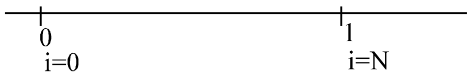
ECUACIONES PARABÓLICAS CON CONDICIONES DE BORDE

Son ecuaciones del tipo

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + S$$

$$\phi(0,t) = 0 = \phi_0 \qquad \phi(x,0) = 0$$



$$\left.\frac{\partial \phi(x,t)}{\partial x}\right|_{x=1} = \beta \qquad S = cte$$

Los métodos aplicados se describen a continuación.

Euler hacia adelante (explícito)

$$\phi_i^{(n+1)} = \phi_i^{(n)} + \frac{\alpha \Delta t}{\Delta x^2}\left[\phi_{i-1}^{(n)} - 2\phi_i^{(n)} + \phi_{i+1}^{(n)}\right] + S\,\Delta t$$

Sea $\frac{\alpha \Delta t}{\Delta x^2} = \gamma$

$$\phi_i^{(n+1)} = \gamma \phi_{i-1}^{(n)} + (1-2\gamma)\phi_i^{(n)} + \gamma \phi_{i+1}^{(n)} + S\,\Delta t \qquad i = 1,\ldots\ldots, N-1$$

<u>C.B.</u> $\phi_0^{(n)} = 0 \quad \forall n$

$$\left.\frac{\partial \phi}{\partial x}\right|_1 \cong \frac{\phi_N^{(n)} - \phi_{N-1}^{(n)}}{\Delta x} = \beta \quad \therefore \quad \phi_N^{(n)} = \phi_{N-1}^{(n)} + \beta \Delta x$$

$i = 0$ ϕ_0 dado $\Rightarrow \phi_0^{(n+1)} = 0$

$i = 1$ $\phi_1^{(n+1)} = \gamma \phi_0^{(n)} + (1-2\gamma)\phi_1^{(n)} + \gamma \phi_2^{(n)} + S\,\Delta t$

1<i<N

$i = N-1$ $\phi_{N-1}^{(n+1)} = \gamma \phi_{N-2}^{(n)} + (1-2\gamma)\phi_{N-1}^{(n)} + \gamma \phi_N^{(n)} + S\,\Delta t$

$i = N$ $\phi_N^{(n+1)} = \phi_{N-1}^{(n+1)} + \beta\,\Delta x$ Por la C.B.

$\Rightarrow$ es posible calcular el paso (n+1) completo.

Cranck-Nicolson (implícito)

$$\phi_0 = 0 \qquad \phi(x,0) = 0$$

$$\left.\frac{\partial \phi}{\partial x}\right|_1 = \beta \qquad S = cte$$

$$\phi_i^{(n+1)} = \phi_i^{(n)} + \frac{\alpha \Delta t}{2\Delta x^2}\left[\phi_{i-1}^{(n+1)} - 2\phi_i^{(n+1)} + \phi_{i+1}^{(n+1)} + \phi_{i-1}^{(n)} - 2\phi_i^{(n)} + \phi_{i+1}^{(n)}\right] + S\,\Delta t$$

$$-\frac{\gamma}{2}\phi_{i-1}^{(n+1)} + (1+\gamma)\phi_i^{(n+1)} - \frac{\gamma}{2}\phi_{i+1}^{(n+1)} = \frac{\gamma}{2}\phi_{i-1}^{(n)} + (1-\gamma)\phi_i^{(n)} + \frac{\gamma}{2}\phi_{i+1}^{(n)} + S\,\Delta t$$

$i = 0$ por la C.B. resulta $\phi_0^{(n+1)} = 0$

$i=1$ $$-\frac{\gamma}{2}\cdot 0+(1+\gamma)\phi_1^{(n+1)}-\frac{\gamma}{2}\phi_2^{(n+1)}=\frac{\gamma}{2}\cdot 0+(1-\gamma)\phi_1^{(n)}+\frac{\gamma}{2}\phi_2^{(n)}$$

