
Completitud en Lógica de Predicados

Corrección

- $\Gamma \vdash \varphi \Rightarrow \Gamma \models \varphi$
- Significa que las derivaciones expresan una consecuencia lógica.
- Establece una correspondencia tal que partiendo de nociones sintácticas (derivaciones) se llega a nociones semánticas (los modelos de Γ son modelos de φ)
- Se demuestra por inducción sobre Der.

Corolario de Corrección: Condición Suficiente de Consistencia.

H) Γ tiene modelo ($\exists M : M \models \Gamma$)

T) Γ es consistente.

Dem.

- Si en el teorema de corrección se considera $\varphi \equiv \perp$, obtenemos:
- $\Gamma \vdash \perp \Rightarrow \Gamma \models \varphi$
- Lo que se puede leer como: Si Γ es inconsistente, entonces Γ no tiene modelo.
- El contrarecíproco de esto es lo que se quería demostrar.

LQQD

Completitud

- $\Gamma \models \varphi \Rightarrow \Gamma \vdash \varphi$
- Significa que si una fórmula es consecuencia lógica de un conjunto de fórmulas, entonces hay una derivación con hipótesis en el conjunto y cuya conclusión es la fórmula.
- Establece una correspondencia que partiendo de nociones semánticas permite llegar a nociones sintácticas.

Completitud para PROP

1. Γ consistente \Rightarrow existe Γ^* consistente maximal tal que $\Gamma \subseteq \Gamma^*$

Resultados Auxiliares:

- Γ CM \Rightarrow para toda $\phi \in \text{PROP}$: $\phi \in \Gamma$ o bien $\neg \phi \in \Gamma$
- Γ CM \Rightarrow para toda $\phi, \psi \in \text{PROP}$: $\phi \rightarrow \psi \in \Gamma$ ssi (si $\phi \in \Gamma$ entonces $\psi \in \Gamma$)

2. Γ consistente \Rightarrow existe v tal que $v(\Gamma) = 1$

3. Corolario: $\Gamma \not\vdash \phi \Rightarrow \Gamma \models \phi$

4. Teorema de Completitud: $\Gamma \models \phi \Rightarrow \Gamma \vdash \phi$

Prueba para PROP

• Γ consistente \Rightarrow existe Γ^* consistente maximal tal que $\Gamma \subseteq \Gamma^*$

Enumeramos PROP: $\phi_1, \dots, \phi_n, \dots$

$$\Gamma_0 = \Gamma$$

$$\Gamma_{n+1} = \begin{cases} \Gamma_n \cup \{\phi_n\} & \text{si } \Gamma_n \cup \{\phi_n\} \text{ consistente} \\ \Gamma_n & \text{si no} \end{cases}$$

$$\Gamma^* = \bigcup \Gamma_n$$

• Γ consistente \Rightarrow existe v tal que $v(\Gamma) = 1$

- Tomamos Γ^* CM tal que $\Gamma \subseteq \Gamma^*$

- Definimos $v(p_i) = \begin{cases} 1 & \text{si } p_i \in \Gamma^* \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$

- Probamos $v(\Gamma^*) = 1$

- Como $\Gamma \subseteq \Gamma^*$ luego $v(\Gamma) = 1$

Completitud para Predicados

- $\Gamma \models \varphi \Rightarrow \Gamma \vdash \varphi$
 - $\Gamma \models \varphi \Leftrightarrow (\forall M : M \models \Gamma : M \models \varphi)$
 - $\Gamma \vdash \varphi \Leftrightarrow (\exists D : D \in \text{Der}_p : H(D) \subseteq \Gamma \text{ y } C(D) = \varphi)$
- El lema básico en esto es:
 - Γ consistente \Rightarrow existe \mathcal{M} tal que $\mathcal{M} \models \Gamma$
 - Para demostrarlo se construye un modelo.
 - Para construir el modelo se necesita trabajar sobre una teoría Consistente Maximal que incluya a Γ

Pero antes, deducción natural

$x \notin \text{FV}(\tau)$	$\frac{\forall x (\sigma(x) \rightarrow \tau)}{\sigma(x) \rightarrow \tau} \text{ (E}\forall^*)$ $\frac{\sigma(x) \rightarrow \tau \quad [\sigma(x)]^2}{\tau} \text{ (E}\rightarrow\text{)}$ $\frac{[\exists x \sigma(x)]^1 \quad \tau}{\tau} \text{ (E}\exists^{2**}\text{)}$ $\frac{\tau}{\exists x \sigma(x) \rightarrow \tau} \text{ (I}\rightarrow^1\text{)}$
----------------------------	--

