

Examen de Cálculo Numérico

30 de julio de 2004

- Tiempo de resolución: 3 horas.
- Comenzar cada ejercicio en una hoja diferente.
- Se requiere un mínimo de 60 puntos para aprobar el examen.

Ejercicio 1 (Tema: Ecuaciones no lineales) (23 puntos) (7+8+8)

- Describa el método de bipartición para la resolución de ecuaciones no lineales. Indique las condiciones de convergencia y demuestre que bajo esas hipótesis el método converge.
- Defina los conceptos de Método Iterativo General (MIG) para la resolución de una ecuación no lineal y su orden de convergencia. Deduzca la fórmula de un acelerador de los MIGs de primer orden.
- Exponga el método de Newton-Raphson para la resolución de sistemas de ecuaciones no lineales. Proponga alternativas para su aplicación en caso de no disponer de las derivadas parciales de las componentes del sistema a resolver.

Ejercicio 2 (Tema: Valores y vectores propios) (29 puntos) (6+7+8+8)

- Defina las regiones circulares R_i según lo expresado en el Teorema de Gershgorin y demuestre que los valores propios de \mathbf{A} están contenidos dentro de la región R definida por

$$R = \bigcup_{i=1}^{i=n} R_i .$$

- Si se sabe que un valor propio está cercano a un número dado, ¿qué método utilizaría para hallarlo? Describa el funcionamiento del mismo.
- Nombre y describa la técnica en la que, una vez conocido un valor propio de una matriz $\mathbf{A}^{n \times n}$, se halla una matriz $\mathbf{A}'^{(n-1) \times (n-1)}$ que tenga los mismos valores propios de \mathbf{A} , exceptuando el ya conocido. ¿Cuál es la relación de esta técnica con la matriz de Householder?
- Expresé el método QR para la resolución de valores y vectores propios. ¿Qué recomendación haría para reducir el número de operaciones del cálculo de Q_k y R_k ?

Ejercicio 3 (Tema: Errores en Resolución de Ecuaciones Diferenciales) (25 puntos) (7+9+9)

- Describa los conceptos de error local y error global en la resolución numérica de EDO. Ejemplifique en un caso particular de un problema de integración y argumente sobre la relación existente entre ambos errores en un problema EDO genérico.
- Explique cómo se propagan los errores en las condiciones iniciales en un método numérico de resolución de EDO. Determine una cota de la contribución de los errores locales al error global, suponiendo que se encuentran acotados en magnitud por un valor fijo δ .
- Defina el concepto de estabilidad de un esquema de discretización para la resolución de EDP. Explique cómo se suele justificar en la práctica la estabilidad numérica de un esquema de resolución de EDP, ejemplificando para el esquema de Euler hacia atrás.

Ejercicio 4 (Tema: Integración numérica) (23 puntos) (7+8+8)

- Comente las diferencias entre las reglas de integración numérica de Newton-Coates y las reglas de Gauss. Establezca cómo se calculan los coeficientes en una regla de Gauss de 2 puntos.
- Explique el concepto de regla de cuadratura compuesta, y cómo se estima el error cometido, ejemplificando para el método del trapecio.
- Explique cómo se utiliza el método de extrapolación de Richardson para implementar la determinación automática del paso h requerido para lograr una determinada precisión en un método automático de cuadratura.