$i=N-1$ $$-\frac{\gamma}{2}\phi_{N-2}^{(n+1)}+(1+\gamma)\phi_{N-1}^{(n+1)}-\frac{\gamma}{2}\phi_N^{(n+1)}=\frac{\gamma}{2}\phi_{N-2}^{(n)}+(1-\gamma)\phi_{N-1}^{(n)}+\frac{\gamma}{2}\phi_N^{(n)}+S\Delta t$$

$i=N$ $$\phi_{N-1}^{(n+1)}-\phi_N^{(n+1)}=-\beta\,\Delta x$$

Resulta el sistema tridiagonal :

$$\begin{bmatrix} (1+\gamma) & -\frac{\gamma}{2} & & & & \\ -\frac{\gamma}{2} & (1+\gamma) & -\frac{\gamma}{2} & & 0 & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & 0 & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & -\frac{\gamma}{2} & (1+\gamma) & -\frac{\gamma}{2} \\ & & & & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \phi_i^{(n+1)} \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1+\gamma)\phi_1^{(n)}+\frac{\gamma}{2}\phi_2^{(n)} \\ \vdots \\ \vdots \\ \frac{\gamma}{2}\phi_{i-1}^{(n)}+(1-\gamma)\phi_i^{(n)}+\frac{\gamma}{2}\phi_{i+1}^{(n)}+S\Delta t \\ \vdots \\ \vdots \\ -\beta\Delta x \end{bmatrix}$$

La matriz del sistema es del tipo de diagonal dominante siempre, pues $\gamma > 0$ y

$$|1+\gamma| > \left|\frac{\gamma}{2}\right| + \left|\frac{\gamma}{2}\right|$$

lo cual habilita a utilizar técnicas de resolución especiales, que mejoran la performance del algoritmo.

ECUACIONES HIPERBÓLICAS

Referencia: Nakamura 489-508

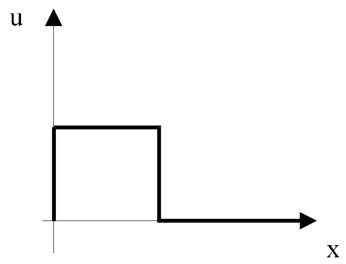
Es posible demostrar que la resolución de ecuaciones en derivadas parciales de segundo orden hiperbólicas implica resolver ecuaciones de primer orden del tipo

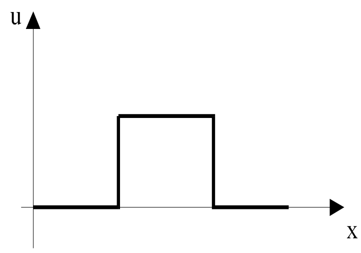
$$u_t + au_x = S(x,t) \quad (x \geq 0; t \geq 0)$$

Los MDF tienen un mejor funcionamiento para el caso de soluciones suaves; sin embargo, las EDP hiperbólicas admiten soluciones discontinuas.

Ejemplo

$$a = cte \; S = 0 \begin{cases} CI : u(x,0) = \begin{cases} 1 & 0 < x \leq 1 \\ 0 & x > 1 \end{cases} \\ \\ CB : u(0,t) = 0 \quad \forall t > 0 \end{cases}$$





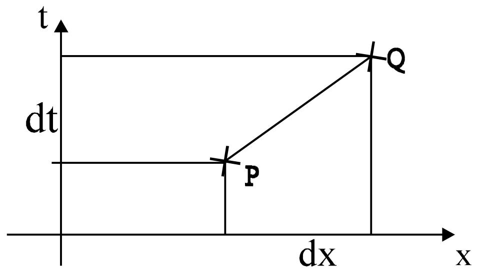
La solución exacta (analítica) es $u(x,t) = u(x - at, 0)$

A continuación se presentan algunos esquemas y métodos para este tipo de ecuación.

MÉTODO DE LAS CARACTERÍSTICAS

Es un método muy popular. Consiste en determinar familias de curvas en el plano (*x,t*) sobre las cuales el problema se reduce a una EDO.