* Correcta, porque x está libre para x en $\sigma(x) \rightarrow \tau$

** Correcta, porque $x \notin \text{FV}(\forall x (\sigma(x) \rightarrow \tau))$ y $x \notin \text{FV}(\tau)$

Otra derivación

$$\begin{array}{c}
 \boxed{x \notin FV(\sigma)} \quad \frac{[\sigma \rightarrow \tau(x)] \quad [\sigma]}{\tau(x)} \\
 \frac{\tau(x)}{\exists x \tau(x)} \\
 \frac{\exists x(\sigma \rightarrow \tau(x)) \quad \sigma \rightarrow \exists x \tau(x)}{\sigma \rightarrow \exists x \tau(x)}
 \end{array}$$

Ejercicio: indique las reglas y realice las justificaciones correspondientes.

Armando derivaciones

$$\begin{array}{c}
 \frac{[\tau(x)]}{\sigma \rightarrow \tau(x)} \\
 \frac{\sigma \rightarrow \tau(x)}{\exists x \tau(x)} \quad \frac{\sigma \rightarrow \tau(x)}{\exists x(\sigma \rightarrow \tau(x))} \\
 \frac{\exists x \tau(x) \quad \exists x(\sigma \rightarrow \tau(x))}{\exists x(\sigma \rightarrow \tau(x)) \quad \neg \exists x(\sigma \rightarrow \tau(x))} \\
 \frac{\perp}{\neg \sigma} \quad [\sigma] \\
 \frac{\perp}{\tau(x)} \\
 \frac{\tau(x)}{\sigma \rightarrow \tau(x)} \\
 \frac{\exists x(\sigma \rightarrow \tau(x)) \quad \neg \exists x(\sigma \rightarrow \tau(x))}{\perp} \\
 \frac{\perp}{\exists x(\sigma \rightarrow \tau(x))}
 \end{array}$$

Ejercicio: indique las reglas, marque las cancelaciones faltantes, y realice las justificaciones correspondientes.

$y \notin FV(\tau)$

Armando derivaciones

$$\begin{array}{c}
 \frac{[\tau(x)]}{\exists x \tau(x)} \\
 \frac{\exists x \tau(x) \rightarrow \tau(x)}{\exists y (\exists x \tau(x) \rightarrow \tau(y))} \\
 \frac{\exists y (\exists x \tau(x) \rightarrow \tau(y))}{\exists y (\exists x \tau(x) \rightarrow \tau(y))} \\
 \\
 \frac{\neg \exists x \tau(x) \quad [\exists x \tau(x)]}{\perp} \\
 \frac{\perp}{\tau(y)} \\
 \frac{\tau(y)}{\exists x \tau(x) \rightarrow \tau(y)} \\
 \frac{\exists x \tau(x) \rightarrow \tau(y)}{\exists y (\exists x \tau(x) \rightarrow \tau(y))}
 \end{array}$$

Ejercicio: indique las reglas, marque las cancelaciones faltantes, realice las justificaciones correspondientes, y complete la prueba con las reglas que faltan.

Lemas sobre derivaciones (1)

- Lema 2.8.4 [variables libres y constantes]
- Sea y una variable que no ocurre en Γ ni en φ .
 - Si $\Gamma \vdash \varphi$ entonces $\Gamma[y/c] \vdash \varphi[y/c]$
 - ¡Cuidado! $[y/c]$ no es la función de sustitución que conocemos.
 - El lema se demuestra mediante inducción en las derivaciones

Lemas sobre derivaciones (2)

- Lema
- Sea c una constante que no aparece en Γ ni en ψ ni en φ .
 - Si $\Gamma, \exists x \varphi(x) \rightarrow \varphi(c) \vdash \psi$ entonces $\Gamma \vdash \psi$
- Dem.
 1. $\Gamma \vdash (\exists x \varphi(x) \rightarrow \varphi(c)) \rightarrow \psi$
 2. $\Gamma \vdash (\exists x \varphi(x) \rightarrow \varphi(y)) \rightarrow \psi$, con y que no aparece en Γ ni en ψ ni en φ (Lema 2.8.4)
 3. ...

