejo(ε) = ε	$f_\varepsilon = 1 \ (\in \Sigma^*)$
espejo(xw) = x espejo(w) x	$f_1(x,w,r) = xrx \ (\Sigma \times \Sigma^* \times \Sigma^* \rightarrow \Sigma^*)$

Otros Esquemas de Recursión

- Dado A definido inductivamente. Para definir ***f*** :A→B se debe:
  - definir ***f*** para los objetos base de A
  - definir ***f*** en los objetos obtenidos de aplicar cláusulas inductivas usando el valor de ***f*** en el objeto **inmediatamente anterior**

(recursión primitiva)

- Se puede cambiar el segundo punto y poner:
  - definir ***f*** en los objetos obtenidos de aplicar cláusulas inductivas usando el valor de ***f*** objetos **anteriores**

Ejemplo de Recursión no Primitiva en N

fib : $\mathbf{N} \rightarrow \mathbf{N}$

fib (0) = 1

fib (1) = 1

fib (n+2) = fib(n) + fib(n+1)

- Para que estas ecuaciones ***definan una función*** hay que probar que:
  - son ***exahustivas***
  - no hay ***superposición*** de casos
  - la definición ***termina***

Ejemplo de Recursión no Primitiva en N

fib : $\mathbf{N} \rightarrow \mathbf{N}$

fib (0) = 1

fib (1) = 1

fib (n+2) = fib(n) + fib(n+1)

Exhaustividad: ver que todo natural es 0, 1 o de la forma n+2

Superposición: ver que $0 \neq 1 \neq n+2$

Terminación: 1) ver que para todo $n \in N$:

$$n < n+2 \quad \text{y} \quad n + 1 < n+2$$

2) en **N** toda cadena decreciente según la relación < tiene mínimo (el orden < de **N** es ***bien fundado)***.

Ejemplo de Recursión no Primitiva en N

div : $\mathrm{NxN}^{+} \rightarrow \mathrm{N}$

div$(n, m) = 0$ si $n < m$

div$(n, m) =$ ***div***$(n-m, m)+1$ si $m \leq n$

- Exhaustividad: ver que para todos $n, m \in \mathrm{N}$ se cumple que $n < m$ o $m \leq n$.
- Superposición: ver que para todos $n, m \in \mathrm{N}$ no puede pasar que $n < m$ y $m \leq n$.
- Terminación: ver que para todos $n, m \in \mathrm{N}$, si $0 < m \leq n$ entonces $n-m < n$ y ver que $<$ es bien fundado en **N**

Definición inductiva de NxN

i. $(0,0) \in$ **NxN**

ii. Si $(n,0) \in$ **NxN** entonces $(n+1,0) \in$ **NxN**

iii. Si $(n, m) \in$ **NxN** entonces $(n,m+1) \in$ **NxN**

- **Principio de inducción primitiva para NxN**
- Sea P una propiedad que cumple:
  - P(0,0)
  - Si P$(n,0)$ entonces P$(n+1,0)$
  - Si P(n, m) entonces P$(n,m+1)$
- Entonces, P(n,m) para todo $(n, m) \in$ **NxN**

Esquema de Recursión Primitiva para NxN

- Sea B un conjunto y H_0 , H_1 y H_2 tales que:
  - $H_0 \in$ **B**
  - H_1 : **N** x **B** $\rightarrow$ **B**
  - $H_{2,}$: **N**x**N** x **B** $\rightarrow$ **B**
- Entonces existe una única función ***f*** : **N**x**N** $\rightarrow$ **B** tal que:
  - ***f*** (0,0) = H_0
  - ***f*** (n+1,0) = H_1(n, ***f*** (n,0))
  - ***f*** (n,m+1) = H_2(n, m, ***f*** (n,m))

Ejemplo: ***prod*** : NxN$\rightarrow$N (el producto de dos números Naturales)

Ejemplos de Recursión no Primitiva en NxN

mcd : $N^+xN^+ \rightarrow N^+$

mcd(n, m) = n si $n = m$

mcd(n, m) = ***mcd*** (n,m-n) si $n < m$

mcd(n, m) = ***mcd***(n-m, m) si $m < n$

Exhaustividad: ???
Superposición: ???
Terminación: ??

EJERCICIO!!!

Más ejemplos de Recursión en NxN

suma : **NxN→N**

suma$(n, 0) = n$

suma $(n, m+1) =$ ***suma*** $(n, m) + 1$

¿Corrección?

resta : **NxN→N**

resta $(0, n) = 0$

resta $(n+1, 0) = n + 1$

resta $(n+1, m+1) =$ ***???***

¿Corrección?

Definiciones Inductivas Libres

- Definimos **Z** inductivamente con las siguientes cláusulas:
  - i. $0 \in \mathbf{Z}$
  - ii. si $x \in \mathbf{Z}$ entonces $x+1 \in \mathbf{Z}$
  - iii. si $x \in \mathbf{Z}$ entonces $x-1 \in \mathbf{Z}$
- ¿Cómo justificar que $3 \in \mathbf{Z}$?
  - $0 \rightarrow^{ii} 1 \rightarrow^{ii} 2 \rightarrow^{ii} 3$
  - $0 \rightarrow^{iii} -1 \rightarrow^{iii} -2 \rightarrow^{ii} -1 \rightarrow^{ii} 0 \rightarrow^{ii} 1 \rightarrow^{ii} 2 \rightarrow^{ii} 3$
  - $0 \rightarrow^{ii} 1 \rightarrow^{ii} 2 \rightarrow^{ii} 3 \rightarrow^{ii} 4 \rightarrow^{ii} 5 \rightarrow^{iii} 4 \rightarrow^{iii} 3$

Definiciones Inductivas Libres (cont.)

Definición: [definición inductiva libre]

Una definición inductiva de un conjunto es ***libre*** cuando cada elemento del conjunto admite una sola secuencia de formación.

Las definiciones que no son libres traen problemas para definir funciones usando esquemas de recursión

Ejemplo: $f : \mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{Z}$ definida por

$$f(0) = 1$$
$$f(n+1) = 2 + f(n)$$
$$f(n-1) = 3 + f(n)$$

¿Cuánto vale $f(3)$?

Definiciones no Libres: moraleja

- Las definiciones inductivas no libres son problemáticas para definir funciones usando el esquema de recursión primitiva.
  - Igual se pueden usar, pero hay que verificar que se está definiendo **una función (**o sea, un **único resultado** para cada elemento del conjunto)
- No hay problemas con el principio de inducción (salvo que probamos más de una vez la misma cosa)

Definiciones Recursivas: moraleja

- Sea A un conjunto definido inductivamente
  - Si la definición de A es ***libre*** entonces se puede aplicar el *esquema de recursión primitiva* sin problemas
  - Si se quieren ***usar otros esquemas*** entonces hay que probar ***exhaustividad, no superposición y terminación***
  - Si la definición de A ***no es libre***, no alcanza el esquema de recursión, dado que **hay** superposición. Hay que probar ***unicidad de la definición*** (los casos repetidos dan el mismo resultado)