

---

# Lógica Proposicional

## Semántica

## Significado de una Fórmula Proposicional

---

- El significado de una proposición está dado por su *valor de verdad* (o sea, si es Verdadera o Falsa) que se obtiene de la siguiente forma:
  - las variables proposicionales pueden tomar cualquier valor de verdad
  - $\perp$  es falsa
  - los valores de verdad de las fórmulas atómicas se extienden a las fórmulas no atómicas de acuerdo al significado de los conectivos que contienen.

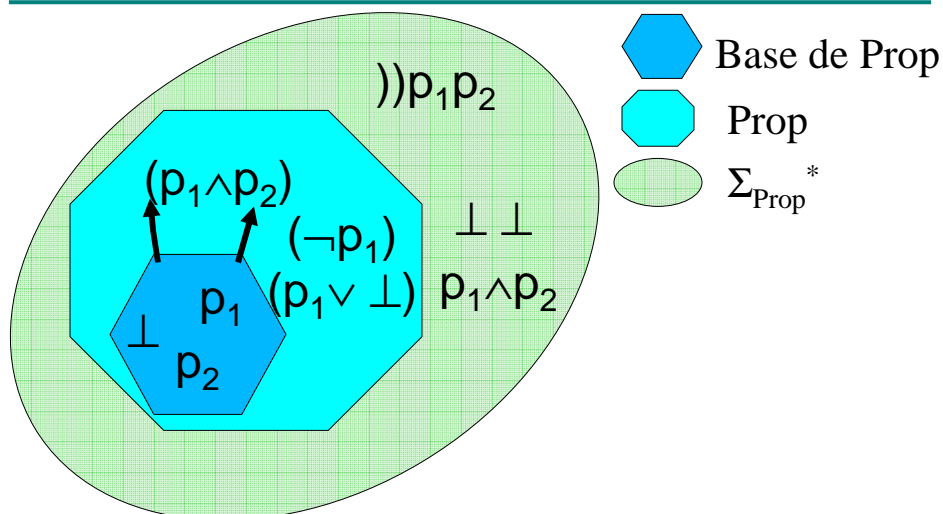
### Convención:

- 0 = Falso      1 = Verdadero

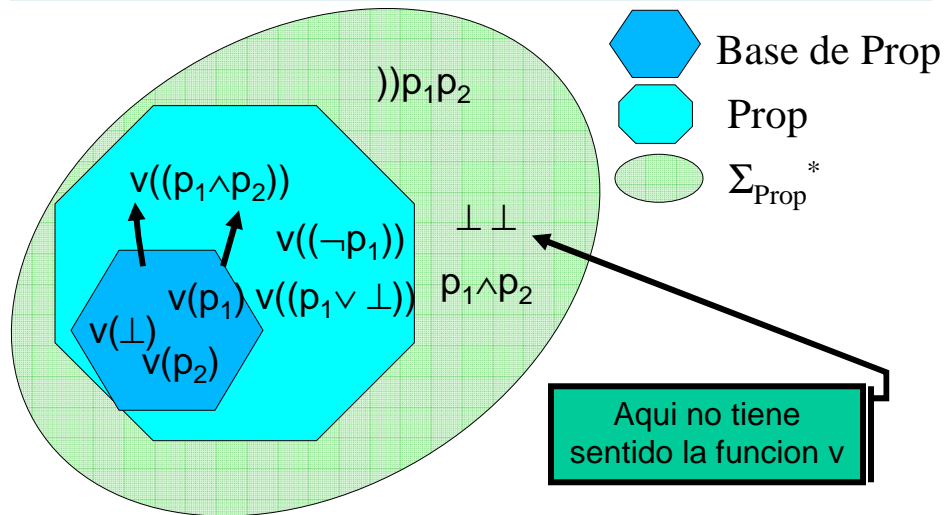
## Las palabras de PROP

- Las proposiciones atómicas tienen un valor de verdad conocido.
- Se abstraen las proposiciones simples a letras.
- La frase “Los perros comen salchichas con tuco” colapsa a, por ejemplo,  $p_0$ .
- Y si esa frase es verdad en un mundo  $v$ , diremos que  $v(p_0) = 1$ . Y si es falsa, diremos que  $v(p_0) = 0$ .