Lemas sobre derivaciones (2)

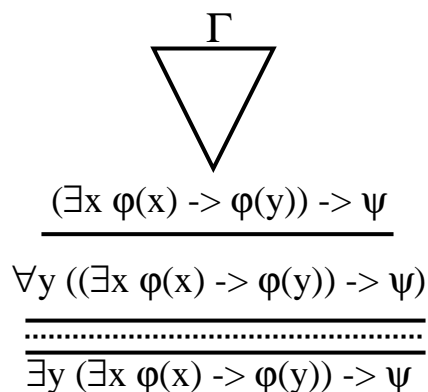
$\exists x \varphi(x) \rightarrow \exists y \varphi(y)$

1. pruebe que es una derivación correcta

2. pruebe que es teorema

3. verifique que ya vimos esto

$(\exists x \varphi(x) \rightarrow \exists y \varphi(y)) \rightarrow \exists y (\exists x \varphi(x) \rightarrow \varphi(y))$ **4. arme todo**



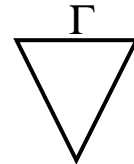
Lemas sobre derivaciones (2)

Version 1.2b

1. pruebe que es una derivación correcta

2. verifique que ya vimos esto

$\exists y (\exists x \varphi(x) \rightarrow \varphi(y))$



$(\exists x \varphi(x) \rightarrow \varphi(y)) \rightarrow \psi$

$\forall y ((\exists x \varphi(x) \rightarrow \varphi(y)) \rightarrow \psi)$

$\exists y (\exists x \varphi(x) \rightarrow \varphi(y)) \rightarrow \psi$

3. arme todo

Completitud para PROP

1. Γ consistente \Rightarrow existe Γ^* consistente maximal tal que $\Gamma \subseteq \Gamma^*$
2. Γ consistente \Rightarrow existe v tal que $v(\Gamma) = 1$
3. Corolario: $\Gamma \not\vdash \varphi \Rightarrow \Gamma \not\models \varphi$
4. Teorema de Completitud: $\Gamma \models \varphi \Rightarrow \Gamma \vdash \varphi$

Completitud para Predicados

1. T teoría consistente \Rightarrow existe T_m consistente maximal tal que $T \subseteq T_m$ (extension conservativa)
2. Γ consistente \Rightarrow existe \mathcal{M} tal que $\mathcal{M} \models \Gamma$
3. Corolario: $\Gamma \not\vdash \varphi \Rightarrow \Gamma \not\models \varphi$
4. Teorema de Completitud: $\Gamma \models \varphi \Rightarrow \Gamma \vdash \varphi$

Teorías

Notación: $\text{Cons}(\Gamma) = \{ \varphi \mid \Gamma \vdash \varphi \}$

Def 3.1.2 [teoría, conjunto de axiomas]

- Un conjunto $T \subseteq \text{SENT}$ es una teoría si es cerrado bajo derivación (es decir, $T \vdash \varphi \Rightarrow \varphi \in T$)
- Dada una teoría T , decimos que Γ es un conjunto de axiomas para T si $T = \text{Cons}(\Gamma)$

Def 3.1.3 [extensión, extensión conservativa]

Sean T una teoría en el lenguaje L y T' una teoría en L' .

T' es una extensión de T si $T \subseteq T'$

T' es una extensión conservativa de T si $T' \cap L = T$

Teorías de Henkin

Def 3.1.2 (iii) [teoría de Henkin]

- Una teoría T es de Henkin si para toda sentencia $\exists x\phi \in \text{SENT}$ existe un símbolo de constante c tal que $\exists x\phi \rightarrow \phi[c/x] \in T$. c se llama testigo de $\exists x\phi$.

Lema 3.1.8 [ser de Henkin se preserva en extensiones]

- Si T es una teoría de Henkin y T' es una extensión de T , en el mismo lenguaje, entonces T' es de Henkin.
 - Como no se cambia el lenguaje, no aparecen nuevos existenciales, y no preciso incorporar nuevos testigos

Operador *

Def 3.1.4 [L^* , T^*]

- Sea T una teoría con lenguaje L .
- L^* es la extensión de L que se obtiene agregando un símbolo c para cada sentencia $\exists x \phi(x) \in L$.
- $T^* = \text{Cons}(T \cup \{ \exists x\phi(x) \rightarrow \phi(c) \mid \exists x\phi(x) \in \text{SENT con testigo } c \})$

Completitud: Paso 1

- T teoría consistente \Rightarrow existe T_m consistente maximal tal que $T \subseteq T_m$ (extensión conservativa)
 - T^* conservativa con respecto a T con idea de ser de Henkin (pero no se sabe si llega a serlo).
 - T_w conservativa con respecto a T y de Henkin
 - T_m De Henkin, Conservativa respecto a T y CM.
- $T \subseteq T^* \subseteq T_w \subseteq T_m$

Teorías de Henkin II

Lema 3.1.5

T^* es conservativo con respecto a T ($T^* \cap L = T$).

