Semántica de la Lógica de Predicados de Primer Orden

Significado de las Fórmulas

- Pregunta: ¿ cuándo se cumple $\Gamma \models \varphi$?
  - Ejemplo para un lenguaje de tipo <1,2;2,2;2>
    ¿ $P_1(f_2(x_1,x_2)), P_1(c_1) \models P_2(c_2, f_2(x_1,x_2))$?

  ➔ ¡¡ depende de quiénes sean P_1, P_2, f_1, f_2, c_1, c_2 !!
- Moraleja: Debemos interpretar los elementos del alfabeto en algún universo.
- Para ello:
  - Primero debemos saber qué objetos representan los términos (cerrados),
  - Luego, qué propiedades representan los predicados,
  - Finalmente podremos saber el valor de verdad de las fórmulas (por ahora, cerradas).

Lenguaje Extendido para una Estructura

Def 2.3.12 [Lenguaje extendido para una estructura]

- Sea $\mathcal{M}$ una estructura.
- El lenguaje extendido para $\mathcal{M}$, notado L($\mathcal{M}$) se obtiene del lenguaje L del tipo de $\mathcal{M}$, agregando símbolos de constante para todos los elementos de $|\mathcal{M}|$.
- Notamos a cada elemento $a \in |\mathcal{M}|$ con el símbolo $\underline{a}$

Interpretación de Términos y Fórmulas: Ejemplo

- Sea L un lenguaje de tipo <1 ; 2,1 ; 2> con alfabeto: P_1, =' ; f_1, f_2 ; c_1, c_2
- Dada una estructura $\mathcal{M}$ =<Z, Primo, +, -,0,1>, tenemos la intuición de qué valor van a tener las fórmulas del lenguaje L en $\mathcal{M}$.
- Por ejemplo:
  - $f_2(f_1(c_1,c_2))$
  - $\exists x_1(P_1(x_1))$
  - $\forall x_2 (P_1(x_2) \rightarrow \neg P_1(f_1(x_2,c_2)))$
  - $\exists x_1 P_1(f_1(c_2, f_2(x_1)))$

1. Interpretación de Términos Cerrados

- Interpretamos los términos cerrados de $L(\mathcal{M})$: $t^{\mathcal{M}} \in Z$
  - $c_1^{\mathcal{M}} = 0$, $c_2^{\mathcal{M}} = 1$
  - para cada $m \in Z$: $m^{\mathcal{M}} = m$
  - $f_1(t_1,t_2)^{\mathcal{M}} = t_1^{\mathcal{M}} + t_2^{\mathcal{M}}$
  - $f_2(t)^{\mathcal{M}} = -(t^{\mathcal{M}})$

2. Interpretación de Fórmulas Atómicas Cerradas

Interpretamos las fórmulas atómicas cerradas de $L(\mathcal{M})$: $v^{\mathcal{M}}(\alpha) \in \{0,1\}$

- $v^{\mathcal{M}}(\perp) = 0$
- $v^{\mathcal{M}}(t_1 =' t_2) = \begin{cases} 1 \text{ si } t_1^{\mathcal{M}} = t_2^{\mathcal{M}} \\ 0 \text{ si } t_1^{\mathcal{M}} \neq t_2^{\mathcal{M}} \end{cases}$

-$v^{\mathcal{M}}(P_1(t)) = \begin{cases} 1 \text{ si } t^{\mathcal{M}} \text{ es primo} \\ 0 \text{ si } t^{\mathcal{M}} \text{ no es primo} \end{cases}$

Interpretación de las Fórmulas de SENT

Interpretamos el resto de las fórmulas cerradas de $L(\mathcal{M})$: $v^{\mathcal{M}}(\alpha) \in \{0,1\}$

- $v^{\mathcal{M}}(\alpha_1 \quad \alpha_2)$ --- como en PROP ---
- $v^{\mathcal{M}}(\neg\, \alpha_1)$ --- como en PROP ---
- $v^{\mathcal{M}}((\forall x_i)\alpha) = \text{mín } \{v^{\mathcal{M}}(\alpha[\underline{m}/x_i]) \mid m \in Z\}$
- $v^{\mathcal{M}}((\exists x_i)\alpha) = \text{máx } \{v^{\mathcal{M}}(\alpha[\underline{m}/x_i]) \mid m \in Z\}$

