Lógica Proposicional

Deducción Natural

Justificación de la validez del razonamiento?

- Dos maneras diferentes de justificar
  - Justificar que la veracidad de las hipótesis implica la veracidad de la conclusión

    (Justificación semántica: $\Gamma \models \beta$)
  - Dar una demostración que pruebe a la conclusión a partir de las hipótesis, a través de pasos debidamente justificados

    (Justificación sintáctica: $\Gamma \vdash \beta$)

Justificación Sintáctica

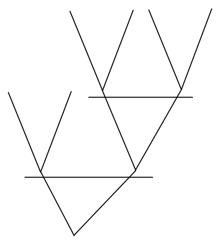
- Dar una ***demostración*** que:
  - pruebe la conclusión a partir de las hipótesis
  - esté constituida de pasos debidamente justificados
- Una ***demostración*** es una prueba *formal*:
  - la corrección de la demostración depende de su *forma* y no del significado
  - *existen reglas* precisas de construcción para las demostraciones

Pruebas Formales

- Cómo probamos usualmente?
  - hipótesis iniciales (las podemos usar como dato en todo instante de la prueba)
  - La prueba consiste de un encadenamiento de pasos simples de deducción que nos permite llegar a la conclusión
- Por qué pruebas formales?
  - Podemos compilar las pruebas hechas, y asegurar su corrección o detectar errores mediante el análisis de su estructura

Formalización del razonamiento

- Existen varias maneras de formalizar el razonamiento:
  - Método Axiomático **(a la Hilbert)**
  - Deducción Natural **(Gentzen)**
  - otros …..
- En Deducción Natural se formalizan las demostraciones mediante árboles, siguiendo la estructura de las mismas:



Prueba Formal – Ejemplo

$\alpha\wedge\beta \to \gamma,\ \ \alpha \vdash \beta\to\gamma$

$$\dfrac{\dfrac{\alpha\wedge\beta \to \gamma \qquad \dfrac{\alpha \qquad \cancel{\beta}^{(1)}}{\alpha\wedge\beta}\,(I\wedge)}{\gamma}\,(E\to)}{\beta \to \gamma}\,(I\to)\ (1)$$

Deducción Natural

Reglas de construcción de pruebas

Indican cómo:

– subdividir la prueba en subpruebas más simples

– manejar las hipótesis correctamente en cada etapa de la prueba

El análisis de corrección de una prueba formal puede mecanizarse (existen asistentes y verificadores automáticos de pruebas)

Pruebas = Árboles

- Las hojas son las hipótesis de la prueba
- La raíz es la conclusión de la prueba
- De las hojas hacia la raíz se pasa por aplicación de alguna de las reglas de construcción
- Las hipótesis locales a subpartes de una prueba se representan con hojas tachadas

Reglas de Construcción de Pruebas

- Para cada conectivo se definen:
- *Reglas de Introducción*
  - indican cómo *probar* una fórmula con el conectivo correspondiente
- *Reglas de Eliminación*
  - indican cómo *utilizar* una fórmula con el conectivo en una demostración

Cómo probar una conjunción?

H) $\delta_{1.} \ldots \delta_n$
T) $(\alpha \wedge \beta)$

Dem.
- Probamos α.
  (usamos... $\delta_1 \ldots \delta_n \ldots$)
- Probamos β.
  (usamos... $\delta_1 \ldots \delta_n \ldots$)

Luego $(\alpha \wedge \beta)$

$$\dfrac{\begin{array}{cc} \delta_{1.} \ldots \delta_n & \delta_{1.} \ldots \delta_n \\ \ldots & \ldots \\ \alpha & \beta \end{array}}{\alpha \wedge \beta} \; (I_\wedge)$$

Cómo probar un implica?

H) $\delta_{1.} \ldots \delta_n$

T) $(\alpha \rightarrow \beta)$

Dem.

Supongamos α

(usamos... $\delta_1 \ldots \delta_n\ \alpha$....)

entonces β.

Luego $(\alpha \rightarrow \beta)$

$$\frac{\begin{array}{c}\delta_1 \ldots \delta_n\ \cancel{\alpha} \\ \ldots \\ \beta\end{array}}{\alpha \rightarrow \beta}\ (I\rightarrow)$$

Cómo probar una disyunción? (I)

H) $\delta_{1.} \ldots \delta_n$

T) $(\alpha \vee \beta)$

Dem.

- Probamos α.