## Construyendo PROP



## Calculando Valores de Verdad



Instituto de Computación

Lógica

Semántica Proposicional - 5

## Semántica de Prop: Valuaciones

- Resumiendo:
  - Prop está definido inductivamente.
  - La semántica está dada por los valores de verdad de las proposiciones ya sean simples o complejas.
  - Se buscará la forma de construir esa semántica teniendo en cuenta que:
    - Las letras proposicionales pueden tomar cualquier valor.
    - El valor de las letras proposicionales se “transmite”, lo que permite calcular el valor de las proposiciones complejas en función del valor de las proposiciones más simples.

Instituto de Computación

Lógica

Semántica Proposicional - 6

## Significado de algunos conectivos

---

- El dos es par **o** impar
- El dos es par **o** natural
  - Ambas frases son verdaderas
- **Si** n es múltiplo de 6, **entonces** 4 es par
- **Si** 4 es impar, **entonces** 3 es par
  - Son frases verdaderas
- **Si** ustedes estudian, **entonces** aprobarán la asignatura
  - Cuando es falsa esta frase?

## Significado de los conectivos

---

$\wedge$	0	1
0	0	0
1	0	1

$\vee$	0	1
0	0	1
1	1	1

$\rightarrow$	0	1
0	1	1
1	0	1

$\leftrightarrow$	0	1
0	1	0
1	0	1

$\neg$	
0	1
1	0

$\perp$
0

## Valuaciones - Ejemplos

- Una valuación es una función de  $PROP \rightarrow \{0,1\}$  transmite valores de verdad a partir de las letras proposicionales.
- No cualquier función de  $PROP \rightarrow \{0,1\}$  es una valuación.
- Ejemplos de funciones no son valuaciones:
  - $f(\alpha) = 1$  para toda  $\alpha \in PROP$
  - $g(\alpha) = (\text{Long}(\alpha)+1) \bmod 2$
- ¿Cómo se construyen funciones que sean valuaciones?
  - Asegurando que el valor de las fórmulas compuestas queda determinado unívocamente por los valores de las variables.

## Valuaciones

### Def 1.2.1 [valuación]

- Una función  $v: PROP \rightarrow \{0,1\}$  es una valuación sii satisface:

- $v(\perp) = 0$
- $v((\alpha \wedge \beta)) = \min\{v(\alpha), v(\beta)\}$
- $v((\alpha \vee \beta)) = \max\{v(\alpha), v(\beta)\}$
- $v((\alpha \rightarrow \beta)) = \max\{1-v(\alpha), v(\beta)\}$
- $v((\alpha \leftrightarrow \beta)) = 1$  ssi  $v(\alpha) = v(\beta)$
- $v((\neg\alpha)) = 1 - v(\alpha)$

Observar que esta **NO ES** la definición de UNA valuación, sino que es una serie de ecuaciones que garantizan la transmisión de la verdad.

## Valuaciones - Propiedades

- El valor de verdad de los átomos determina una única valuación (el valor para cualquier fórmula).

### Teorema 1.2.2

Sea  $w: P \rightarrow \{0,1\}$

Entonces existe una única valuación  $v: \text{PROP} \rightarrow \{0,1\}$   
tal que  $v(p_i) = w(p_i)$  para todo  $p_i \in P$

- El valor de verdad de una fórmula depende únicamente del valor de sus letras de proposición

### Lema 1.2.3

Sea  $\alpha \in \text{PROP}$ , y sean  $v$  y  $v'$  dos valuaciones tales que  
 $v(p_i) = v'(p_i)$  para toda letra  $p_i$  que ocurre en  $\alpha$

Entonces  $v(\alpha) = v'(\alpha)$

## Teo 1.2.2

- H)  $w: P \rightarrow \{0,1\}$
- T) Existe una única valuación  $v: \text{PROP} \rightarrow \{0,1\}$  tal que  $v(p_i) = w(p_i)$  para todo  $p_i \in P$

### ***Dem:***

- Considere una función  $v$  sobre Prop definida por recursión primitiva tal que:
  - $v(p_i) = w(p_i)$  para todo  $p_i \in P$
  - $v$  es una valuación (cumple con Def. 1.2.1).
- Esta función existe y es única dado que fue definida por recursión primitiva. Además es valuación (por su propia definición).