- La idea es probar que:
 - $\Gamma, \exists x \varphi \rightarrow \varphi[c/x] \vdash \psi \Rightarrow T \vdash \psi$
- ¡Qué bueno, ya lo probamos!

Teorías de Henkin III

Lema 3.1.6 [T_w]

- Definimos:
 - $T_0 = T$
 - $T_{n+1} = (T_n)^*$
 - $T_w = \cup T_n$
- Luego T_w es una teoría de Henkin y es conservativa con respecto a T .

Demostracion

1. Cada T_n es conservativa sobre T
2. T_w es teoría
3. T_w es de Henkin
4. T_w es conservativa sobre T

Demostracion

<p>Induccion Parte 1</p> <p>$T_0 = T$ $T_{n+1} = T_n^*$, que es conservativa sobre T Ser conservativa sobre T es una equivalencia</p>	<p>$\exists x \varphi \in L_w$ Parte 3</p> <p>\rightarrow $(\exists k :: \exists x \varphi \in L_k)$ \rightarrow $(\exists k, c :: \exists x \varphi \rightarrow \varphi(c) \in T_{k+1})$ \rightarrow $(\exists c :: \exists x \varphi \rightarrow \varphi(c) \in T_w)$</p>	
<p>$T_w \vdash \sigma$ Parte 2</p> <p>\rightarrow (Def. \vdash) $(\exists \varphi_1, \dots, \varphi_n \in T_w :: \varphi_1, \dots, \varphi_n \vdash \sigma)$ \rightarrow (Def. T_w, y encajonamiento) $(\exists k, \varphi_1, \dots, \varphi_n : \varphi_1, \dots, \varphi_n \in T_k : \varphi_1, \dots, \varphi_n \vdash \sigma)$ \rightarrow (Teoria) $(\exists k :: \sigma \in T_k)$ \rightarrow (Def. T_w) $\sigma \in T_w$</p>	<div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin: 5px;"> <p>$\sigma \in L$ y $T_w \vdash \sigma$ \rightarrow $\sigma \in L$ y $(\exists k :: T_k \vdash \sigma)$ \rightarrow $\sigma \in L$ y $T \vdash \sigma$ Parte 4</p> </div>	
Lógica	Predicados - Completitud	25

Un poco de orden (1)

- Un conjunto parcialmente ordenado (poset) es una estructura (U, \leq) tal que
 - $(\forall a :: a \leq a)$
 - $(\forall a, b : a \leq b, b \leq a : a = b)$
 - $(\forall a, b, c : a \leq b, b \leq c : a \leq c)$
 - por ejemplo, $(Pot(Nat), \subseteq)$
- Un subconjunto $C \subseteq U$ es una cadena si
 - $C \neq \emptyset$ y $(\forall a, b :: a \leq b$ ó $b \leq a)$
 - por ejemplo, $\{\{\}, \{1\}, \{1,2\}, \{1,2,3\}\}$

Un poco de orden (2)

- Un elemento $a \in U$ es una cota superior de $C \subseteq U$ si
 - $(\forall c \in C :: c \leq a)$
 - por ejemplo, $\{1,2,3,4,5\}$ es cota superior de $\{\{\}, \{1\}, \{1,2\}, \{1,2,3\}\}$
 - la union tambien es una cota superior
- Un elemento $m \in U$ es maximal si
 - $(\forall a \in U : m \leq a : a = m)$
 - por ejemplo, Nat

Un poco de orden (3)

- Lema de Zorn
 - *Sea* U un poset. *Luego*,
 - *si* toda cadena de U tiene una cota superior en U
 - *entonces* U tiene un elemento maximal.

Completitud: Parte I (cont.)

Lema 3.1.7 [Lindenbaum]

- **Si T es una teoría consistente, entonces existe T_m consistente maximal tal que $T \subseteq T_m$**
 1. Sea $A := \{T' : T' \text{ es extension consistente de } T\}$
 2. Toda cadena $\{T_i : i \in I\}$ tiene una cota superior:
 $\cup \{T_i : i \in I\}$
 3. Existe una extension consistente maximal que llamamos T_m (Lema de Zorn)

¿Qué tenemos hasta ahora?

