

Método de las Diferencias Finitas en el Dominio del Tiempo (FDTD)

1. Resumen

El método de las **Diferencias Finitas en el Dominio del Tiempo** (Finite Difference Time Domain **FDTD**) se utiliza para resolver problemas electromagnéticos transitorios utilizando diferencias finitas. El método fue desarrollado por Kane Yee en 1966 para resolver las **Ecuaciones de Maxwell** [1]. Estas ecuaciones en derivadas parciales se reemplazan por un sistema de ecuaciones en diferencias finitas. Eligiendo convenientemente los puntos en que se evalúan las componentes de los campos en estas ecuaciones, la solución al sistema de ecuaciones satisface las condiciones de borde que involucran superficies conductoras ideales.

Este método es un caso particular del método de **Diferencias Finitas**, que es un método standard para la resolución de Ecuaciones en Derivadas Parciales (**EDP**).

2. Ecuaciones de Maxwell

Las **Ecuaciones de Maxwell** describen la evolución en el tiempo y en el espacio de los campos magnéticos \mathbf{B} y eléctricos \mathbf{E} . Los diferentes problemas se especifican con distintas condiciones de borde que describen situaciones físicas como la posición de los conductores en un circuito. Las ecuaciones son tan generales y potentes que resumiendo la física clásica en ocho ecuaciones, cuatro de ellas serían las de Maxwell.

En un medio isotrópico las **Ecuaciones de Maxwell** son las siguientes:

$$\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} - \nabla \wedge \mathbf{H} = \mathbf{J} \quad \text{Ampere} \quad (1)$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \nabla \wedge \mathbf{E} = 0 \quad \text{Faraday} \quad (2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (3)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = r \quad (4)$$

donde

\mathbf{H} es la inducción magnética

\mathbf{B} es el campo magnético

\mathbf{D} es el desplazamiento eléctrico

\mathbf{J} es la densidad de corriente eléctrica

El vector $\nabla \wedge \mathbf{H}$ es el ROTOR de \mathbf{H}

El escalar $\nabla \times \mathbf{B} = 0$ es la DIVERGENCIA de \mathbf{B}

También se tiene que

$$\mathbf{B} = m\mathbf{H} \quad (5)$$

$$\mathbf{J} = s\mathbf{E} \quad (6)$$

$$\dot{\mathbf{D}} = e\mathbf{E} \quad (7)$$

siendo μ la permeabilidad, ϵ la permitividad y σ la conductividad. En general μ , ϵ y σ pueden variar en función del tiempo y la posición.

Si $\dot{\mathbf{H}} = (H_x, H_y, H_z)$, se tiene que el rotor de $\dot{\mathbf{H}}$ es

$$\nabla \wedge \dot{\mathbf{H}} = \begin{vmatrix} \mathbf{v} & \mathbf{r} & \mathbf{r} \\ i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ H_x & H_y & H_z \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \left(\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \right) \mathbf{k}$$

Sustituyendo esta expresión en la ecuación (1) se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones

$$\frac{\partial D_x}{\partial t} = \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} - J_x \quad (8)$$

$$\frac{\partial D_y}{\partial t} = \frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} - J_y \quad (9)$$

$$\frac{\partial D_z}{\partial t} = \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} - J_z \quad (10)$$

Procediendo análogamente para la ecuación (2) resulta

$$-\frac{\partial B_x}{\partial t} = \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \quad (11)$$

$$-\frac{\partial B_y}{\partial t} = \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \quad (12)$$

$$-\frac{\partial B_z}{\partial t} = \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \quad (13)$$

Estas seis ecuaciones desacopladas son la base del algoritmo **FDTD**.

3. Algoritmo de Yee

En 1966 Kane Yee [1] propuso un conjunto de ecuaciones en diferencias finitas para resolver las ecuaciones de Maxwell. Para ello, la región tridimensional que interesa se divide en una grilla de celdas cúbicas de coordenadas

$$(i, j, k) = (i\Delta x, j\Delta y, k\Delta z)$$

siendo Δx , Δy y Δz , los incrementos espaciales. Cada función de espacio y tiempo se escribe como

$$F(i\Delta x, j\Delta y, k\Delta z, n\Delta t) = F^n(i, j, k)$$

siendo Δt , el intervalo de tiempo.