### ***LQOD***

## Tautología – Consecuencia lógica

### Def 1.2.4 [tautología, consecuencia lógica]

- $\alpha \in \text{PROP}$  es una tautología ssi para cualquier valuación  $v$  se cumple que  $v(\alpha) = 1$ .
- Dadas  $\Gamma \subseteq \text{PROP}$  y  $\alpha \in \text{PROP}$ ,  $\alpha$  es consecuencia lógica de  $\Gamma$  ssi para cualquier valuación  $v$ :  
Si (para todo  $\gamma \in \Gamma :: v(\gamma) = 1$ ), entonces  $v(\alpha) = 1$

### Notación:

- $\Gamma \models \alpha$  se lee “ $\alpha$  es consecuencia lógica de  $\Gamma$ ”
- $\gamma_1 \dots \gamma_n \models \alpha$  se lee como  $\{\gamma_1 \dots \gamma_n\} \models \alpha$
- $\models \alpha$  se lee como  $\emptyset \models \alpha$
- $\models \alpha$  se lee como  $\alpha$  es tautología.

## Ejemplos

- $\text{T}) \models \varphi \rightarrow \varphi$

### *Dem.*

- Sea  $v$  valuación arbitraria
- $v(\varphi \rightarrow \varphi) = \max\{1 - v(\varphi), v(\varphi)\}$  (Def. valuación)  
 $= 1$  (El recorrido de la valuación es  $\{0,1\}$ )

### *LQQD*

- $\text{T}) \varphi, \psi \models \varphi \wedge \psi$

### *Dem.*

- Sea  $v$  una valuación tal que  $v(\varphi) = 1$  y  $v(\psi) = 1$ .
- $v(\varphi \wedge \psi) = \min\{v(\varphi), v(\psi)\}$  (Def. valuación)  
 $= 1$  (Hipotesis)

### *LQQD*

## Ejemplos

- Demuestre o de un contraejemplo de  $\models p_0 \rightarrow p_1$

*Dem. (contraejemplo)*

- Sea  $v$  valuación tal que  $v(p_0)=1$  y  $v(p_1)=0$
- $v(p_0 \rightarrow p_1) = \max\{1-v(p_0), v(p_1)\}$  (Def. valuación)  
 $= 0$
- Por lo que **no** es cierto que  $p_0 \rightarrow p_1$  sea tautología.

*LQQD*

- *Cuando se trabaja con implicaciones, puede ser más simple verificar cuando **no** es tautología.*

## Ejemplos

- Demostrar o dar un contraejemplo para  $p_1 \models p_2 \wedge p_3$

*Dem. (contraejemplo)*

- Sea  $v$  valuación tal que  $v(p_1)=1$ ,  $v(p_2)=0$  y  $v(p_3)=0$
- $v(p_2 \wedge p_3) = \min\{v(p_2), v(p_3)\}$  (Def. valuación)  
 $= 0$
- Por lo que **no** es cierto que  $p_1 \models p_2 \wedge p_3$ .

