Examen de Cálculo Numérico **30 de diciembre de 2003**

- **Tiempo de resolución: 3 horas.**
- **Comenzar cada ejercicio en una hoja diferente.**
- **Se requiere un mínimo de 60 puntos para aprobar el examen.**

<u>Ejercicio 1</u> (Tema: Errores y Sistemas Lineales) **(26 puntos)** (10 + 11 + 5)

a) Defina la noción de número de condición de un algoritmo (C_A) y de un problema (C_P). Brinde un ejemplo de cálculo de C_P y un ejemplo de cálculo de C_A.
b) Defina el número de condición de una matriz. Dado un sistema lineal Ax=b, muestre el efecto de las perturbaciones cuando éstas sólo se dan en la matriz A y cuando sólo se dan en el vector b. Enuncie el resultado general que da una cota superior del error relativo en la solución x, en función de los errores relativos en la matriz A y en el vector b. Establezca el vínculo entre el número de condición de la matriz A y el número de condición del problema Ax=b.
c) Aplique el teorema enunciado anteriormente al caso en que A y b solo están afectados por los errores de redondeo de la representación de punto flotante. En este caso, y suponiendo que cond(A) = 1.10^{-6} y que $\varepsilon_{MACH} = 1.10^{-16}$, cuál es el numero de cifras significativas en la solución x ?

<u>Ejercicio 2</u> (Tema: ED) **(27 puntos)** (9 + 9 + 9)

a) Formule y describa las características de los métodos multipaso para la resolución de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias. Instancie la formulación genérica de un método multipaso para obtener el método del punto medio. Estudie su estabilidad y explique el motivo de lo limitado de su uso.
b) Presente la formulación de los métodos de Runge-Kutta, comentando sus características. Presente el método explícito de segundo orden y estudie su estabilidad para el caso $c_2 = 1$.
c) Describa un método para la resolución de Ecuaciones diferenciales en Derivadas Parciales hiperbólicas y presente su formulación.

<u>Ejercicio 3</u> (Tema: Valores y Vectores Propios) **(25 puntos)** (5 + 6 + 7 + 7)

a) Establezca cuál es el método que permite calcular todos los valores y vectores propios de una matriz simultáneamente. Explique el algoritmo base del método.
b) Ejemplifique cómo repercute una perturbación de una matriz en sus valores propios. Generalice los efectos considerando una matriz A diagonalizable perturbada según la expresión $A(\varepsilon)=A+\varepsilon B$.
c) Establezca cuál es la utilidad de las transformaciones lineales (rotaciones y reflexiones), esto es, qué tipo de matrices se quieren obtener, qué propiedades genéricas poseen y cómo se las aplica en general a una matriz A.
d) Exprese la forma matricial y el significado de la transformación lineal rotación $R_{pq}(\varphi)$. Muestre qué relación existe entre las matrices A y $A'' = R_{pq}(\varphi) \cdot A \cdot R_{pq}(-\varphi)$.

<u>Ejercicio 4</u> (Tema: Integración Numérica) **(22 puntos)** (9 + 7 + 6)

a) Explique el método de Simpson, deduciendo la fórmula del error. Exprese las condiciones que deben cumplir los puntos utilizados en Simpson para que el método pueda enmarcarse dentro de las reglas de integración de Newton-Cotes.
b) Plantee el concepto de regla de integración compuesta. Deduzca una forma de estimar el error al utilizar este tipo de métodos.
c) Presente un algoritmo automático y adaptativo para el cálculo numérico de integrales.