Ejercicio 2

a) Los problemas de ecuaciones diferenciales ordinarias con condiciones de borde estudiados en el curso tienen una formulación del tipo $y''= f(x,y,y')$ con **condiciones de borde** $y(a)=a$, $y(b)=b$ en los bordes del dominio de solución. Contrariamente a los problemas de condición inicial, no existe una teoría que asegure la existencia de solución para este tipo de problemas. Es posible, sin embargo, plantear esquemas que hallan soluciones en caso de existir.

Método de los disparos

Se supone un valor inicial para la derivada, $y'(a)=g$ y se resuelve el problema de valores iniciales $y''= f(x,y,y')$ con $y(a)=a$.

Dado γ, el valor de la solución y(x) en $x = b$ se puede considerar una función de γ, que llamaremos $g(g)$. De este modo, el problema con condiciones de borde se puede plantear como la resolución de la ecuación $g(g)=b$ que en general es una **ecuación no lineal.**

Para resolver el problema es necesario utilizar un método iterativo para la resolución de ecuaciones no lineales.

Se estima $g_0 \xrightarrow[\text{Aproximadamente}]{} g(g_0)$ se determina numéricamente con alguno los métodos de resolución de EDO.

Se estima $g_1 \xrightarrow[\text{Aproximadamente}]{} g(g_1)$ análogamente, etc.

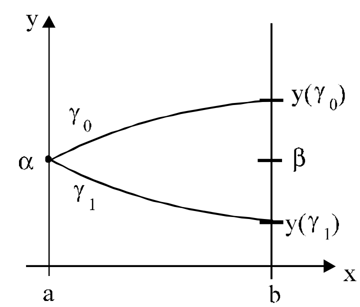


Figura 1: Esquema del método de los disparos con condición inicial g

Para resolver la ecuación no lineal es posible utilizar cualquier método de orden lineal. Como ejemplo se presenta la utilización del método de la secante, aproximando a la solución hasta converger al valor indicado por la condición de borde en el extremo derecho del intervalo. No es posible utilizar el método de Newton-Raphson (u otros métodos de orden superior) porque la derivada de la función *g* no se conoce (de hecho, ni siquiera se conoce explícitamente la función *g*, que está determinada implícitamente por el método de resolución de EDO utilizado).

La aplicación del método de la secante se resume en hallar los valores γ_i de acuerdo a la formulación

$$g_2 = g_1 - (g(g_1) - b)\frac{g_1 - g_0}{g(g_1) - g(g_0)}$$

$$g_3 = g_2 - (g(g_2) - b)\frac{g_2 - g_1}{g(g_2) - g_1}, \text{ etc.}$$

Se nota $\gamma_i \rightarrow \Gamma_\infty$ en caso de que el método converja

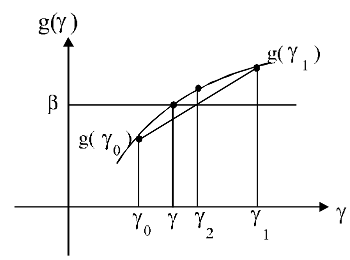


Figura 2: Método de la secante aplicada a una EDO con CB.

Es común que el problema de condición inicial que se deriva al utilizar el método de los disparos esté mal condicionado, aún cuando el problema de condiciones de borde esté bien condicionado. El inconveniente que surge como consecuencia de que para determinados valores de γ, la función *g*(γ) podría no alcanzar el extremo derecho del intervalo de resolución, como se presenta en el ejemplo patológico de la Figura 3. Para evitar este problema de mal condicionamiento, es necesario utilizar una variante del método conocida como **método de los disparos paralelos.** Esta variante resuelve el problema de condicionamiento particionando el intervalo de resolución [*a*,*b*] en *p* subintervalos $[x_{i-1},x_i]$, $x_0 = a$, $x_p = b$. Introduciendo la variable independiente $t \in [0,1]$, el método de los disparos paralelos propone trabajar con un vector de variables dependientes de dimensión 2p $\mathbf{y}(t) = \lfloor y_1(t), y_2(t), \mathbf{L}, y_p(t), y_1'(t), y_2'(t), \mathbf{L}, y_p'(t) \rfloor$ que cumple $y_i(t) = y(x_{i-1} + t(x_i - x_{i-1}))$. La EDO original se transforma en un sistema algebraico (en general no lineal) de 2p ecuaciones, donde las condiciones de continuidad para la función y para la derivada en los puntos interiores aparecen como condiciones de borde, además de las 2 condiciones de borde del problema original.