*LQQD*

- *Cuando se trabaja con consecuencias lógicas, puede ser más simple analizar cuando **no** se cumple.*



## Consecuencia lógica – Más Ejemplos

---

Para todas  $\alpha, \beta \in \text{PROP}$ :

$$\alpha, \beta \models \alpha \wedge \beta$$

$$\alpha \models \alpha \vee \beta$$

$$\beta \models \alpha \vee \beta$$

$$\alpha \vee \beta, \neg \alpha \models \beta$$

$$\alpha \vee \beta, \neg \beta \models \alpha$$

$$\alpha, \neg \alpha \models \perp$$

$$\alpha \rightarrow \beta, \neg \beta \models \neg \alpha$$

$$\alpha \leftrightarrow \beta, \alpha \models \beta$$

$$\alpha \leftrightarrow \beta, \neg \alpha \models \neg \beta$$

## Tablas de Verdad

---

- Las Tablas de verdad muestran todos los posibles valores de verdad que una fórmula proposicional puede tomar.
- Describen explícitamente todas las posibles valuaciones *interesantes* (*recordar 1.2.3*) de una fórmula proposicional.

## Ejemplo

Tabla de verdad de  $(p_1 \rightarrow p_2) \wedge (\neg(p_1 \vee p_2))$ :

1	2	3	4	5	6
$p_1$	$p_2$	$(p_1 \rightarrow p_2)$	$(p_1 \vee p_2)$	$\neg(p_1 \vee p_2)$	$(p_1 \rightarrow p_2) \wedge (\neg(p_1 \vee p_2))$
0	0	1	0	1	1
0	1	1	1	0	0
1	0	0	1	0	0
1	1	1	1	0	0

A las fórmulas como esta que son verdaderas en algunas valuaciones y falsa en otras se les llama **CONTINGENCIAS**

## Tautologías

Tabla de verdad de  $(p_1 \vee p_2) \leftrightarrow ((\neg p_1) \rightarrow p_2)$ :

1	2	3	4	5	6
$p_1$	$p_2$	$(p_1 \vee p_2)$	$\neg p_1$	$(\neg p_1) \rightarrow p_2$	$(p_1 \vee p_2) \leftrightarrow ((\neg p_1) \rightarrow p_2)$
0	0	0	1	0	1
0	1	1	1	1	1
1	0	1	0	1	1
1	1	1	0	1	1

Esta proposición es siempre verdadera sin importar el valor de verdad de  $p_1$  y  $p_2$  **tautología**

## Tautologías

Observar:  $\varphi \in \text{PROP}$  es tautología sii  $\models \varphi$

Ejemplos: Para todas  $\alpha, \beta, \gamma \in \text{PROP}$ :

$$\models (\alpha \leftrightarrow \alpha)$$

$$\models (\alpha \vee \beta) \leftrightarrow (\beta \vee \alpha)$$

$$\models (\alpha \leftrightarrow \beta) \leftrightarrow (\beta \leftrightarrow \alpha)$$

$$\models (\alpha \rightarrow \beta) \leftrightarrow ((\neg \alpha) \vee \beta)$$

$$\models (\alpha \vee \alpha) \leftrightarrow \alpha$$

$$\models (\alpha \wedge (\neg \alpha)) \leftrightarrow \perp$$

$$\models (\alpha \vee (\beta \vee \gamma)) \leftrightarrow ((\alpha \vee \beta) \vee \gamma)$$

$$\models (\alpha \wedge (\beta \vee \gamma)) \leftrightarrow ((\alpha \wedge \beta) \vee (\alpha \wedge \gamma))$$

$$\models (\alpha \leftrightarrow (\neg(\neg \alpha)))$$

$$\models (\alpha \wedge \beta) \leftrightarrow (\beta \wedge \alpha)$$

$$\models (\alpha \rightarrow \beta) \leftrightarrow ((\neg \beta) \rightarrow (\neg \alpha))$$

$$\models (\alpha \rightarrow \beta) \leftrightarrow (\neg(\alpha \wedge (\neg \beta)))$$

