

Examen de Cálculo Numérico

4 de marzo de 2005

- Tiempo de resolución: 3 horas.
- Comenzar cada ejercicio en una hoja diferente.
- Se requiere un mínimo de 60 puntos para aprobar el examen.

Ejercicio 1 (Tema: Errores y sistemas de ecuaciones lineales) (25 puntos) (9+9+7)

- Defina conceptualmente el número de condición de un algoritmo $C_{A(x)}$ y de un problema $C_{p(x)}$, indicando qué relación tienen con los errores cometidos en la resolución numérica de un determinado problema. Ejemplifique hallando el $C_{A(x)}$ del algoritmo de representación en el sistema FP y el $C_{p(x)}$ del problema de potenciación (dado x , calcular el valor de x^a , a cte).
- Estudie el $C_{p(x)}$ del problema de resolución de sistemas lineales $A \cdot x = b$, considerando primero perturbaciones en la matriz A y luego en el vector b . Relacione los resultados obtenidos con el número de condición de la matriz A . Enuncie el resultado que surge de considerar perturbaciones simultáneas en A y b y determine una cota para el caso en que solamente se consideran los errores de la representación de punto flotante en los elementos de A y de b .
- A partir de la definición del residuo, explique por qué el método de eliminación gaussiana produce residuos pequeños comparados con $\|b\|_1$.

Ejercicio 2 (Tema: Interpolación) (23 puntos) (8+8+7)

- Dibuje una curva de Bezier definida por 4 puntos. Escriba las cuatro funciones de Bernstein correspondientes y explique las propiedades geométricas fundamentales de la curva, en relación a los "puntos de control" y al "polígono acotante".
- Describa las propiedades de continuidad de las spline cúbicas. Exponga conceptualmente cómo se establecen las derivadas en los puntos y explique el motivo por el que se suelen imponer condiciones en los puntos extremos. Establezca las condiciones más comunes que se suelen aplicar en los puntos extremos.
- Describa la interpolación polinómica basada en monomios, incluyendo su expresión matricial. Explique por qué no es apropiado el método y bajo qué condiciones el sistema a resolver tiene solución única. ¿Cuál es la dificultad fundamental al ingresar un nuevo dato al sistema?

Ejercicio 3 (Tema: Ecuaciones Diferenciales) (25 puntos) (7+9+9)

- Defina los conceptos de error local y error global para un método numérico de resolución de ED. Explique qué componentes tiene el error local, y relaciónelos con los conceptos de *consistencia* y *estabilidad* del método de resolución.
- Explique la motivación y las bases del funcionamiento de los métodos de paso adaptativo para la resolución de EDO. Desarrolle las dos alternativas para estimar el error local y describa de modo general los métodos de Runge-Kutta-Fehlberg.
- Describa un esquema explícito de primer orden para la resolución de una EDP hiperbólica cuya formulación es $u_t + a u_x = 0$, con a cte., $a > 0$. Explique cómo se resuelve la ecuación en el caso que $a < 0$. Estudie la estabilidad del esquema propuesto para el caso $a > 0$.

Ejercicio 4 (Tema: Ecuaciones no lineales) (27 puntos) (6+7+5+7)

- Describa el método iterativo general para resolver ecuaciones no lineales. Explique su condición de convergencia.
- Deduzca el método de Aitken para acelerar la convergencia de un método iterativo de primer orden.
- Describa un método iterativo de resolución de ecuaciones no lineales que utilice los valores de los pasos $i-1$ e $i-2$ para calcular el valor en el paso i .
- Describa el método de Newton-Raphson para la resolución de sistemas de ecuaciones no lineales.