Las derivadas espaciales y temporales de una función se implementarán utilizando una aproximación en diferencias finitas centradas evaluadas en grillas solapadas:

$$\frac{\partial F^n(i, j, k)}{\partial x} = \frac{F^n(i + \frac{1}{2}, j, k) - F^n(i - \frac{1}{2}, j, k)}{\Delta x}$$

$$\frac{\partial F^n(i, j, k)}{\partial t} = \frac{F^{n+\frac{1}{2}}(i, j, k) - F^{n-\frac{1}{2}}(i, j, k)}{\Delta t}$$

Utilizando la ecuación (1) se actualiza el campo E en cada instante de tiempo n y con la ecuación (2) se actualiza el campo magnético B en cada instante de tiempo $(n+\frac{1}{2})$.

El método se basa en utilizar las ecuaciones anteriores para calcular las derivadas de los campos electromagnéticos en las ecuaciones (8)-(13).

Las grillas utilizadas para evaluar E y B en el espacio también están escalonadas: el vértice de un cubo perteneciente a una grilla se encuentra en el centro de un cubo perteneciente a la otra grilla como se muestra en la Figura 1.

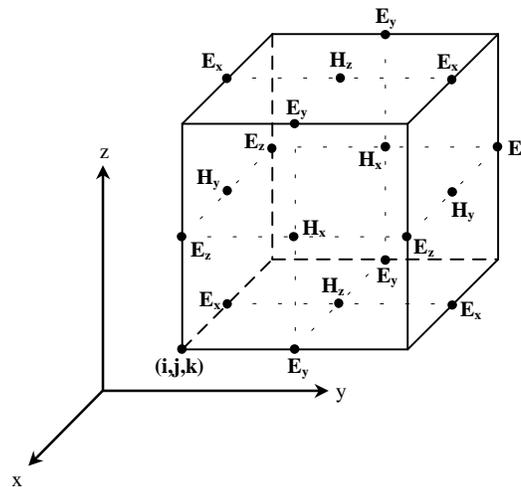


Figura 1. Celda de Yee. Los componentes del campo E se hallan en la mitad de las aristas mientras que las componentes de H están en el centro de las caras.

Al aplicar este método a las ecuaciones (8), (9), (10), (11) (12) y (13), se obtiene un sistema de ecuaciones en diferencias finitas.

Por ejemplo, la ecuación en diferencias finitas correspondiente a la ecuación (11) es

$$\begin{aligned} & \frac{B_x^{n+\frac{1}{2}}(i, j + \frac{1}{2}, k + \frac{1}{2}) - B_x^{n-\frac{1}{2}}(i, j + \frac{1}{2}, k + \frac{1}{2})}{\Delta t} \\ &= \frac{E_y^n(i, j + \frac{1}{2}, k + 1) - E_y^n(i, j + \frac{1}{2}, k)}{\Delta z} - \frac{E_z^n(i, j + 1, k + \frac{1}{2}) - E_z^n(i, j, k + \frac{1}{2})}{\Delta y} \end{aligned} \quad (14)$$

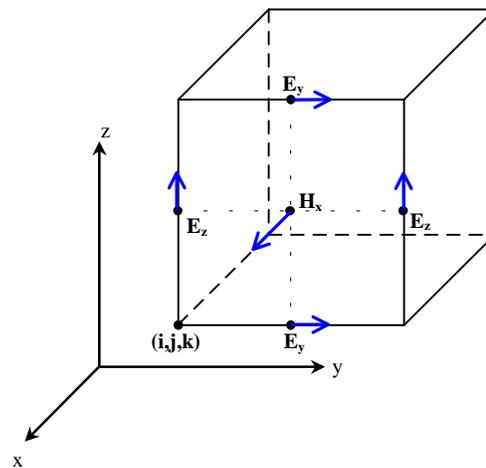


Figura 2. Nodos de la grilla que se utilizan para calcular el campo \mathbf{B} en la ecuación (14)

En la Figura 2 se observa que los puntos de la grilla en que se evalúa el campo E_y^n y E_z^n utilizados en (14) para calcular el campo $B_x^{n+1/2}$ en el centro de una cara de la celda perpendicular al eje x , son los puntos medios de las aristas pertenecientes a esa cara.