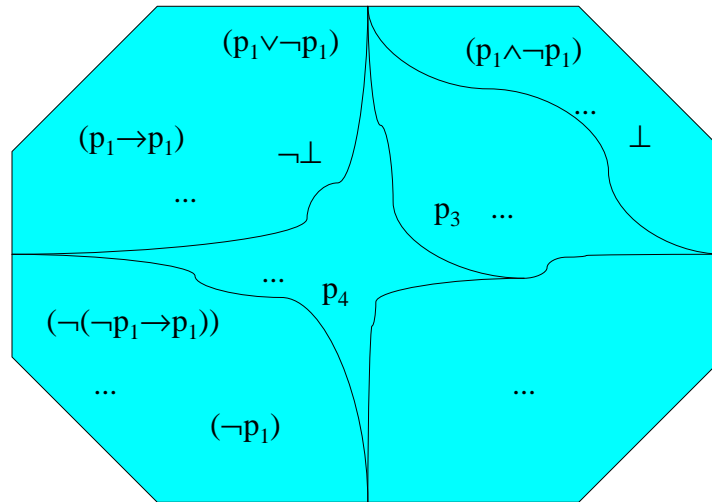
$$\models (\alpha \wedge \alpha) \leftrightarrow \alpha$$

$$\models \perp \rightarrow \alpha$$

## Equivalencia de Proposiciones

- Def [equivalencia de proposiciones]
  - Dos fórmulas proposicionales  $\alpha$  y  $\beta$  son equivalentes sii  $(\alpha \leftrightarrow \beta)$  es una tautología
- Notación:  $\alpha \text{ eq } \beta$  abrevia  $\models (\alpha \leftrightarrow \beta)$
- Observar:  $\alpha \text{ eq } \beta$  si y sólo si,
  - para cualquier valuación  $v: \text{PROP} \rightarrow \{0,1\}$  se cumple que  $v(\alpha) = v(\beta)$
- Lema 1.3.5
  - La relación eq es de equivalencia en  $\text{PROP} \times \text{PROP}$

## Equivalencia de Proposiciones: Clases de Equivalencia



## Sustitución por fórmulas equivalentes

- Si  $\alpha_1$  y  $\alpha_2$  son equivalentes, entonces puedo sustituir una letra proposicional de una fórmula  $\beta$  cualquiera por  $\alpha_1$  y por  $\alpha_2$ , y obtener fórmulas equivalentes
- Esto se utiliza mucho en matemática: no dudamos cuando vemos el siguiente razonamiento:  

$$3 + (2 \times 5) = 3 + 10$$
- **Por qué es válido eso?**
  - Porque sabemos que  $2 \times 5 = 10$
  - y reemplazamos iguales por iguales

esto es, en la expresión  $(3 + \xi)$  sustituimos a  $\xi$  por  $2 \times 5$  y por  $10$  y obtenemos dos números iguales.

## Funciones recursivas: sustitución

- $\alpha[\varphi / p_i]$  denota la fórmula obtenida de sustituir todas las ocurrencias de  $p_i$  en la fórmula  $\alpha$  por la fórmula  $\varphi$
- Se define por recursión primitiva en  $\alpha$

Def [sustitución de una fórmula por una variable]

$[_ / _] : \text{PROP} \times \text{PROP} \times P \rightarrow \text{PROP}$

$$\perp [\varphi / p_i] = \perp$$

$$p_j [\varphi / p_i] = \begin{cases} \varphi & \text{si } i=j \\ p_j & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

$$(\alpha \beta) [\varphi / p_i] = (\alpha [\varphi / p_i] \beta [\varphi / p_i]) \quad , \in C$$

$$(\neg \alpha) [\varphi / p_i] = (\neg \alpha [\varphi / p_i])$$

## Sustitución por fórmulas equivalentes: Teorema de Sustitución

- Teorema 1.2.5 [sustitución]
  - H)  $\alpha_1 \text{ eq } \alpha_2$
  - T) para toda  $\beta \in \text{PROP}$  y para cualquier  $p \in P$  se cumple que:
    - $\beta[\alpha_1/p] \text{ eq } \beta[\alpha_2/p]$
- Ejemplo:
  - Como  $(p_1 \vee p_2) \text{ eq } (p_2 \vee p_1)$ , entonces  $((p_4 \rightarrow (p_1 \vee p_2)) \text{ eq } (p_4 \rightarrow (p_2 \vee p_1)))$  porque  $(p_4 \rightarrow q) [p_1 \vee p_2/q] \text{ eq } (p_4 \rightarrow q) [p_2 \vee p_1/q]$

