

## Examen de Cálculo Numérico

14 de diciembre de 2005

- Tiempo de resolución: 3 horas.
- Inicie cada ejercicio en una hoja diferente.
- Se requiere un mínimo de 60 puntos para aprobar el examen.

### **Ejercicio 1** (Tema: Sistemas de Ecuaciones Lineales)

( 24 puntos ) (7+9+8)

- Explique las técnicas de pivoteo utilizadas en la eliminación gaussiana, comentando su utilidad y definiendo la matriz de permutación.
- Presente el método de resolución de sistemas de ecuaciones lineales basado en la descomposición LU. Relacione el método con la eliminación gaussiana y argumente sobre la unicidad de la descomposición que da nombre al método (para esta parte, suponga que no es necesario aplicar técnicas de pivoteo).
- Describa el efecto de las técnicas de pivoteo sobre la descomposición LU, explicando cómo se procede a la resolución del sistema lineal correspondiente.

### **Ejercicio 2** (Tema: Valores y Vectores Propios)

( 25 puntos ) (8+8+9)

- Describa cómo se utilizan la transformación de semejanza para el cálculo de los valores propios. Mencione algunos métodos que utilicen transformaciones de semejanza. Describa la forma de Hessenberg para el caso de matrices simétricas.
- Represente el método QR de resolución de valores y vectores propios.
- Expresé la conveniencia de llevar la matriz a la forma de Hessenberg, antes de aplicar QR. Describa un método para acelerar QR partiendo de la forma de Hessenberg y suponiendo que los valores propios son distintos en valor y norma.

### **Ejercicio 3** (Tema: Integración)

( 26 puntos ) (8+9+9)

- Describa la regla del punto medio y la regla del trapecio para la integración numérica en un intervalo  $[a,b]$ . Deduzca los errores respectivos mediante un desarrollo de Taylor en torno al punto medio  $m$ . Compare ambos errores y comente ventajas y desventajas de ambos métodos. Si se conoce el valor de la función en  $a$ ,  $b$ , y  $m$ , ¿qué método utilizaría?. Justifique su respuesta.
- Describa la estrategia general de los métodos de cuadratura compuesta ( $n$  divisiones equiespaciadas). Deduzca del cálculo de la parte (a) el orden del error de la regla del trapecioide compuesta y utilice el resultado para obtener una regla que permita estimar el error cometido y determinar automáticamente las divisiones necesarias para asegurar una precisión dada.
- El método automático de cuadratura compuesta de la parte (b) admite dos refinamientos: (i) método automático y adaptativo (o selección local del paso de integración) y (ii) método de Romberg (o extrapolación al límite). Discuta las ventajas e inconvenientes de ambos refinamientos entre sí y respecto al método de la parte (b). ¿Cuál refinamiento aplicaría para integrar una función que tiene una pequeña zona irregular, y es regular en el resto del intervalo?

### **Ejercicio 4** (Tema: Ecuaciones diferenciales)

( 25 puntos ) (8+9+8)

- Presente el método de la matriz de banda para resolver EDOs con condiciones de borde. Ejemplifique para el caso  $y'' = f(x, y, y')$ , comentando alternativas para mejorar la precisión del resultado y para mejorar el desempeño computacional del método de resolución.
- Explique cómo se resuelve una EDP mediante el método de diferencias finitas. Presente un esquema de discretización explícito de dos puntos y de segundo orden para la aproximación de las derivadas parciales. Explique qué cambia si se orienta la búsqueda a una formulación implícita.
- Presente la formulación de una EDP parabólica con condiciones de borde. Describa un método implícito y uno explícito para su resolución, explicando cómo se calcula la solución completa en cada caso.