Así, si $u_t + a(x)u_x = S(x,t)$ en $x \geq 0; t \geq 0$



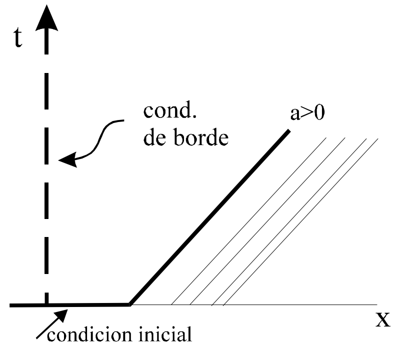
$$du = u(Q) - u(P) = u_t\,dt + u_x\,dx$$

$$\frac{du}{dt} = u_t + u_x\frac{dx}{dt}$$; si se elige $$\frac{dx}{dt} = a(x) \overset{\text{pasa a ser una ec. ordinaria}}{\Rightarrow} \frac{du}{dt} = S(x,t)$$ sobre las curvas características

Ambas son EDO!!

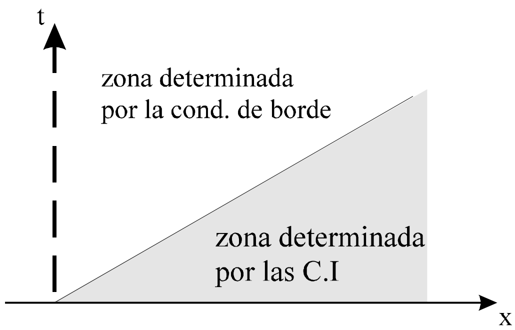
Así, por ejemplo, si *a*=cte, *s*=0, $\begin{cases} u(x,0) = u_0(x) \\ u(0,t) = 0 \end{cases}$

$$\frac{dx}{dt} = a \quad \therefore \quad x = at + x_0$$ Rectas!!



$$\frac{du}{dt} = 0 \ \therefore\ u = cte$$ sobre las características $\therefore$ para *t*=0 la $cte = u_0(x_0)$

$$u(x,t) = u_0(x_0) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Ec. características,} \\ x_0 \geq 0\ t \geq 0\ \therefore\ x > at!!}}{=} u_0(x - at) = u(x - at, 0)$$ Ojo: sólo vale para parte del dominio



<u>Problema</u>

(Referencia : Nakamura 493)

Resolver $u_t + a(x)u_x = S(x,t)$

$a(x) = 3x + 0.1 \quad u(x,0) = 1$

$S(x,t) = 1 - x^2 + 0.1 \cdot t$

Buscar solución analítica, para el caso en que se busque la solución que pasa por *x*=0.2, *t*=0.

ESQUEMAS DE PRIMER ORDEN

Se analizará la ecuación

$$u_t + a u_x = 0 \qquad a\,\text{cte} > 0$$

FTBS (Forward in Time, Backward in Space)

Es un método explícito

$$\frac{u_i^{(n+1)} - u_i^{(n)}}{\Delta t} + a\frac{u_i^{(n)} - u_{i-1}^{(n)}}{\Delta x} = 0 \quad \therefore \quad \boxed{u_i^{(n+1)} = \left(1 - a\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)u_i^{(n)} + a\frac{\Delta t}{\Delta x}u_{i-1}^{(n)}}$$

se usa $a\dfrac{\Delta t}{\Delta x} = \gamma =$ Nº de Courant

$u_0^{(1)}$ está dado por la CB; $u_i^{(0)}$ está dado por la CI $\therefore$ la Ecuación permite calcular todos los puntos.