## Leyes algebraicas (tautologías)

Para todas  $\varphi, \psi, \sigma \in \text{PROP}$ :

$$\begin{aligned} & \models (\varphi \vee \psi) \vee \sigma \leftrightarrow \varphi \vee (\psi \vee \sigma) \\ & \models (\varphi \wedge \psi) \wedge \sigma \leftrightarrow \varphi \wedge (\psi \wedge \sigma) \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} & \models (\varphi \vee \psi) \vee \sigma \leftrightarrow \varphi \vee (\psi \vee \sigma) \\ & \models (\varphi \wedge \psi) \wedge \sigma \leftrightarrow \varphi \wedge (\psi \wedge \sigma) \end{aligned}} \right\} \text{asociatividad de } \wedge \text{ y } \vee$$

$$\begin{aligned} & \models (\varphi \vee \psi) \leftrightarrow (\psi \vee \varphi) \\ & \models (\varphi \wedge \psi) \leftrightarrow (\psi \wedge \varphi) \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} & \models (\varphi \vee \psi) \leftrightarrow (\psi \vee \varphi) \\ & \models (\varphi \wedge \psi) \leftrightarrow (\psi \wedge \varphi) \end{aligned}} \right\} \text{conmutatividad de } \wedge \text{ y } \vee$$

$$\begin{aligned} & \models \varphi \vee (\psi \wedge \sigma) \leftrightarrow (\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \sigma) \\ & \models \varphi \wedge (\psi \vee \sigma) \leftrightarrow (\varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \sigma) \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} & \models \varphi \vee (\psi \wedge \sigma) \leftrightarrow (\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \sigma) \\ & \models \varphi \wedge (\psi \vee \sigma) \leftrightarrow (\varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \sigma) \end{aligned}} \right\} \text{distributividad de } \wedge \text{ y } \vee$$

$$\begin{aligned} & \models \neg(\varphi \vee \psi) \leftrightarrow (\neg\psi \wedge \neg\varphi) \\ & \models \neg(\varphi \wedge \psi) \leftrightarrow (\neg\psi \vee \neg\varphi) \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} & \models \neg(\varphi \vee \psi) \leftrightarrow (\neg\psi \wedge \neg\varphi) \\ & \models \neg(\varphi \wedge \psi) \leftrightarrow (\neg\psi \vee \neg\varphi) \end{aligned}} \right\} \text{Leyes de De Morgan}$$

$$\begin{aligned} & \models (\varphi \vee \varphi) \leftrightarrow \varphi \\ & \models (\varphi \wedge \varphi) \leftrightarrow \varphi \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} & \models (\varphi \vee \varphi) \leftrightarrow \varphi \\ & \models (\varphi \wedge \varphi) \leftrightarrow \varphi \end{aligned}} \right\} \text{idempotencia de } \wedge \text{ y } \vee$$

$$\models \neg\neg\varphi \leftrightarrow \varphi \quad \left. \vphantom{\models \neg\neg\varphi \leftrightarrow \varphi} \right\} \text{doble negación}$$

Instituto de Computación

Lógica

Semántica Proposicional - 27

## Más propiedades...

- Lema 1.3.2
  - Si  $\models \alpha \rightarrow \beta$
  - entonces  $(\alpha \wedge \beta) \text{ eq } \alpha$  y  $(\alpha \vee \beta) \text{ eq } \beta$
- Lema 1.3.3
  - a. Si  $\models \alpha$  entonces  $(\alpha \wedge \beta) \text{ eq } \beta$
  - b. Si  $\models \alpha$  entonces  $(\neg\alpha \vee \beta) \text{ eq } \beta$
  - c.  $(\perp \vee \beta) \text{ eq } \beta$
  - d.  $(\neg\perp \wedge \beta) \text{ eq } \beta$

