

Examen de Cálculo Numérico

4 de Agosto de 2005

- Tiempo de resolución: 3 horas.
- Inicie cada ejercicio en una hoja diferente.
- Se requiere un mínimo de 60 puntos para aprobar el examen.

Ejercicio 1 (Temas: Errores e Integración)

(23 puntos) (5+10+8)

- a) Nombre y describa los cinco errores comunes que pueden ocurrir al efectuar cálculos en un sistema de representación de punto flotante.
- b) Explique el método del trapecio y deduzca la fórmula de su error. Explique el concepto de cuadratura compuesta y estime el error cometido al utilizar la regla del trapecioide compuesta.
- c) Describa los algoritmos de cuadratura automáticos y adaptativos. Explique el método de Romberg para la determinación automática del paso de integración.

Ejercicio 2 (Tema: Valores y Vectores Propios)

(27 puntos) (8+12+7)

- a) Explique el fenómeno de estabilidad del cálculo de los valores propios frente a perturbaciones en la matriz. Ilustre con el ejemplo de Wilkinson y explíquelo.
- b) Exponga el método de las potencias y presente un pseudocódigo del algoritmo. Explique cómo se calcula el menor valor propio de una matriz con una variante del método de las potencias, sin calcular la inversa de dicha matriz.
- c) Explique cuándo se pueden utilizar las técnicas de deflación. ¿Cuál es la vinculación entre deflación y la matriz de Householder ?.

Ejercicio 3 (Tema: Interpolación)

(25 puntos) (8+12+5)

- a) Plantee la formulación general del problema de interpolación, y determine un conjunto de funciones base para cada uno de los casos siguientes: interpolación polinómica (dar tres bases distintas), interpolación lineal a trozos, Hermite cúbico a trozos.
- b) Describa los algoritmos que permiten resolver los siguientes problemas:
 - (i) Calcular los coeficientes del interpolante de un conjunto de n puntos.
 - (ii) Evaluar el interpolante en un punto dados los coeficientes para el caso de utilizar: matriz de Vandermonde, interpolación de Lagrange, lineal a trozos, spline cúbico a trozos.Compare la complejidad computacional de cada uno de los métodos mencionados en (i) y (ii).
- c) Comparar la interpolación polinómica, con la lineal a trozos y spline cúbica a trozos desde el punto de vista del error de aproximación, en el caso de puntos equiespaciados.

Ejercicio 4 (Tema: Ecuaciones diferenciales)

(25 puntos) (8+10+7)

- a) Defina el concepto de estabilidad numérica y describa el criterio práctico para determinar la estabilidad de un esquema de resolución de EDOs. Explique por qué se utiliza el problema test y ejemplifique para el problema $y'' = -2xy' - y$; con condiciones iniciales $y(0)=1$; $y'(0)=1$.
- b) Determine si los siguientes enunciados son verdaderos o falsos, justificando su respuesta.
 - (i) El orden de consistencia de un método de resolución de EDOs está dado por el orden de su error global de truncamiento.
 - (ii) Un problema EDO con condiciones de borde puede resolverse mediante un esquema de aproximación de diferencias finitas, implicando en general la resolución de un sistema no lineal de ecuaciones.
 - (iii) El método del punto medio tiene un buen orden de convergencia, pero su estabilidad numérica restringe el tipo de problemas a los cuales puede aplicarse satisfactoriamente.
 - (iv) Por ser implícito, el método de Euler hacia atrás es aplicable para la resolución de cualquier problema EDO.
- c) Presente la formulación genérica de un método multipaso. Presente los conceptos de estabilidad y consistencia para este tipo de métodos y enuncie los resultados teóricos que permiten determinar ambas propiedades para los métodos multipaso.