(usamos ... $\delta_1 \ldots \delta_n$ …)

Luego $(\alpha \vee \beta)$

$$\frac{\begin{array}{c}\delta_{1.} \ldots \delta_n \\ \ldots \\ \alpha\end{array}}{\alpha \vee \beta}\ (I\vee_1)$$

$$\frac{\begin{array}{c}\delta_{1.} \ldots \delta_n \\ \ldots \\ \beta\end{array}}{\alpha \vee \beta}\ (I\vee_2)$$

Cómo probar un si sólo si?

H) $\delta_{1.} \dots \delta_n$

T))($\alpha \leftrightarrow \beta$)

Dem.

$\Rightarrow$) Supongamos α.

(usamos... $\delta_1 \dots \delta_n\ \alpha$....)

entonces β.

$\Leftarrow$) Supongamos β.

(usamos... $\delta_1 \dots \delta_n\ \beta$....)

entonces α.

Luego $\alpha \leftrightarrow \beta$.

$$\dfrac{\begin{array}{c}\delta_1 \dots \delta_n\ \cancel{\alpha}\\ \dots \\ \beta\end{array} \qquad \begin{array}{c}\delta_1 \dots \delta_n\ \cancel{\beta}\\ \dots \\ \alpha\end{array}}{\alpha \leftrightarrow \beta}\ (I\leftrightarrow)$$

Cómo probar una negación?

H) $\delta_{1.} \dots \delta_n$

T) $\neg\, \alpha$

Dem.

-Supongamos α

-Llegamos al absurdo

(usamos ... $\delta_1 \dots \delta_n\ \alpha$)

Luego $\neg\, \alpha$.

$$\dfrac{\begin{array}{c}\delta_1 \dots \delta_n\ \cancel{\alpha}\\ \dots \\ \perp\end{array}}{\neg\, \alpha}\ (\neg_I)$$

Cómo utilizar una conjunción? (I)

H) $\delta_{1.} \ldots \delta_n$
T) α

Dem.
- Probamos $(\alpha \wedge \beta)$
  (usamos... $\delta_1 \ldots \delta_n$ ...)

Luego α

$$\frac{\begin{array}{c}\delta_1 \ldots \delta_n. \\ \ldots \\ \alpha \wedge \beta\end{array}}{\alpha}\ (E_{\wedge\, 1})$$

$$\frac{\begin{array}{c}\delta_1 \ldots \delta_n. \\ \ldots \\ \alpha \wedge \beta\end{array}}{\beta}\ (E_{\wedge\, 2})$$

Cómo utilizar una implicancia?

H) $\delta_{1.} \ldots \delta_n$
T) β
Dem.
- Probamos $(\alpha \rightarrow \beta)$
  (usamos... $\delta_1 \ldots \delta_n$ ...)
- Probamos α
  (usamos... $\delta_1 \ldots \delta_n$ ...)

Luego β

$$\frac{\begin{array}{c}\delta_{1.} \ldots \delta_n \\ \ldots \\ \alpha \rightarrow \beta\end{array} \qquad \begin{array}{c}\delta_{1.} \ldots \delta_n \\ \ldots \\ \alpha\end{array}}{\beta}\ (E\rightarrow)$$

Cómo utilizar una disyunción?

H) $\delta_{1.} \ldots \delta_n$

T) δ

Dem.

- Probamos $\alpha \vee \beta$
  (usamos ... δ_1 ... δ_n …)
- Caso1: supongamos α.
  (usamos ... δ_1 ... δ_n ... α)
  entonces δ
- Caso 2: supongamos β.
  (usamos ... δ_1 ... δ_n ... β)
  entonces δ

Luego δ

$$\frac{\begin{array}{c}\delta_{1.} \ldots \delta_n \\ \ldots \\ \alpha \vee \beta\end{array} \qquad \begin{array}{c}\delta_{1.} \ldots \delta_n\ \cancel{\alpha} \\ \ldots \\ \delta\end{array} \qquad \begin{array}{c}\delta_{1.} \ldots \delta_n\ \cancel{\beta} \\ \ldots \\ \delta\end{array}}{\delta}\ (E_\vee)$$

Cómo utilizar un si y sólo si? (I)

H) $\delta_{1.} \ldots \delta_n$

T) β

Dem.

- Probamos α si y sólo si β.
  (usamos... δ_1 ... δ_n ...)
- Probamos α.
  (usamos... δ_1 ... δ_n ...)