Las ecuaciones en diferencias finitas correspondientes a las ecuaciones (12) y (13), se hallan de la misma forma resultando

$$\begin{aligned} & \frac{B_y^{n+1/2}(i + 1/2, j, k + 1/2) - B_y^{n-1/2}(i + 1/2, j, k + 1/2)}{\Delta t} \\ &= \frac{E_z^n(i + 1, j, k + 1/2) - E_z^n(i, j, k + 1/2)}{\Delta x} - \frac{E_x^n(i + 1/2, j, k + 1) - E_x^n(i + 1/2, j, k)}{\Delta z} \end{aligned} \quad (15)$$

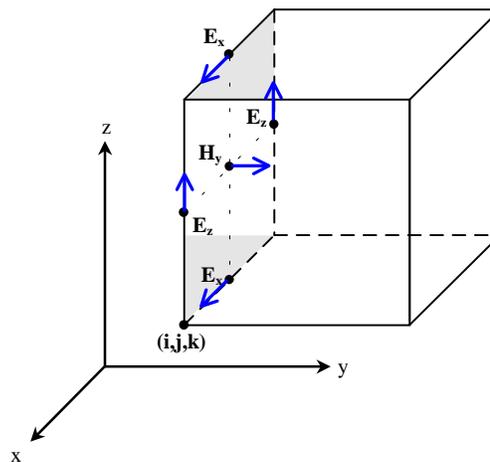


Figura 3. Nodos de la grilla que se utilizan para calcular el campo \mathbf{B} en la ecuación (15)

$$\begin{aligned} & \frac{B_z^{n+1/2}(i + 1/2, j + 1/2, k) - B_z^{n-1/2}(i + 1/2, j + 1/2, k)}{\Delta t} \\ &= \frac{E_x^n(i + 1/2, j + 1, k) - E_x^n(i + 1/2, j, k)}{\Delta y} - \frac{E_y^n(i + 1, j + 1/2, k) - E_y^n(i, j + 1/2, k)}{\Delta x} \end{aligned} \quad (16)$$

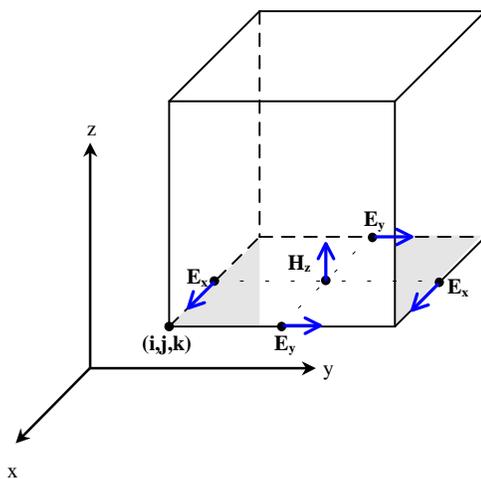


Figura 4. Nodos de la grilla que se utilizan para calcular el campo \mathbf{B} en la ecuación (16)

Luego para la ecuación (8) se tiene que

$$\begin{aligned}
 & \frac{D_x^n(i + \frac{1}{2}, j, k) - D_x^{n-1}(i + \frac{1}{2}, j, k)}{\Delta t} \\
 &= \frac{H_z^{n-\frac{1}{2}}(i + \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2}, k) - H_z^{n-\frac{1}{2}}(i + \frac{1}{2}, j - \frac{1}{2}, k)}{\Delta y} \\
 & \quad - \frac{H_y^{n-\frac{1}{2}}(i + \frac{1}{2}, j, k + \frac{1}{2}) - H_y^{n-\frac{1}{2}}(i + \frac{1}{2}, j, k - \frac{1}{2})}{\Delta z} - J_x^{n-\frac{1}{2}}(i + \frac{1}{2}, j, k)
 \end{aligned} \tag{17}$$

