Examen de Cálculo Numérico **23 de diciembre de 2004**

- **Tiempo de resolución: 3 horas.**
- **Comenzar cada ejercicio en una hoja diferente.**
- **Se requiere un mínimo de 60 puntos para aprobar el examen.**

Ejercicio 1 (Tema: Sistemas de ecuaciones lineales) **(21 puntos)** (6+9+6)

a) Clasifique los tipos de matrices involucradas en la resolución de sistemas lineales (según su estructura, es decir la distribución de coeficientes no nulos). Describa las características de las metodologías de resolución.
b) Defina la descomposición LU. Compare el método de resolución de sistemas lineales utilizando la descomposición LU con el de eliminación Gaussiana y mencione la conveniencia de su uso.
c) Muestre los mecanismos de pivoteo en la eliminación Gaussiana y explique su utilidad. Explique cómo se extiende el uso de las técnicas de pivoteo cuando se utiliza la descomposición LU.

Ejercicio 2 (Tema: Valores y vectores propios) **(23 puntos)** (8+8+7)

a) Defina las regiones ***Ri*** del teorema de Gershgorin y demuestre que la unión de cualesquiera k de esas regiones que sea disjunta con las n-k restantes, debe contener exactamente k valores propios.
b) Exprese la propiedad fundamental de las transformaciones de semejanza. Explique las características de una sucesión de semejanzas, qué tipo de matriz se quiere hallar, y cómo ése objetivo varía según sea simétrica o no la matriz original. ¿Cómo se puede estimar el error de cada paso de la sucesión para calcular valores propios?
c) Describa la variante del método de las potencias para hallar el valor propio de módulo más pequeño. ¿Cómo se puede aplicar la descomposición LU para acelerar cada paso del método? ¿Qué determina la mayor o menor velocidad asintótica de convergencia del método a la solución?

Ejercicio 3 (Tema: Ecuaciones Diferenciales con condiciones de borde) **(29 puntos)** (10+10+9)

a) Explique el funcionamiento del método de los disparos para la resolución de una EDO con condiciones de borde. ¿Cuál es el motivo por el que se propone la utilización del método de la secante y no uno más eficiente cómo el de Newton-Raphson? Describa el principal inconveniente del método de los disparos y de qué modo lo soluciona el método de los disparos paralelos.
b) Presente la formulación del tipo de EDP que están asociadas a la resolución de EDP hiperbólicas de segundo orden con condiciones de borde. Explique el funcionamiento del método de las características para resolver este tipo de problemas. Ejemplifique para un caso sencillo.
c) Explique cómo se manejan las condiciones de borde en la resolución de una EDP elíptica $\nabla^2 f = -S(x,y),\ \ a \le x \le b,\ \ c \le y \le d$ con condiciones de borde $f_x = 0$ en $x = a$; $f = 0$ en $x = b$; $f_y = 0$ en $y = c$; $f = 0$ en $y = d$, utilizando una molécula de cálculo de 5 puntos.

Ejercicio 4 (Tema: Aproximación numérica y mínimos cuadrados) **(27 puntos)** (5+6+5+11)

a) Demostrar la siguiente propiedad: "Dado un conjunto de vectores reales mx1, ortonormales $\{q_1,\ldots, q_k\}$ y otro conjunto de vectores $\{a_1,\ldots, a_{k+1}\}$ también reales mx1, tales que los espacios generados $[q_1, q_2,\ldots, q_i] = [a_1, a_2, \ldots, a_i]$ son iguales para todo $i=1,2,\ldots, k$. Entonces existe un vector q_{k+1} tal que el conjunto $\{q_1,\ldots, q_k, q_{k+1}\}$ es ortonormal y genera el mismo espacio $[q_1,\ldots, q_k, q_{k+1}]= [a_1,\ldots, a_k, a_{k+1}]$ que el correspondiente conjunto de vectores a".
b) Enunciar precisamente y demostrar el teorema QR que asegura la existencia de la descomposición de una matriz A en el producto de una matriz ortogonal por una triangular superior. (Sugerencia: utilizar la propiedad anterior en la demostración). ¿Cuál es la relación entre el rango de A y el rango de R en la descomposición QR de A?.
c) Explique las diferencias entre el algoritmo de Gram-Schmidt clásico y modificado, las ventajas relativas de uno sobre el otro, ilustrándolas con las inestabilidades numéricas que se obtienen en uno y otro caso sobre el siguiente ejemplo: hallar la descomposición QR de la matriz $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ e & 0 & 0 \\ 0 & e & 0 \\ 0 & 0 & e \end{pmatrix}$ donde ε cumple que la representación en punto flotante $\mathrm{fl}(1+\varepsilon^2)=1$. (¿Qué significa esto ultimo en términos del $\varepsilon_{\mathrm{MACH}}$?).
d) Dada una tabla de valores $\{(t_i,y_i) : i=1,\ldots,m\}$ se desea encontrar los coeficientes del polinomio cúbico P que mejor ajuste los datos $y_i \approx P(t_i)$ para $i=1,\ldots,m$ en el sentido de mínimos cuadrados. Suponiendo que $m>4$ (sistema sobredeterminado) explique cómo utilizar la descomposición QR y las ecuaciones normales para resolver este problema. Explique las posibles ventajas y desventajas de un método sobre el otro.