Luego β.

$$\frac{\begin{array}{c}\delta_{1.} \ldots \delta_n \\ \ldots \\ \alpha \leftrightarrow \beta\end{array} \qquad \begin{array}{c}\delta_{1.} \ldots \delta_n \\ \ldots \\ \alpha\end{array}}{\beta}\ (E_{\leftrightarrow_1})$$

$$\frac{\begin{array}{c}\delta_{1.} \ldots \delta_n \\ \ldots \\ \alpha \leftrightarrow \beta\end{array} \qquad \begin{array}{c}\delta_{1.} \ldots \delta_n \\ \ldots \\ \beta\end{array}}{\alpha}\ (E_{\leftrightarrow_1})$$

Cómo utilizar una negación?

(las negaciones sirven para llegar al Absurdo)

H) $\delta_{1.} \ldots \delta_n$
T) Absurdo

Dem.
- Probamos α
  (usamos ... $\delta_1 \ldots \delta_n$ ...)
- Probamos $\neg\,\alpha$
  (usamos ... $\delta_1 \ldots \delta_n$ …)

Luego Absurdo.

$$\dfrac{\begin{array}{c}\delta_1 \ldots \delta_n \\ \ldots \\ \alpha\end{array} \qquad \begin{array}{c}\delta_1 \ldots \delta_n \\ \ldots \\ \neg\,\alpha\end{array}}{\perp}\;(\neg E)$$

Cómo utilizar el Absurdo? (I)

H) $\delta_{1.} \ldots \delta_n$
T) α

Dem.
Probamos Absurdo
(usamos... $\delta_1 \ldots \delta_n$ ...)

Luego α.

$$\dfrac{\begin{array}{c}\delta_1 \ldots \delta_n. \\ \ldots \\ \perp\end{array}}{\alpha}\;(E_{\perp})$$

Cómo utilizar el Absurdo? (II)

H) $\delta_{1.} \ldots \delta_n$

T) α

Dem.

- Supongamos $\neg\,\alpha$

- Llegamos al absurdo

(usamos $\ldots\delta_1\ldots\delta_n\ldots\neg\alpha$)

Luego α.

$$\dfrac{\begin{array}{c}\delta_1 \ \ldots\ \delta_n \ \cancel{\neg\alpha} \\ \ldots \\ \perp\end{array}}{\alpha}\ \text{(RAA)}$$

(Reducción al absurdo)

Una prueba trivial...

H) α

T) α

Dem.

vale por hipótesis

Luego α.

α (HIP)

(Hipótesis)

Prueba Formal

- Estructura de árbol: la prueba se descompone en subpruebas (subárboles)
- Reglas precisas para la construcción de los árboles
- Hipótesis de la prueba: hojas del árbol
  - las del enunciado inicial: hojas no tachadas
  - hipótesis locales: hojas tachadas
- Conclusión: raíz del árbol

Prueba Formal - Ejemplo

$\vdash \alpha\wedge\beta \to \beta\wedge\alpha$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\cancel{\alpha\wedge\beta}^{(1)}}{\beta}\,(E\wedge) \qquad \dfrac{\cancel{\alpha\wedge\beta}^{(1)}}{\alpha}\,(E\wedge)}{\beta\wedge\alpha}\,(I\wedge)}{\alpha\wedge\beta\to\beta\wedge\alpha}\,(I\to)\ (1)$$

Prueba Formal – Ejemplo (II)

$\alpha\wedge\beta \to \gamma,\ \ \alpha \vdash \beta\to\gamma$

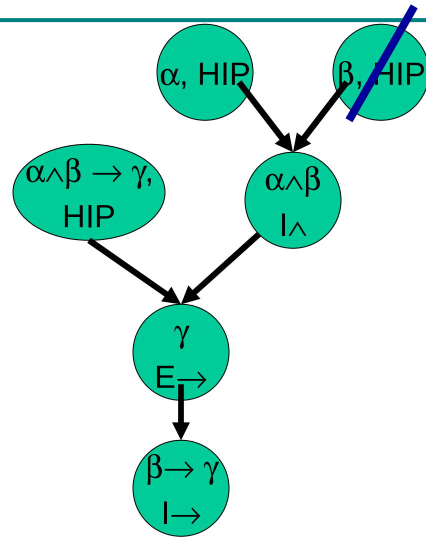
$$\dfrac{\dfrac{\alpha\wedge\beta\to\gamma \qquad \dfrac{\alpha \qquad \cancel{\beta}^{(1)}}{\alpha\wedge\beta}\,(I\wedge)}{\gamma}\,(E\to)}{\beta\to\gamma}\,(I\to)\ (1)$$