Ejemplos

- $f_1(f_2(c_1),c_2)^{\mathcal{M}} = f_2(c_1)^{\mathcal{M}} + c_2^{\mathcal{M}} = -(c_1^{\mathcal{M}}) + c_2^{\mathcal{M}} = -0+1 = 1$
- $v^{\mathcal{M}}(f_1(f_2(c_1),c_2) =' c_2) = 1$ pues $f_1(f_2(c_1),c_2)^{\mathcal{M}} = c_2^{\mathcal{M}}$ (=1)
- $v^{\mathcal{M}}(P_1(f_1(f_2(c_1),c_2))) = 0$ pues $f_1(f_2(c_1),c_2)^{\mathcal{M}} = 1$ (1 no primo)
- $v^{\mathcal{M}}((\forall x)\, P_1(x)) = \text{mín}\{v^{\mathcal{M}}(P_1(x)[\underline{m}/x]) \mid m \in Z\}$
  $= \text{mín}\{v^{\mathcal{M}}(P_1(\underline{m})) \mid m \in Z\}$
  $= 0$, pues en particular $v^{\mathcal{M}}(P_1(\underline{4})) = 0$
- $v^{\mathcal{M}}((\exists x) f_2(x) =' x) = \text{máx}\{v^{\mathcal{M}}(f_2(x) =' x[\underline{m}/x]) \mid m \in Z\}$
  $= \text{máx}\{v^{\mathcal{M}}(f_2(\underline{m}) =' \underline{m}) \mid m \in Z\}$
  $= 1$ pues en particular $v^{\mathcal{M}}(f_2(\underline{0}) =' \underline{0}) = 1$

En general...

- Sea L un lenguaje de tipo $<r_1 \ldots r_n; a_1 \ldots a_m; k>$ con alfabeto $P_1 \ldots P_n, f_1 \ldots f_m, \underline{c}_i$ ($i \in I$) y sea $\mathcal{M} = <A, R_1,..,R_n, F_1,..,F_m, \{c_i \mid i \in I\}>$

Def 2.4.1 [interpretación de términos cerrados de L($\mathcal{M}$) en $\mathcal{M}$]

- La interpretación de los términos cerrados de L($\mathcal{M}$) en $\mathcal{M}$ es una función $\_^{\mathcal{M}}: TERM_C \rightarrow |\mathcal{M}|$ que satisface:
  - $c_i^{\mathcal{M}} = c_i$ para todo $i \in I$
  - $\underline{a}^{\mathcal{M}} = a$ para todo $a \in |\mathcal{M}|$
  - $f_i(t_1,..,t_{ai})^{\mathcal{M}} = F_i(t_1^{\mathcal{M}},..,t_{ai}^{\mathcal{M}})$ para i = 1,..m

Sentencias

Def 2.4.2 [interpretación de sentencias de L($\mathcal{M}$) en $\mathcal{M}$]

La interpretación de las sentencias de L($\mathcal{M}$) en $\mathcal{M}$ es una función $v^{\mathcal{M}}$: SENT $\rightarrow \{0,1\}$ que satisface:

- $v^{\mathcal{M}}(\perp) = 0$
- $v^{\mathcal{M}}(t_1 =' t_2) = \begin{cases} 1 \text{ si } t_1^{\mathcal{M}} = t_2^{\mathcal{M}} \\ 0 \text{ si } t_1^{\mathcal{M}} \neq t_2^{\mathcal{M}} \end{cases}$
- $v^{\mathcal{M}}(P_j(t_1,..,t_{rj})) = \begin{cases} 1 \text{ si } <t_1^{\mathcal{M}},..,t_{rj}^{\mathcal{M}}> \in R_j \\ 0 \text{ si } <t_1^{\mathcal{M}},..,t_{rj}^{\mathcal{M}}> \notin R_j \end{cases}$
- $v^{\mathcal{M}}(\alpha_1 \square \alpha_2)$, $v^{\mathcal{M}}(\neg \alpha_1)$ --- como en PROP ---
- $v^{\mathcal{M}}((\forall x_i)\alpha) = \text{mín}\{v^{\mathcal{M}}(\alpha[\underline{a}/x_i]) \mid a \in |\mathcal{M}|\}$
- $v^{\mathcal{M}}((\exists x_i)\alpha) = \text{máx}\{v^{\mathcal{M}}(\alpha[\underline{a}/x_i]) \mid a \in |\mathcal{M}|\}$

Sobre las Variables

- Sólo se interpretaron las fórmulas cerradas.
- Las variables son huecos que pueden ser ocupados por elementos del universo.
- Que elementos del universo pueden ocupar un determinado hueco?
  - Si las variables son ligadas, la función anterior lo decide. Funcionan como variables locales.
  - Si las variables son libres, entonces lo decide alguien o algo externo a la fórmula que se analiza. Funcionan como parámetros

Sobre las Variables Libres y las fórmulas que las usan.