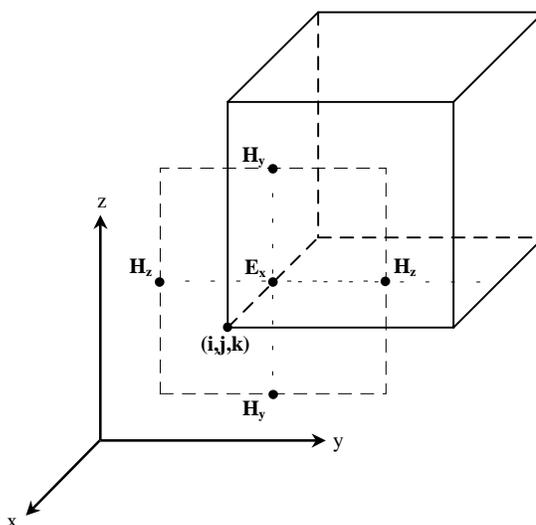


Figura 5. Nodos de la grilla que se utilizan para calcular el campo \mathbf{B} en la ecuación (17)

En este caso, los puntos que se utilizan para calcular E_x en un punto de la grilla, son las componentes de $H_y^{n-\frac{1}{2}}$ y $H_z^{n-\frac{1}{2}}$ que se ubican en los puntos medios de los lados de un cuadrado perpendicular al eje x cuyo centro es el punto en que se desea calcular E_x^n , según se indica en la Figura 5.

De forma similar se tiene que las ecuaciones en diferencias finitas correspondientes a las ecuaciones (9) y (10) son las siguientes:

$$\begin{aligned}
 & \frac{D_y^n(i, j + \frac{1}{2}, k) - D_y^{n-1}(i, j + \frac{1}{2}, k)}{\Delta t} \\
 &= \frac{H_x^{n-\frac{1}{2}}(i, j + \frac{1}{2}, k + \frac{1}{2}) - H_x^{n-\frac{1}{2}}(i, j + \frac{1}{2}, k - \frac{1}{2})}{\Delta z} \\
 & \quad - \frac{H_z^{n-\frac{1}{2}}(i + \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2}, k) - H_z^{n-\frac{1}{2}}(i - \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2}, k)}{\Delta x} - J_y^{n-\frac{1}{2}}(i, j + \frac{1}{2}, k)
 \end{aligned} \tag{18}$$

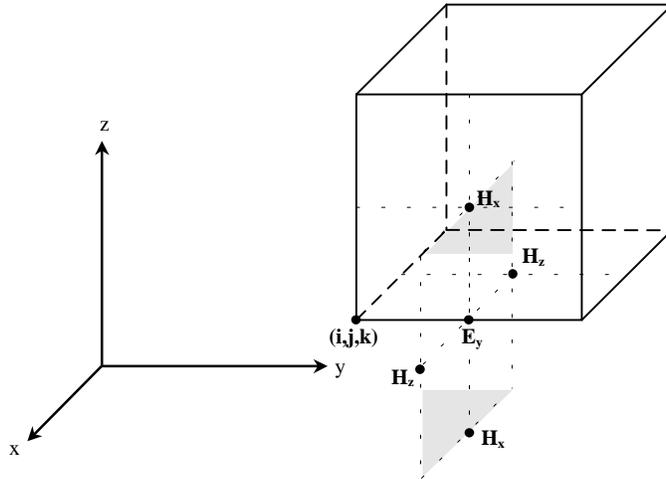


Figura 6. Nodos de la grilla que se utilizan para calcular el campo \mathbf{B} en la ecuación (18)