Árboles

- Las derivaciones se definen inductivamente sobre un conjunto de árboles etiquetados
- Cada nodo, interno u hoja, se etiqueta con una fórmula proposicional y una regla
- Las hojas pueden estar marcadas o no (Cancelación de hipótesis)

Prueba Formal – Ejemplo (II)

$$\dfrac{\dfrac{\alpha\wedge\beta \to \gamma \qquad \dfrac{\alpha \qquad \cancel{\beta}^{(1)}}{\alpha\wedge\beta}\,(I\wedge)}{\gamma}\,(E\to)}{\beta \to \gamma}\,(I\to)\ (1)$$



Derivaciones - DER

Def 1.5.1 [**DER**] El conjunto DER de las derivaciones de la lógica proposicional se define inductivamente como sigue:

HIP) Si $\varphi \in$ PROP entonces $\varphi \in$ DER

$\wedge_I$**) Si** $\begin{matrix}D\\ \varphi\end{matrix} \in$ DER **y** $\begin{matrix}D'\\ \psi\end{matrix} \in$ DER **entonces** $\dfrac{\begin{matrix}D\\ \varphi\end{matrix} \quad \begin{matrix}D'\\ \psi\end{matrix}}{\varphi \wedge \psi} \in$ DER

$\wedge_{E1}$**) Si** $\begin{matrix}D\\ \varphi\wedge\psi\end{matrix} \in$ DER **entonces** $\dfrac{\begin{matrix}D\\ \varphi\wedge\psi\end{matrix}}{\varphi} \in$ DER

$\wedge_{E2}$**) Si** $\begin{matrix}D\\ \varphi\wedge\psi\end{matrix} \in$ DER **entonces** $\dfrac{\begin{matrix}D\\ \varphi\wedge\psi\end{matrix}}{\psi} \in$ DER

Derivaciones - DER

$\to_I$) **Si** $\begin{array}{c}\varphi\\ D\\ \psi\end{array} \in$ DER **entonces** $\dfrac{\begin{array}{c}\cancel{\varphi}\\ D\\ \psi\end{array}}{\varphi \to \psi} \in$ DER

$\to_E$) **Si** $\begin{array}{c}D\\ \varphi\end{array} \in$ DER y $\begin{array}{c}D'\\ \varphi \to \psi\end{array} \in$ DER **entonces**

$$\dfrac{\begin{array}{c}D\\ \varphi\end{array} \qquad \begin{array}{c}D'\\ \varphi \to \psi\end{array}}{\psi} \in \text{DER}$$

Derivaciones - DER

$\vee_{I1}$) **Si** $\begin{array}{c}D\\ \varphi\end{array} \in$ DER **entonces** $\dfrac{\begin{array}{c}D\\ \varphi\end{array}}{\varphi \vee \psi} \in$ DER

$\vee_{I2}$) **Si** $\begin{array}{c}D\\ \psi\end{array} \in$ DER **entonces** $\dfrac{\begin{array}{c}D\\ \psi\end{array}}{\varphi \vee \psi} \in$ DER

$\vee_E$) **Si** $\begin{array}{c}D\\ \varphi \vee \psi\end{array} \in$ DER, $\begin{array}{c}\varphi\\ D'\\ \gamma\end{array} \in$ DER y $\begin{array}{c}\psi\\ D''\\ \gamma\end{array} \in$ DER **entonces**

$$\dfrac{\begin{array}{c}D\\ \varphi \vee \psi\end{array} \qquad \begin{array}{c}\cancel{\varphi}\\ D'\\ \gamma\end{array} \qquad \begin{array}{c}\cancel{\psi}\\ D''\\ \gamma\end{array}}{\gamma} \in \text{DER}$$

Derivaciones - DER

$\leftrightarrow_I$) **Si** $\begin{matrix}\varphi\\ D\\ \psi\end{matrix}$ ∈ DER y $\begin{matrix}\psi\\ D´\\ \varphi\end{matrix}$ ∈ DER **entonces** $\dfrac{\begin{matrix}\cancel{\varphi}\\ D\\ \psi\end{matrix}\quad\begin{matrix}\cancel{\psi}\\ D´\\ \varphi\end{matrix}}{\varphi \leftrightarrow \psi}$ ∈ DER