Si $a \le 0$, la molécula de cálculo no contiene información propagada sobre la característica.
Es posible generalizar el esquema, haciéndolo válido para *a* de cualquier signo

$$\frac{u_i^{(n+1)} - u_i^{(n)}}{\Delta t} + a\frac{u_{i+1}^{(n)} - u_{i-1}^{(n)}}{2\Delta x} - |a|\frac{u_{i+1}^{(n)} - 2u_i^{(n)} + u_{i-1}^{(n)}}{2\Delta x} = 0$$

Si $a > 0$ $\quad \dfrac{\overbrace{u_{i+1}^{(n)} - u_{i+1}^{(n)}}^{\text{se cancelan}} + 2u_i^{(n)} - u_{i-1}^{(n)} - u_{i-1}^{(n)}}{2\Delta x} = \dfrac{u_i^{(n)} - u_{i-1}^{(n)}}{\Delta x}$ ok

Si $a < 0$ $\quad (-a)\left[\dfrac{-u_{i+1}^{(n)} - u_{i+1}^{(n)} + 2u_i^{(n)} \overbrace{+ u_{i-1}^{(n)} - u_{i-1}^{(n)}}^{\text{se cancelan}}}{2\Delta x}\right] = (+a)\left[\dfrac{u_{i+1}^{(n)} - u_i^{(n)}}{\Delta x}\right]$ ok

Se puede interpretar al segundo sumando, como una aproximación por diferencias centrales de u_x y al tercer sumando como una aproximación de $-|a|\dfrac{\Delta x}{2}u_{xx}$; se denomina al término como viscosidad numérica.
El esquema sólo operaría si se le suministran las condiciones iniciales y de borde apropiadas.

Estabilidad del esquema

Aplicando Von Neumann, resultando que

$$u_i^{(n)} = E^{(n)} e^{ji\theta}$$

$$\theta = \frac{\pi}{k}, \quad k = \pm 1, \pm 2, \cdots, \pm\infty$$

Sustituyendo en el esquema para *a*>0,

$E^{(n+1)} e^{ji\theta} = (1-\gamma)E^{(n)} e^{ji\theta} + \gamma E^{(n)} e^{ji\theta} \cdot e^{-j\theta}$ $\therefore$ dividiendo entre $E^n e^{ji\theta}$ resulta

$$\therefore \frac{E^{(n+1)}}{E^{(n)}} = \underbrace{(1-\gamma)}_{\text{centro}} + \underbrace{\gamma}_{\text{radio}} \cdot e^{-j\theta} \quad \therefore \quad \gamma \le 1$$

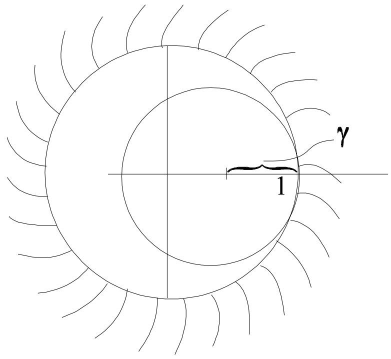
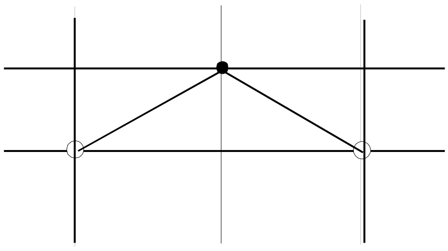


Figura: Regiones de estabilidad del métdo FTBS

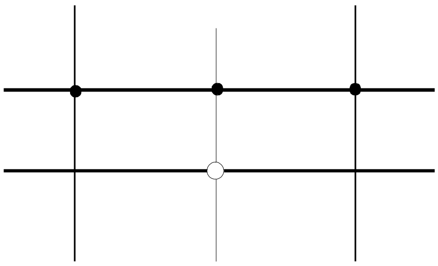
FTCS (Forward in Time, Centered in Space)



$$u_x = \frac{u_{i+1}^{(n)} - u_{i-1}^{(n)}}{2\Delta x}$$ se puede ver que $G = 1 - \gamma\, j sen\theta$

$$\therefore\ |G| = \sqrt{G \cdot \overline{G}} = \sqrt{1 + \gamma^2 sen^2\theta} \geq 1\ \ \forall\theta$$ Incondicionalmente inestable.