$$\begin{aligned}
 & \frac{D_z^n(i, j, k + \frac{1}{2}) - D_z^{n-1}(i, j, k + \frac{1}{2})}{\Delta t} \\
 &= \frac{H_y^{n-\frac{1}{2}}(i + \frac{1}{2}, j, k + \frac{1}{2}) - H_y^{n-\frac{1}{2}}(i - \frac{1}{2}, j, k + \frac{1}{2})}{\Delta x} \\
 & \quad - \frac{H_x^{n-\frac{1}{2}}(i, j + \frac{1}{2}, k + \frac{1}{2}) - H_x^{n-\frac{1}{2}}(i, j - \frac{1}{2}, k + \frac{1}{2})}{\Delta y} - J_z^{n-\frac{1}{2}}(i, j, k + \frac{1}{2})
 \end{aligned} \tag{19}$$

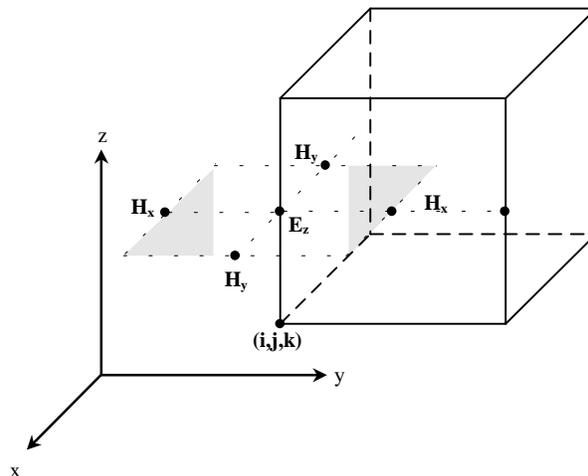


Figura 7. Nodos de la grilla que se utilizan para calcular el campo \mathbf{B} en la ecuación (19)

El conjunto de ecuaciones que se obtiene es implícito, y los cálculos para hallar los valores de los campos en los puntos de la grilla son muy sencillos (sumas y restas) lo que facilita su implementación; si las ecuaciones (8) - (13) se resolvieran con diferencias centradas en una grilla 'normal' se obtendría un sistema de ecuaciones explícito.

4. Condiciones de borde

Del electromagnetismo surge que las condiciones de borde apropiadas para una superficie conductora es que las componentes tangenciales del campo eléctrico se anulen en la superficie y que la componente perpendicular a la superficie del campo magnético también se anule en la superficie. La superficie conductora se aproximará por un conjunto de superficies de cubos, cuyos lados serán paralelos a los ejes de coordenadas. Las superficies planas perpendiculares al eje de las x serán elegidas de forma tal de contener puntos en los cuales E_y y E_z estén definidos. Las superficies planas perpendiculares a los otros ejes se eligen de forma análoga. [1]

5. Criterio de estabilidad

El tamaño de la grilla debe ser tal que los campos electromagnéticos no cambien sustancialmente de un nodo a otro de la grilla. Esto significa que para tener resultados significativos la dimensión de la grilla deberá ser una fracción de la longitud de onda λ . Los diferentes artículos consultados recomiendan de forma unánime un paso menor a $\lambda/10$. En general también utilizan como criterio $\Delta x = \Delta y = \Delta z$.

La estabilidad de la solución se obtiene aplicando el criterio de Courant [5] que establece la condición

$$c\Delta t/L > 1$$

siendo c la velocidad de la onda, L una medida lineal del elemento como el ancho de la celda o su largo y Δt es el intervalo de tiempo.

El criterio de estabilidad de Courant generalizado para 3 dimensiones [7], [3], [8]¹ es

$$\Delta t \leq \frac{1}{c \sqrt{\frac{1}{(\Delta x)^2} + \frac{1}{(\Delta y)^2} + \frac{1}{(\Delta z)^2}}} \quad (20)$$

Una vez elegida la grilla, la condición anterior impone una restricción para el intervalo de tiempo Δt .