- Interpretar $P_1(x_1,\underline{1})$ de acuerdo a la siguiente estructura: $<N, \geq, Par>$ cuando es una subfórmula de otra.
  - Si la fórmula fuera $\forall x_1.P_1(x_1,\underline{1})$?
    - cualquier elemento del universo.
  - Si la fórmula fuera $\exists x_1.P_1(x_1,\underline{1})$?
    - los que son mayores o iguales que 1.
  - Si la fórmula fuera $\forall x_1(P_2(x_1)\rightarrow P_1(x_1,\underline{1}))$?
    - los pares, mayores o iguales que 1.

Sobre las Variables Libres y las fórmulas que las usan.

- Interpretar $P_1(x_1,\underline{1})$ de acuerdo a la siguiente estructura: <N, ≥ , Par> cuando está en un contexto determinado.
  - – Esto significa que alguien o algo externo a la fórmula decide que elementos pueden ocupar el lugar de la variable.
  - – Si la fórmula es verdadera cuando otras fórmulas que también tienen esta variable libre son verdaderas, entonces sólo los elementos que hacen verdaderas a esas fórmulas son aceptables.
  - – Si no hay un contexto que defina controle el valor de la variable, asume que puede ser cualquier elemento del universo. Es la noción de valor arbitrario del dominio.

Semántica de Fórmulas

Def 2.4.3 [clausura universal de una fórmula]

- Sea $\alpha \in$ FORM, y sea $FV(\alpha) = \{z_1,..,z_k\}$.
- Se define $cl(\alpha) = (\forall z_1)..,(\forall z_k)\alpha$

Def 2.4.4 [|=]

- Si $\alpha \in$ SENT, entonces $\mathcal{M} \models \alpha$ sii $v^{\mathcal{M}}(\alpha)=1$
- Si $\alpha \in$ FORM no cerrada, entonces $\mathcal{M} \models \alpha$ sii $v^{\mathcal{M}}(cl(\alpha))=1$
- Si $\alpha \in$ FORM, entonces $\models \alpha$ sii para toda estructura $\mathcal{M}$ del tipo adecuado $\mathcal{M} \models \alpha$
- Sea $\alpha \in$ SENT, $\Gamma \subseteq$ SENT. Entonces $\Gamma \models \alpha$ sii para toda estructura $\mathcal{M}$ del tipo adecuado, si $\mathcal{M} \models \varphi$ para todo $\varphi \in \Gamma$, entonces $\mathcal{M} \models \alpha$

Nomenclatura

- $\mathcal{M}$ es modelo de α si $\mathcal{M} \models \alpha$
- $\mathcal{M}$ es modelo de Γ si $\mathcal{M} \models \varphi$ para todo $\varphi \in \Gamma$
- α es verdadera si $\models \alpha$
- α es consecuencia semántica de Γ si $\Gamma \models \alpha$
- α es satisfecha por $a_1,..,a_k \in |\mathcal{M}|$ si $\mathcal{M} \models \alpha[\underline{a}_1,..,\underline{a}_k / z_1,..,z_k]$ (con $FV(\alpha) = \{z_1,..,z_k\}$, $k>0$)
- α es satisfactible en $\mathcal{M}$ si existen $a_1,..,a_k \in |\mathcal{M}|$ tq α es satisfecha por $a_1,..,a_k \in |\mathcal{M}|$
- α es satisfactible si existe alguna estructura $\mathcal{M}$ tal que α es satisfactible en $\mathcal{M}$

Propiedades de $\models$

- La relación $\models$ refleja exactamente el significado de los conectivos y los cuantificadores. Para fórmulas cerradas tenemos el siguiente lema:

Lema 2.4.5: Restringiendo a Sentencias, entonces:

i. $\mathcal{M} \models (\alpha \wedge \beta)$ sii $\mathcal{M} \models \alpha$ y $\mathcal{M} \models \beta$
ii. $\mathcal{M} \models (\alpha \vee \beta)$ sii $\mathcal{M} \models \alpha$ o $\mathcal{M} \models \beta$
iii. $\mathcal{M} \models (\neg\alpha)$ sii $\mathcal{M} \not\models \alpha$
iv. $\mathcal{M} \models (\alpha \rightarrow \beta)$ sii (si $\mathcal{M} \models \alpha$ entonces $\mathcal{M} \models \beta$)
v. $\mathcal{M} \models (\alpha \leftrightarrow \beta)$ sii ($\mathcal{M} \models \alpha$ sii $\mathcal{M} \models \beta$)
vi. $\mathcal{M} \models (\forall x)\alpha$ sii para todo $a \in |\mathcal{M}|$ $\mathcal{M} \models \alpha[\underline{a}/x]$
vii. $\mathcal{M} \models (\exists x)\alpha$ sii existe $a \in |\mathcal{M}|$ tq. $\mathcal{M} \models \alpha[\underline{a}/x]$

Propiedades Simples del Cálculo de Predicados

- ¿Qué tipo de propiedades podemos probar para los elementos de FORM?

  Todas aquellas que valían para PROP:
  - todas las fórmulas que son instancias de tautologías son verdaderas en cualquier estructura $\mathcal{M}$
  - Luego, todas las propiedades de los conectivos que probamos para las fórmulas de PROP valen.
- Vamos a probar propiedades de los cuantificadores

Propiedades de los Cuantificadores

Def: α eq β sii $\models (\alpha \leftrightarrow \beta)$

Teorema 2.5.1 [generalización de las leyes de De Morgan]

i. $\neg(\forall x)\alpha$ eq $(\exists x)\neg\alpha$

ii. $\neg(\exists x)\alpha$ eq $(\forall x)\neg\alpha$

iii. $(\forall x)\alpha$ eq $\neg(\exists x)\neg\alpha$

iv. $(\exists x)\alpha$ eq $\neg(\forall x)\neg\alpha$

Teorema 2.5.2 [orden de los cuantificadores]

i. $(\forall x)(\forall y)\alpha$ eq $(\forall y)(\forall x)\alpha$

ii. $(\exists x)(\exists y)\alpha$ eq $(\exists y)(\exists x)\alpha$

iii. Si $x \notin FV(\alpha)$ entonces $(\forall x)\alpha$ eq α

iv. Si $x \notin FV(\alpha)$ entonces $(\exists x)\alpha$ eq α

Más propiedades

Teorema 2.5.3 [Distributividad generalizada]

i. $(\forall x)\ (\alpha \wedge \beta)$ eq $(\forall x)\ \alpha \wedge (\forall x)\ \beta$

ii. $(\exists x)\ (\alpha \vee \beta)$ eq $(\exists x)\ \alpha \vee (\exists x)\ \alpha$

iii. Si $x \notin FV(\beta)$ entonces $(\forall x)(\alpha \vee \beta)$ eq $(\forall x)\alpha \vee \beta$

iv. Si $x \notin FV(\beta)$ entonces $(\exists x)(\alpha \wedge \beta)$ eq $(\exists x)\alpha \wedge \beta$

OJO!!! No valen:

$\models (\forall x)\ (\alpha \vee \beta) \rightarrow (\forall x)\ \alpha \vee (\forall x)\ \beta$

$\models (\exists x)\alpha \wedge (\exists x)\ \beta \rightarrow (\exists x)(\alpha \wedge \beta)$

Lemas de Sustitución

Lema 2.5.5 [lemas de sustitución]

i. Si $z \notin V(t)$ entonces $t[\underline{a}/x] = (t[z/x])[\underline{a}/z]$

ii. Si z no ocurre en α entonces $\alpha[\underline{a}/x] = (\alpha[z/x])[\underline{a}/z]$

iii. Sea t libre para x en α y β, y β libre para \$ en α .
Entonces, $(\alpha[\beta /\$])\ [t/x] = (\alpha\ [t/x])[\beta\ [t/x]\ /\$]$

Cambio de Variables

Teorema 2.5.4 [cambio de variables]

- Sean x,z tales que x,z $\notin FV(\alpha)$.
- Entonces:

i. $(\forall x)\ \alpha[x/y]$ eq $(\forall z)\ \alpha[z/y]$

ii. $(\exists x)\ \alpha[x/y]$ eq $(\exists z)\ \alpha[z/y]$

Informalmente: Sea z tal que z $\notin FV(\alpha) \cup BV(\alpha)$.
Entonces:

i. $(\forall x)\alpha(x)$ eq $(\forall z)\alpha(z)$

ii. $(\exists x)\alpha(x)$ eq $(\exists z)\alpha(z)$

Teorema de Susutitución

Teorema 2.5.6 [sustitución]