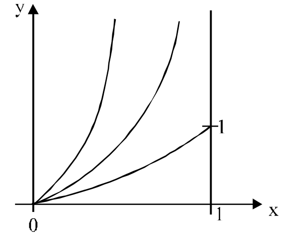


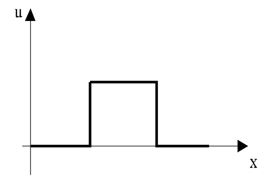
Figura 3: Un ejemplo patológico del método de los disparos

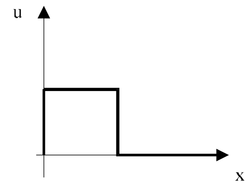
b) La resolución de ecuaciones en derivadas parciales de segundo orden hiperbólicas implica resolver ecuaciones de primer orden del tipo $u_t + a u_x = S(x,t)$ $(x \geq 0;\ t \geq 0)$.

Un ejemplo sencillo de este tipo de ecuaciones es el de la onda viajera, definido por $S(x,t) = 0$, un valor constante para a (la *velocidad* de la onda) y las condiciones iniciales y de borde:

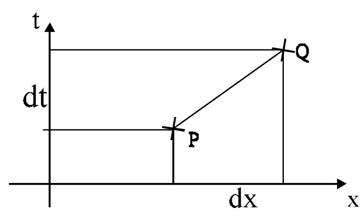
$$a = cte;\ \ S = 0;\ \begin{cases} CI: u(x,0) = \begin{cases} 1 & 0 < x \leq 1 \\ 0 & x > 1 \end{cases} \\ CB: u(0,t) = 0 \quad \forall t > 0 \end{cases}$$

Cuya solución analítica es la función $u(x,t) = u(x - at, 0)$, que queda representada gráficamente por





El **método de las características** consiste en determinar familias de curvas en el plano (x,t) sobre las cuales el problema en derivadas parciales se reduce a una EDO. De este modo, si $u_t + a(x)u_x = S(x,t)$ en $x \geq 0; t \geq 0$.



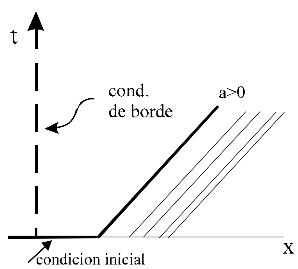
$du = u(Q) - u(P) = u_t\,dt + u_x\,dx \Rightarrow \dfrac{du}{dt} = u_t + u_x \dfrac{dx}{dt}$ si se elige

$\dfrac{dx}{dt} = a(x) \overset{\substack{\text{pasa a ser una} \\ \text{ec. ordinaria}}}{\Rightarrow} \dfrac{du}{dt} = S(x,t)$ sobre las curvas características.

Ambas ecuaciones son EDO!!

Así, por ejemplo, si a = cte, S=0, $\begin{cases} u(x,0) = u_0(x) \\ u(0,t) = 0 \end{cases} \Rightarrow$

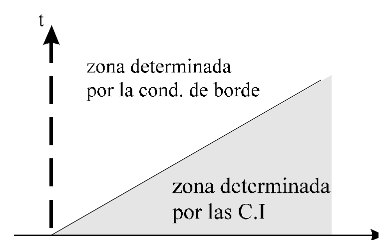
$\dfrac{dx}{dt} = a \quad \therefore \quad x = at + x_0$ Las características don rectas.



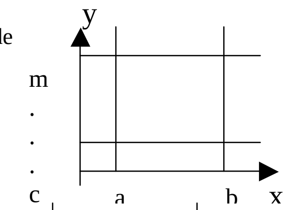
$\dfrac{du}{dt} = 0 \ \therefore\ u = cte$ sobre las características $\Rightarrow$ la constante se determina para t=0, y vale $u_0(x_0)$

$u(x,t) = u_0(x_0) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Ec. características,} \\ x_0 \geq 0\ t \geq 0\ \therefore\ x > at!!}}{=} u_0(x - at) = u(x - at, 0)$

Sólo vale para una parte del dominio (determinada por las CI).



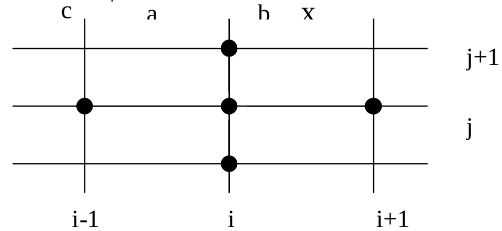
c) El problema es $\nabla^2 f = -S(x,y), \quad a \le x \le b, \quad c \le y \le d$ con condiciones de borde $f_x = 0$ en $x = a$, $f = 0$ en $x = b$, $f_y = 0$ en $y = 0$ y $f = 0$ en $y = d$.