En el caso $\Delta x = \Delta y = \Delta z = \Delta$

$$\Delta t \leq \frac{\Delta}{c\sqrt{3}}$$

6. Ecuaciones de Maxwell en dos dimensiones

Para ilustrar el método se considera un problema en dos dimensiones. Para simplificar se supone que las componentes del campo no dependen de la coordenada z , que ϵ y μ son constantes y que $\mathbf{J}=0$. La única fuente del problema es la onda incidente. Esta onda incidente se hace chocar con un obstáculo cuya dimensión será de unas pocas 'longitudes de onda'.

¹ Nota: En [1] el criterio de estabilidad que se aplica es $\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2} > c\Delta t$

Puede simplificarse aún más el problema dado que en coordenadas cilíndricas, si ϵ y μ son constantes, el campo electromagnético puede descomponerse en campos ‘**transversal eléctrico**’ (TE) y ‘**transversal magnético**’ (TM). Los dos modos de ondas electromagnéticas se caracterizan como

1.- Onda TE

$$H_x = H_y = 0 \quad E_z = 0$$

Sustituyendo en las ecuaciones (8)-(13) y teniendo en cuenta (5) y (7)

$$-m \frac{\partial H_z}{\partial t} = \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \quad (21)$$

$$\frac{\partial H_z}{\partial y} = e \frac{\partial E_x}{\partial t} \quad (22)$$

$$-\frac{\partial H_z}{\partial x} = e \frac{\partial E_y}{\partial t} \quad (23)$$

2.-Onda TM

$$E_x = E_y = 0 \quad H_z = 0$$

Sustituyendo en las ecuaciones (8)-(13)

$$-e \frac{\partial E_z}{\partial t} = \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \quad (24)$$

$$-\frac{\partial E_z}{\partial y} = m \frac{\partial H_x}{\partial t} \quad (25)$$

$$-\frac{\partial E_z}{\partial x} = m \frac{\partial H_y}{\partial t} \quad (26)$$

En general puede considerarse una superficie perfectamente conductora C . Esta superficie podrá aproximarse por un polígono cuyos lados sean paralelos a los ejes de coordenadas. Si las dimensiones de la grilla dentro de esa superficie conductora C son pequeñas comparadas con el ancho de banda, la aproximación podrá tener resultados consistentes.

Sea

$$\Delta t = c = \Delta t \sqrt{\frac{1}{\mu\epsilon}} \quad (27)$$

y

$$Z = \sqrt{\frac{m}{e}} \quad (28)$$

A continuación se escriben las ecuaciones en diferencias finitas para las ondas TM y TE

Onda TE

(Ver cálculos en Apéndice A.1)

$$H_z^{n+\frac{1}{2}}(i + \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2}) = H_z^{n-\frac{1}{2}}(i + \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2}) + \frac{1}{Z} \frac{\Delta t}{\Delta y} [E_x^n(i + \frac{1}{2}, j + 1) - E_x^n(i + \frac{1}{2}, j)] + \frac{1}{Z} \frac{\Delta t}{\Delta x} [E_y^n(i, j + \frac{1}{2}) - E_y^n(i + 1, j + \frac{1}{2})] \quad (29)$$

$$E_x^{n+1}(i + \frac{1}{2}, j) = E_x^n(i + \frac{1}{2}, j) + Z \frac{\Delta t}{\Delta y} [H_z^{n+\frac{1}{2}}(i + \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2}) - H_z^{n+\frac{1}{2}}(i + \frac{1}{2}, j - \frac{1}{2})] \quad (30)$$

$$E_y^{n+1}(i, j + \frac{1}{2}) = E_y^n(i, j + \frac{1}{2}) - Z \frac{\Delta t}{\Delta x} [H_z^{n+\frac{1}{2}}(i + \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2}) - H_z^{n+\frac{1}{2}}(i - \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2})] \quad (31)$$