$\leftrightarrow_{E1}$) **Si** $\begin{matrix}D\\ \varphi\end{matrix}$ ∈ DER y $\begin{matrix}D´\\ \varphi \leftrightarrow \psi\end{matrix}$ ∈ DER **entonces**

$\dfrac{\begin{matrix}D\\ \varphi\end{matrix}\quad\begin{matrix}D'\\ \varphi \leftrightarrow \psi\end{matrix}}{\psi}$ ∈ DER

$\leftrightarrow_{E2}$) **Si** $\begin{matrix}D\\ \psi\end{matrix}$ ∈ DER y $\begin{matrix}D´\\ \varphi \leftrightarrow \psi\end{matrix}$ ∈ DER **entonces**

$\dfrac{\begin{matrix}D\\ \psi\end{matrix}\quad\begin{matrix}D'\\ \varphi \leftrightarrow \psi\end{matrix}}{\varphi}$ ∈ DER

Derivaciones - DER

$\neg_I$) **Si** $\begin{matrix}\varphi\\ D\\ \bot\end{matrix}$ ∈ DER **entonces** $\dfrac{\begin{matrix}\cancel{\varphi}\\ D\\ \bot\end{matrix}}{\neg\varphi}$ ∈ DER

$\neg_E$) **Si** $\begin{matrix}D\\ \varphi\end{matrix}$ ∈ DER y $\begin{matrix}D´\\ \neg\varphi\end{matrix}$ ∈ DER **entonces** $\dfrac{\begin{matrix}D\\ \varphi\end{matrix}\quad\begin{matrix}D´\\ \neg\varphi\end{matrix}}{\bot}$ ∈ DER

Derivaciones - DER

$\perp_E$) Si $\begin{array}{c} D \\ \perp \end{array}$ $\in$ DER y $\varphi \in$ PROP **entonces** $\dfrac{\begin{array}{c} D \\ \perp \end{array}}{\varphi}$ $\in$ DER

RAA) Si $\begin{array}{c} \neg\varphi \\ D \\ \perp \end{array}$ $\in$ DER **entonces** $\dfrac{\begin{array}{c} \cancel{\neg\varphi} \\ D \\ \perp \end{array}}{\varphi}$ $\in$ DER

Conclusión e hipótesis

<u>Def</u> [conclusión e hipótesis de una derivación]
Sea D $\in$ DER.

- C(D) es la conclusión de D
- H(D) es el conjunto de hipótesis no canceladas de D

<u>Ejercicio:</u> Definir C(D) y H(D) por recursión en D, asumiendo que se cancelan todas las hipótesis en las reglas que se aplican.

Consecuencia Sintáctica

<u>Def 1.5.2</u> [consecuencia sintáctica]

Sea $\Gamma \subseteq$ PROP y $\varphi \in$ PROP.

φ *es consecuencia sintáctica de* Γ (o φ *se deriva de* Γ) ssi existe D$\in$DER tal que:

- C(D) = φ y
- H(D) $\subseteq \Gamma$

<u>Notación:</u>

- $\Gamma \vdash \varphi$ se lee "φ *se deriva de* Γ"
- $\varnothing \vdash \varphi$ se lee "φ *es teorema*" y se escribe $\vdash \varphi$

<u>Def</u> [**CONS**, consecuencias sintácticas]

Dado $\Gamma \subseteq$PROP, el conjunto de las consecuencias sintácticas de Γ es CONS(Γ) ={$\alpha \in$ PROP | $\Gamma \vdash \alpha$ }

Derivaciones - Ejemplo

$\vdash \neg\neg\alpha \to \alpha$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\cancel{\neg\neg\alpha}^{(2)} \qquad \cancel{\neg\alpha}^{(1)}}{\bot}\,(E\neg)}{\alpha}\,(RAA)\ (1)}{\neg\neg\alpha \to \alpha}\,(I\to)\ (2)$$

Derivaciones – Ejemplo (II)

$\vdash \alpha\to \neg\neg\alpha$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\cancel{\alpha}^{(2)} \qquad \cancel{\neg\alpha}^{(1)}}{\bot}\;(E\neg)}{\neg\neg\alpha}\;(I\neg)\;(1)}{\alpha\to\neg\neg\alpha}\;(I\to)\;(2)$$