Instituto de Computación

Lógica

Semántica Proposicional - 28

## Equivalencias entre conectivos

### Teorema 1.3.4

Para todas  $\alpha, \beta \in \text{PROP}$ :

- a.  $(\alpha \leftrightarrow \beta) \text{ eq } (\alpha \rightarrow \beta) \wedge (\beta \rightarrow \alpha)$
- b.  $(\alpha \rightarrow \beta) \text{ eq } (\neg\alpha \vee \beta)$
- c.  $(\alpha \vee \beta) \text{ eq } (\neg\alpha \rightarrow \beta)$
- d.  $(\alpha \vee \beta) \text{ eq } \neg(\neg\beta \wedge \neg\alpha)$
- e.  $(\alpha \wedge \beta) \text{ eq } \neg(\neg\beta \vee \neg\alpha)$
- f.  $\neg\alpha \quad \text{eq } (\alpha \rightarrow \perp)$
- g.  $\perp \quad \text{eq } (\alpha \wedge \neg\alpha)$

## Conjuntos completos de conectivos

- Un conjunto de conectivos  $C$  es completo si cualquier función de verdad es definible en términos de los conectivos de  $C$
- Def [conjunto completo de conectivos]
  - $C$  es un conjunto completo de conectivos si para conectivo  $n$ -ario  $\$$  ( $n > 0$ ) y letras proposicionales  $p_{i1}, p_{i2}, \dots, p_{in}$  existe una fórmula  $\sigma \in \text{PROP}$  que contiene sólo a  $p_{i1}, p_{i2}, \dots, p_{in}$  y a los conectivos de  $C$  tal que  $\sigma \text{ eq } \$(p_{i1}, p_{i2}, \dots, p_{in})$

## Conjuntos completos de conectivos

---

- Teorema 1.3.6
  - $\{\neg, \vee\}$  es un conjunto completo de conectivos
- También  $\{\neg, \vee\}$ ,  $\{\neg, \wedge\}$ ,  $\{\perp, \rightarrow\}$  y  $\{\neg, \rightarrow\}$  son completos

## Conjunciones y disyunciones finitas

---

### Definición 1.3.7

$$\bigwedge_{i \leq 0} \varphi_i = \varphi_0$$

$$\bigvee_{i \leq 0} \varphi_i = \varphi_0$$

$$\bigwedge_{i \leq n+1} \varphi_i = \varphi_{n+1} \wedge \left( \bigwedge_{i \leq n} \varphi_i \right)$$

$$\bigvee_{i \leq n+1} \varphi_i = \varphi_{n+1} \vee \left( \bigvee_{i \leq n} \varphi_i \right)$$



## Formas Normales

### **Definición 1.3.8** [formas normales]

- Una fórmula está en *forma normal conjuntiva* sii es de la forma:  $\bigwedge_{i \leq n} (\bigvee_{j \leq m_i} \varphi_{ij})$

donde cada  $\varphi_{ij}$  es una fórmula atómica o la negación de una fórmula atómica.

- Una fórmula está en *forma normal disyuntiva* sii es de la forma:

$$\bigvee_{i \leq n} (\bigwedge_{j \leq m_i} \varphi_{ij})$$

donde cada  $\varphi_{ij}$  es una fórmula atómica o la negación de una fórmula atómica.

## Formas Normales (cont.)

### Teorema 1.3.9

Para toda  $\alpha \in \text{PROP}$  existen fórmulas  $\alpha^c$  y  $\alpha^d$  en forma normal conjuntiva y forma normal disyuntiva respectivamente tales que:

$$\alpha \text{ eq } \alpha^c \text{ y } \alpha \text{ eq } \alpha^d$$

## Semántica: Conclusión

---

- Para responder / verificar las nociones de consecuencia lógica y tautología:
  - Usamos un *método de cálculo* (tablas de verdad)
- Para simplificar un problema inicial y llevarlo a una tautología conocida, usamos nociones de:
  - *equivalencia lógica*
  - *sustitución*