Ondas TM

(Ver cálculos en Apéndice A.2)

$$E_z^{n+1}(i, j) = E_z^n(i, j) + \frac{1}{e} \frac{\Delta t}{\Delta x} [H_y^{n-\frac{1}{2}}(i + \frac{1}{2}, j) - H_y^{n-\frac{1}{2}}(i - \frac{1}{2}, j)] - \frac{1}{e} \frac{\Delta t}{\Delta y} [H_x^{n-\frac{1}{2}}(i, j + \frac{1}{2}) - H_x^{n-\frac{1}{2}}(i, j - \frac{1}{2})] \quad (32)$$

$$H_x^{n+\frac{1}{2}}(i, j + \frac{1}{2}) = H_x^{n-\frac{1}{2}}(i, j + \frac{1}{2}) - \frac{1}{Z} \frac{\Delta t}{\Delta y} [E_z^n(i, j + 1) - E_z^n(i, j, k + \frac{1}{2})] \quad (33)$$

$$H_y^{n+\frac{1}{2}}(i + \frac{1}{2}, j) = H_y^{n-\frac{1}{2}}(i + \frac{1}{2}, j) + \frac{1}{Z} \frac{\Delta t}{\Delta x} [E_z^n(i + 1, j) - E_z^n(i, j)] \quad (34)$$

7. Ejemplo numérico para una onda TM

Para simplificar el problema se considera una onda TM, por lo que se utilizarán las ecuaciones en diferencias finitas (32)-(34).

El problema que se resolverá es la difracción de una onda TM incidente a un cuadrado conductor ideal. Las dimensiones del obstáculo así como el perfil de la onda incidente se muestran en la Figura 8.

Los valores iniciales en $t=0$ $E_z^0(i, j)$, $H_y^{1/2}(i + \frac{1}{2}, j)$, $H_x^{1/2}(i, j - \frac{1}{2})$ se obtienen a partir de una onda incidente conocida; el valor de t elegido deberá ser tal que en $t=0$ la onda incidente no haya chocado aún con el obstáculo. Los siguientes valores en el tiempo se obtendrán a partir de las ecuaciones en diferencias finitas (32)-(34) halladas anteriormente.

La onda incidente es una onda sinusoidal plana de amplitud 1, que sólo tiene componentes en E_z y en H_y .

$$E_z(x, y, t) = \text{sen}\left[\frac{(x - 50a + ct)p}{8a}\right]$$

$$0 \leq x - 50a + ct \leq 8a$$

$$H_y(x, y, t) = \frac{1}{Z} E_z(x, y, t)$$

siendo α una unidad de longitud.

La longitud de onda λ correspondiente a esta onda es $l = 16a$ (ver Apéndice B).

Se elige como tamaño de la grilla

$$\Delta x = \Delta y = \frac{a}{8}$$

que expresando en función de la longitud de onda λ queda como

$$\Delta x = \Delta y = \frac{l}{128}$$

que es menor que $\lambda/10$.

Aplicando el criterio de estabilidad de Courant (20) y la ecuación (27) se tiene que