- Sean s, t, t_1, $t_2 \in$ TERM, α, β, $\varphi \in$ FORM tq. t y s están libres para x en α, y α y β están libres para \$ en φ
- Entonces:

i. $\models t_1 =' t_2 \rightarrow s[t_1/x] =' s[t_2/x]$

ii. $\models t =' s \rightarrow \alpha\ [t/x] \leftrightarrow \alpha\ [s/x]$

iii. $\models (\alpha \leftrightarrow \beta) \rightarrow (\varphi\ [\alpha/\$] \leftrightarrow \varphi\ [\beta/\$])$

Ejemplos:

$(\forall x)\alpha(x) \vee (\forall x)\beta(x)$ eq $(\forall x)\alpha(x) \vee (\forall y)\ \beta(y)$

$(\forall x)\alpha(x) \vee (\forall y)\beta(y)$ eq $(\forall x)(\forall y)\ (\alpha(x) \vee \beta(y))$

$(\forall x)\alpha(x) \rightarrow \beta$ eq $(\exists x)(\alpha(x) \rightarrow \beta)$ (si $x \notin FV(\beta)$)

$\models (\forall x)\alpha(x) \rightarrow (\exists x)\alpha(x)$

Forma Normal prenexa

Def 2.5.7 [forma normal prenexa]

- Sea $\alpha \in$ FORM. Decimos que α está en forma (normal) prenexa sii α es una fórmula abierta precedida de cero o más cuantificadores.
- Ejemplos:

$(\forall x)(\exists y)(\forall z)(\forall w)(f(z,w)='x \rightarrow f(w,z)='y)$

$(\forall y)(\forall z)(\exists x) (P(y,z) \rightarrow (P(y,x) \wedge P(x,z)))$

$(\forall x) (\forall y)(\forall z) ((P(x,y) \wedge P(y,z)) \rightarrow P(x,z))$

Teorema 2.5.8 [existencia de forma normal prenexa]

Para toda $\alpha \in$ FORM existe β tal que β está en forma prenexa y α eq β.

Relativización

- ¿Cómo traducimos la siguiente oración?

$(\forall \varepsilon>0)(\exists n)(\forall m>n)\ |f(n)- f(m)| < \varepsilon$

$\uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow$

$\in R \quad \in N \quad \in N$

(convenciones para los tipos de las variables!)

- Una primera ‘‘traducción’’ sería:

$(\forall \varepsilon)((\varepsilon>0)\rightarrow((\exists n\in N)(\forall m\in N)(m>n \rightarrow |f(n)- f(m)| < \varepsilon)))$

  - Hay dos propiedades implícitas: ‘‘ser un Natural’’ y ‘‘ser un Real’’.
  - Como $N\subseteq R$, consideramos $\mathcal{R} = \langle R,N, <, -,a,| |,0\rangle$. Ahora ‘‘ser un natural’’ se traduce usando un nuevo predicado $\underline{N}$:

- $(\forall \varepsilon) (0<\varepsilon \rightarrow((\exists n)(\underline{N}(n)\wedge((\forall m)(\underline{N}(m)\rightarrow(m>n\rightarrow |f(n)- f(m)|<\varepsilon)))))$

Cuantificadores Relativizados

- Se definen cuantificadores relativizados :
  - $(\exists n \in \underline{N})\alpha := (\exists n)(\underline{N}(n) \wedge \alpha)$
  - $(\forall n \in \underline{N})\alpha := (\forall n)(\underline{N}(n) \rightarrow \alpha)$
- Con esto, obtenemos lo que queríamos:
  - $(\forall \varepsilon)\ (0<\varepsilon \rightarrow ((\exists n \in \underline{N})(\forall m \in \underline{N})(m>n \rightarrow |f(n)-f(m)| < \varepsilon)))))$

  es por definición:
  - $(\forall \varepsilon)(0<\varepsilon \rightarrow ((\exists n)(\underline{N}(n) \wedge ((\forall m)(\underline{N}(m) \rightarrow (m>n \rightarrow |f(n)-f(m)|< \varepsilon)))))$
- Propiedades:
  - $\mathcal{M} \models (\forall x \in \underline{A})\alpha$ sii para todo $a \in A$ se cumple $\mathcal{M} \models \alpha[a/x]$
  - $\mathcal{M} \models (\exists x \in \underline{A})\alpha$ sii existe $a \in A$ tal que $\mathcal{M} \models \alpha[a/x]$