

## Examen de Cálculo Numérico

12 de agosto de 2003

- **Tiempo de resolución: 3 horas.**
- **Comenzar cada ejercicio en una hoja diferente.**
- **Se requiere un mínimo de 60 puntos para aprobar el examen.**

**Ejercicio 1** ( Tema: Aproximación de mínimos cuadrados ) ( 26 puntos ) ( 5 + 7 + 7 + 6 )

- Describa el problema de aproximación numérica de funciones y la estrategia de mínimos cuadrados
- Demuestre que la solución de  $(A'A)x = A'b$  es también solución del problema de mínimos cuadrados
- Desarrolle el uso de la descomposición QR de la matriz A en el problema de mínimos cuadrados. Compare este método con el de la resolución de las ecuaciones normales.
- Explique los inconvenientes de resolver el siguiente sistema, utilizando la resolución de ecuaciones normales.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ \varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad 0 < \varepsilon \ll 1, \quad \text{siendo la matriz A de orden } n=3.$$

**Ejercicio 2** ( Tema: ED ) ( 26 puntos ) ( 9 + 9 + 8 )

- Explique el planteo de los métodos de paso adaptativo para la resolución de problemas EDO y la justificación de su uso. Describa como implementar un algoritmo de paso adaptativo genérico.
- Formule la expresión de una EDP parabólica unidimensional en el espacio, con condiciones de borde. Explique cómo resolver este tipo de ecuaciones utilizando un método implícito y las diferencias de este enfoque con respecto al uso de un método explícito.
- Estudie la estabilidad del método implícito propuesto en la parte b), aplicando el criterio de Von Neumann.

**Ejercicio 3** ( Tema: Ecuaciones no lineales ) ( 23 puntos ) ( 7 + 6 + 10 )

- Defina método iterativo general para la resolución de ecuaciones no lineales. Explique porqué al utilizar un MIG no siempre es posible lograr una precisión prefijada en el valor de la raíz de la ecuación.
- Describa el método de Newton-Raphson para la resolución de sistemas de ecuaciones no lineales, comentando sus características.
- Comente una alternativa para reducir el número de operaciones requeridas por el algoritmo. Fundamente cuál es el mecanismo más apropiado para resolver el sistema lineal resultante en cada paso.

**Ejercicio 4** ( Tema: Valores y vectores propios.) ( 25 puntos ) ( 8 + 7 + 10 )

- Enuncie el teorema de Gerschgorin y pruebe el resultado sobre la ubicación de los valores propios de una matriz A. Explique la utilidad de este teorema para hallar valores propios utilizando técnicas numéricas.
- Explique la utilidad de las técnicas de deflación y ejemplifique su uso. Indique que relación existe entre deflación y matrices de Housholder.
- Expresa el método de construcción de la matriz de Housholder y describa el algoritmo que permite llevar a la forma de Hessenberg.