Utilizando una molécula de calculo con cinco puntos, las derivadas de segundo orden se pueden aproximar por diferencias centradas:

$$\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_{i,j} = f_{xx}\big|_{i,j} = \frac{f_{i-1,j} - 2f_{i,j} + f_{i+1,j}}{\Delta x^2} + O(\Delta x^2)$$

y análogamente con f_{yy}.



Salvo en los bordes, todos los valores funcionales son desconocidos, por lo que será necesario plantear un sistema de ecuaciones.

Sustituyendo las discretizaciones en la EDP resulta (para 1<i<n , 1<j<m)

$$\frac{f_{i-1,j} - 2f_{i,j} + f_{i+1,j}}{\Delta x^2} + \frac{f_{i,j-1} - 2f_{i,j} + f_{i,j+1}}{\Delta y^2} = -S(x_i, y_i) = -S_{i,j} \qquad \text{(I)}$$

En el borde derecho $x = b$ ($i = n$) y en el borde superior $y = d$ ($j = m$) las condiciones de borde dan los valores funcionales

$$f_{i,m} = 0; \quad 1 \le i \le n \qquad \text{(II)}$$

$$f_{n,j} = 0; \quad 1 \le j \le m \qquad \text{(III)}$$

Las condiciones de borde que involucran a las derivadas deben manejarse en forma diferente. Es posible obtener aproximaciones de segundo orden (como la de la discretización (I)) pero ello puede obligar a aumentar el ancho de la banda del sistema a resolver.

Por ejemplo, para la condición de borde en $y = c$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$, la molécula planteada puede dar una aproximacion de primer orden, pues

$$f_{i,2} = f_{i,1} + \underbrace{f_y\big|_{i,0}}_{=0} .\Delta y + f_{yy}\big|_{i,1} . \frac{\Delta y^2}{2} + f_{xxx}\big|_{i,1} . \frac{\Delta y^3}{6} + O(\Delta y^4) \Rightarrow 2\frac{(f_{i,2} - f_{i,1})}{\Delta y^2} = f_{yy}\big|_{i,1} + O(\Delta y)$$

Adoptando una discretizacion de primer orden, la EDP en el borde $y = c$ resulta

$$\frac{f_{i-1,1} - 2f_{i,1} + f_{i+1,1}}{\Delta x^2} + \frac{2f_{i,2} - f_{i,1}}{\Delta x^2} = S_{i,1} \qquad 1 < i < n \qquad \text{(IV)}$$

Análogamente, en la frontera $i = 1$ resulta $\frac{2f_{1,j} - 2f_{1,j}}{\Delta x^2} + \frac{f_{1,j-1} - 2f_{i,j} + f_{1,j+1}}{\Delta y^2} = S_{1,j} \qquad 1 < j < m \quad \text{(V)}$

En el caso del vértice inferior izquierdo del dominio ($i = j = 1$) la molécula de cálculo reúne menor información, al disponerse de tan solo dos vecinos. La ecuación resultante es $\frac{2f_{2,1} - 2f_{1,1}}{\Delta x^2} + \frac{2f_{1,2} - 2f_{1,1}}{\Delta x^2} = S_{1,1}$ (VI)

A partir de las ecuaciones (I), (II), (III), (IV), (V), (VI) se llega a un sistema de dimensión $(n \times m)^2$ con

$$\left.\begin{matrix} 1 \le i \le n \to n \\ 1 \le j \le m \to m \end{matrix}\right\} n \times m \text{ incógnitas, y con } \begin{cases} (I) \to (n-2)(m-2) \\ (II) \to m \\ (III) \to n-1 \\ (IV) \to n-2 \\ (V) \to m-2 \\ (VI) \to 1 \end{cases} \text{ ecuaciones.}$$

Se tiene un total de $\left\{\begin{matrix} (n-2)(m-2) + m + n - 1 + n - 2 + m - 2 + 1 \\ nm - 2m - 2n + 4 + m + n - 1 + n - 2 - m - 2 + 1 = mn \end{matrix}\right\}$ m.n ecuaciones, que se aplican de acuerdo al esquema que se presenta en la Figura 4.

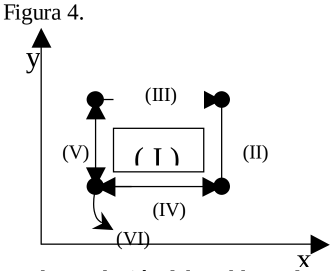


Figura 4: Ecuaciones a aplicar en la resolución del problema de Poisson en dos dimensiones.