Propiedades de $\wedge, \to$ y $\bot$

<u>Lema 1.5.3</u>

Para todos $\alpha, \beta \in$ PROP y $\Gamma, \Delta \subseteq$ PROP :

- Si $\alpha \in \Gamma$ entonces $\Gamma\vdash \alpha$
- Si $\Gamma\vdash \alpha$ y $\Delta\vdash \beta$ entonces $\Gamma\cup\Delta\vdash \alpha\wedge\beta$
- Si $\Gamma\vdash \alpha\wedge\beta$ entonces $\Gamma\vdash \alpha$ y $\Gamma\vdash \beta$
- Si $\Gamma,\alpha\vdash\beta$ entonces $\Gamma\vdash \alpha\to\beta$
- Si $\Gamma\vdash \alpha$ y $\Delta\vdash \alpha\to\beta$ entonces $\Gamma\cup\Delta\vdash \beta$
- Si $\Gamma\vdash\bot$ entonces $\Gamma\vdash \alpha$
- Si $\Gamma,\neg\alpha\vdash\bot$ entonces $\Gamma\vdash \alpha$

Propiedades de $\vee$, $\leftrightarrow$, $\neg$

Lema 1.7.2

Para todos $\alpha, \beta \in$ PROP y $\Gamma, \Delta \subseteq$ PROP :

1. Si $\Gamma \vdash \alpha$ entonces $\Gamma \vdash \alpha \vee \beta$
2. Si $\Gamma \vdash \beta$ entonces $\Gamma \vdash \alpha \vee \beta$
3. Si $\Gamma, \alpha \vdash \gamma$ y $\Gamma, \beta \vdash \gamma$ entonces $\Gamma, (\alpha \vee \beta) \vdash \gamma$
4. Si $\Gamma, \alpha \vdash \beta$ y $\Gamma, \beta \vdash \alpha$ entonces $\Gamma \vdash (\alpha \leftrightarrow \beta)$
5. Si $\Gamma \vdash (\alpha \leftrightarrow \beta)$ entonces $\Gamma, \alpha \vdash \beta$ y $\Gamma, \beta \vdash \alpha$
6. Si $\Gamma, \alpha \vdash \perp$ entonces $\Gamma \vdash \neg\alpha$
7. Si $\Gamma \vdash \alpha$ y $\Delta \vdash \neg\alpha$ entonces $\Gamma \cup \Delta \vdash \perp$

Equivalencias entre conectivos

Teorema 1.7.3

Para todos $\alpha, \beta \in$ Prop:

$\vdash (\neg \alpha) \leftrightarrow (\alpha \to \perp)$

$\vdash (\alpha \vee \beta) \leftrightarrow \neg (\neg\alpha \wedge \neg\beta)$

$\vdash (\alpha \leftrightarrow \beta) \leftrightarrow (\alpha \to \beta) \wedge (\beta \to \alpha)$

$\vdash (\alpha \wedge \beta) \leftrightarrow \neg (\neg\alpha \vee \neg\beta)$

$\vdash (\alpha \to \beta) \leftrightarrow (\neg\alpha \vee \beta)$

$\vdash \perp \leftrightarrow \neg(\alpha \vee \neg\alpha)$

Más Propiedades

Teorema 1.5.4

$\vdash \alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \alpha)$

$\vdash \alpha \rightarrow (\neg \alpha \rightarrow \beta)$

$\vdash (\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow ((\beta \rightarrow \sigma) \rightarrow (\alpha \rightarrow \sigma))$

$\vdash (\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\neg \beta \rightarrow \neg \alpha)$

$\vdash \neg\neg \alpha \leftrightarrow \alpha$

$\vdash \alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \sigma) \leftrightarrow (\alpha \wedge \beta \rightarrow \sigma)$

$\vdash \bot \leftrightarrow (\alpha \wedge \neg \alpha)$

Propiedades interesantes de $\vdash$

- Si $\Gamma \subseteq \Delta$ y $\Gamma \vdash \alpha$, entonces $\Delta \vdash \alpha$
- Si $\Gamma \vdash \alpha$, entonces existe $\Delta \subseteq \Gamma$ tal que Δ es finito y $\Delta \vdash \alpha$
- Si $\Gamma \vdash \delta$ para toda $\delta \in \Delta$ y $\Delta \vdash \alpha$, entonces $\Gamma \vdash \alpha$