- Partimos de Γ consistente.
- Tomamos $T = \text{Cons}(\Gamma)$, que también es consistente
- Definimos T_w que es una extensión conservativa (luego consistente) de T y es de Henkin (lema 3.1.6)
- T_w puede extenderse a una teoría maximal T_m (lema 3.1.7)
- T_m es de Henkin (lema 3.1.8: no cambiamos el lenguaje) y también una extensión conservativa maximal de T

Completitud: Paso 2

Lema 3.1.1 [consistencia \Rightarrow existencia de modelo]

Si Γ es consistente,

entonces existe \mathcal{M} tal que $\mathcal{M} \models \Gamma$

- Esquema de la prueba:
 - Sea $T = \text{Cons}(\Gamma)$
 - Consideramos T_m una teoría de Henkin tal que es extensión consistente maximal de T_w .
 - (L_m es el lenguaje de T_m)
 - Construimos un modelo.

Construcción del modelo sintáctico

- $A := \{ t \in L_m \mid t \text{ es cerrado} \}$
- Para cada símbolo de constante $\underline{c} \in L_m$ se define la constante $c^\wedge := \underline{c}$
- Para cada símbolo de función n-ario $f \in L_m$ se define la función $f^\wedge: A^n \rightarrow A$ como: $f^\wedge(t_1..t_n) = f(t_1..t_n)$
- Para cada símbolo de predicado p-ario $P \in L_m$ se define la relación $P^\wedge \subseteq A^p$ como
$$P^\wedge = \{ \langle t_1..t_n \rangle \mid T_m \vdash P(t_1..t_p) \}$$
- $\sim := \{ (t,s) \in A^2 \mid T_m \vdash t = s \}$
 \sim es de equivalencia ($[t]$ denota la clase de t)

Construcción del modelo sintáctico (II)

- Se construye \mathcal{M} :

$\mathcal{M} = \langle A/\sim, \tilde{P}_1, \dots, \tilde{P}_n, \tilde{f}_1, \dots, \tilde{f}_m, \{c_i \mid i \in I\} \rangle$ (modelo sintáctico)

$\tilde{c}_i := [c_i]^\wedge$

$\tilde{f}_j([t_1], \dots, [t_{a_j}]) = [f_j^\wedge(t_1, \dots, t_{a_j})]$

$\tilde{P}_i := \{ \langle [t_1], \dots, [t_{r_i}] \rangle \mid \langle t_1, \dots, t_{r_i} \rangle \in P_i^\wedge \}$

está bien definido pues $=^\wedge$ es una congruencia!

Se prueba : $(\forall \varphi \in T_m :: \mathcal{M} \models \varphi)$. O sea, $\mathcal{M} \models T_m$

Modelos y Teorías

Def [Mod]

$\text{Mod}(\Gamma) = \{ \mathcal{M} \mid \mathcal{M} \models \alpha \text{ para toda } \alpha \in \Gamma \}$

también escribimos $\mathcal{M} \models \Gamma$ por $\mathcal{M} \in \text{Mod}(\Gamma)$

Sea \mathcal{K} una clase de estructuras para un tipo de similaridad:

Def [Th]

$\text{Th}(\mathcal{K}) = \{ \alpha \mid \mathcal{M} \models \alpha \text{ para todo } \mathcal{M} \in \mathcal{K} \}$

Propiedades:

- $\Gamma \subseteq \text{Th}(\text{Mod}(\Gamma))$
- $\mathcal{K} \subseteq \text{Mod}(\text{Th}(\mathcal{K}))$
- $\text{Cons}(\Gamma) = \text{Th}(\text{Mod}(\Gamma))$

Fin

Prueba para Predicados

- T teoría consistente \Rightarrow existe T_m consistente maximal tal que $T \subseteq T_m$ (extensión conservativa)

Aplica el lema de Zorn para obtener T_m
(El lenguaje puede no ser numerable debido a los símbolos de constante \underline{a})

- Γ consistente \Rightarrow existe \mathcal{M} tal que $\mathcal{M} \models \Gamma$

(1) Definimos $_*$ (2) $T_0 = \text{Cons}(\Gamma)$ (3) T_m CM } $\Rightarrow T_m$ es de
 $T_{n+1} = (T_n)^*$ $T_w \subseteq T_m$ } Henkin
 $T_w = \cup T_n$

- (i) Tomamos T_m CM tal que $\Gamma \subseteq T \subseteq T_w \subseteq T_m$ (donde $T = \text{Cons}(\Gamma)$)
- (ii) Definimos la estructura \mathcal{M} (se utiliza la definición de T_m)
- (iii) Probamos $\mathcal{M} \models T_m$

Como $\Gamma \subseteq T_m$ luego $\mathcal{M} \models \Gamma$