BTCS: (Backward in Time, Centered in Space)



Es un método implícito. Se discretiza mediante derivada central hacia atrás.

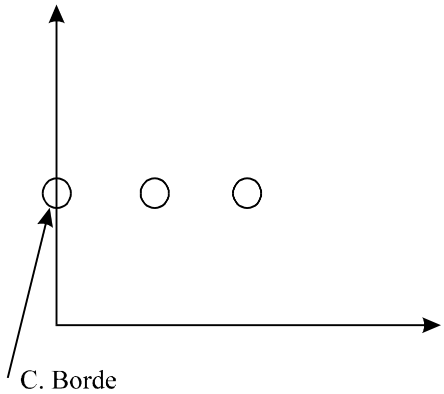
$$u_x = \frac{u_{i+1}^{(n+1)} - u_{i-1}^{(n+1)}}{2\Delta x}$$

$$u_t = \frac{u_i^{(n+1)} - u_i^{(n)}}{\Delta t}$$

$$\frac{u_i^{(n+1)} - u_i^{(n)}}{\Delta t} + a\frac{u_{i+1}^{(n+1)} - u_{i-1}^{(n+1)}}{2\Delta x} = 0$$

$$\frac{\gamma}{2} u_{i+1}^{(n+1)} + u_i^{(n+1)} - \frac{\gamma}{2} u_{i-1}^{(n+1)} = u_i^{(n)}$$

Se forma un sistema tridiagonal. Para *i*=0, se usa la CB.



Para la derecha, es necesario especificar algo, de forma de hacer posible la solución del sistema. Sea I el índice extremo a la derecha. Se debe imponer alguna CB, que puede ser $u_{I+1} = 2u_I - u_{I-1}$ (extrapolación lineal)

El sistema luce el aspecto

$$\begin{bmatrix} 1 & +\gamma & & & & & \\ & -\gamma & 1 & +\gamma & & 0 & \\ & & -\gamma & 1 & +\gamma & & \\ & 0 & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & & & -\gamma & (1+\gamma) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1^{(n+1)} \\ u_2^{(n+1)} \\ \vdots \\ \vdots \\ u_I^{(n+1)} \end{bmatrix} = B$$

ó sea, $GU^{n+1} = B^{(n)}$ $\quad B^{(n)} = CU^n + Q$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{bmatrix} = I \quad Q = \begin{bmatrix} \frac{\gamma}{2} U^0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \quad GU^{(n+1)} = U^{(n)} + Q \quad ó \quad U^{(n+1)} = G^{-1} U^{(n)} + Q'$$

Despreciando Q', $U^{(n+1)} = \left(G^{-1}\right)^n U^{(0)} \quad \therefore \quad \left(G^{-1}\right)^n$ debe ser acotado; pero

$\left\| \left(G^{-1}\right)^n \right\| \geq \left\| G^{-1} \right\|^n \geq \lambda_{\max}^n$ y deberá ser $\lambda_{\max} \leq 1$ (Hirsch, pp 296).

En gral., para $u_i^{(n)} = E^{(n)} e^{ji\theta}$

$$\frac{\gamma}{2} E^{(n+1)} e^{j(1+i)\theta} + E^{(n+1)} e^{ji\theta} - \frac{\gamma}{2} E^{(n+1)} e^{j(i-1)\theta} = E^{(n)} e^{ji\theta}$$ dividiendo entre $E^{(n)} e^{ji\theta}$

resulta

$$\left[\frac{\gamma}{2}\left(e^{j\theta} - e^{-j\theta}\right) + 1\right] \frac{E^{(n+1)}}{E^{(n)}} = 1 \quad \therefore \quad G = \frac{1}{1 + \gamma j sen\theta} \quad \therefore \quad |G| = \frac{1}{\sqrt{1 + \gamma^2 sen^2\theta}} < 1 \quad \forall \theta$$

lo que hace al sistema incondicionalmente estable.