$$\Delta t = c\Delta t = \frac{1}{2} \Delta x = \frac{a}{16}$$

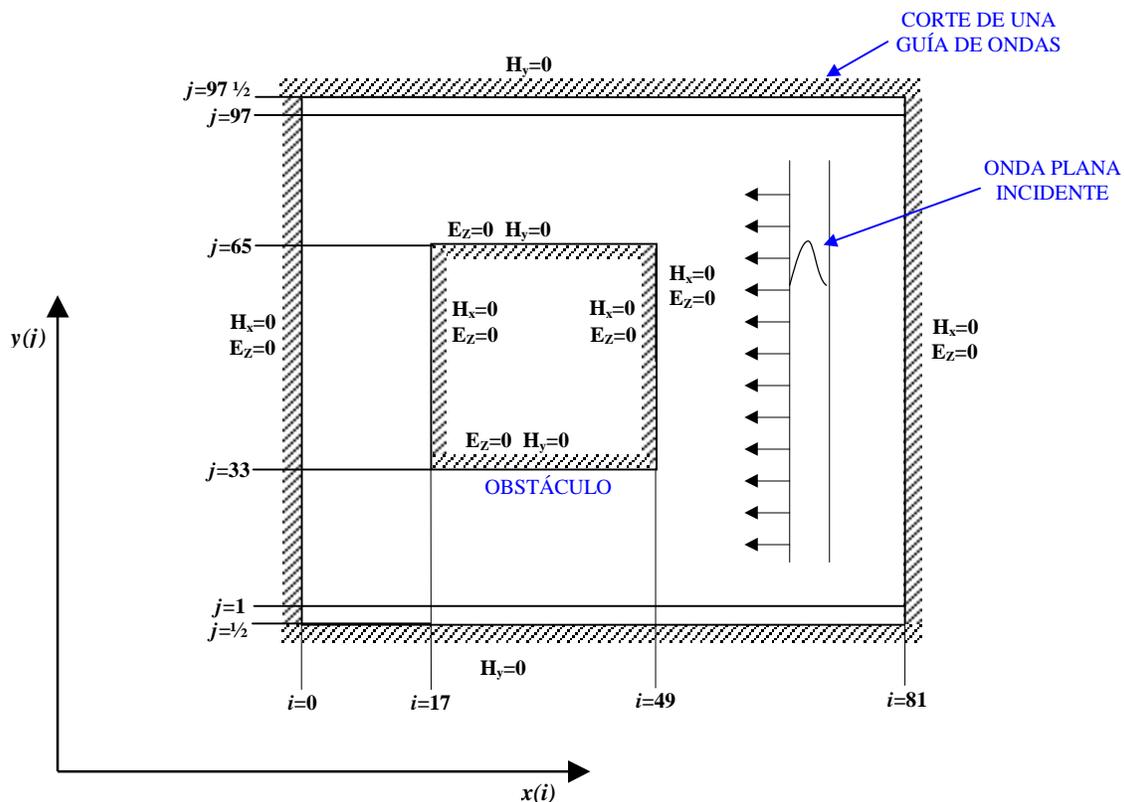


Figura 8. Problema equivalente para una onda TM

Debido a que no tiene sentido hacer el esquema de diferencias finitas en todo el plano x - y , y como forma de acotar el problema, la región de cálculo será la mostrada en la Figura 8. Se supone que en $t=0$ la onda plana está cerca del obstáculo y por un período restringido de tiempo puede reemplazarse el problema original por el mostrado en la Figura.

Las condiciones de borde que se imponen para los campos electromagnéticos dentro de una guía de ondas, es decir un prisma rectangular o cilindro circular cuyas paredes son conductores perfectos [9], son simplemente que las componentes tangenciales del \mathbf{E} y las componentes normales de \mathbf{H} sean cero en la superficies conductoras. Por lo tanto, para la onda TM en la región de la Figura 8, se tiene que en la superficie conductora la componente E_z del campo eléctrico siempre se anula por ser tangencial a la misma, mientras que H_x se anula en las paredes verticales ($x=0$) y H_y se anula en las paredes horizontales ($y=0$)

Los resultados para el problema equivalente aproximan a la solución real si

$$0 \leq n\Delta t \leq 64\Delta t$$

debido a que en este intervalo de tiempo las condiciones de borde artificiales no afectan a la solución. Para $n > 64$ sólo en algunos puntos los resultados del problema equivalente se aproximan de forma correcta a los del problema original.

En [1] se presentan los resultados numéricos de este ejemplo. Se utilizó el sistema de ecuaciones (32), (33) y (34) tomando como condición inicial E_z un seno media onda en el caso de no tener el obstáculo. Se hace notar que las condiciones de borde no afectan a la onda incidente dado que la misma no tiene componente en H_x . En la Figura 9 se muestra el resultado de ejecutar las ecuaciones durante 95 iteraciones en el tiempo. La oscilación y el ensanchamiento del pulso se deben a la imperfección del sistema de diferencias finitas. La falta de precisión del método se debe a la propagación de errores.

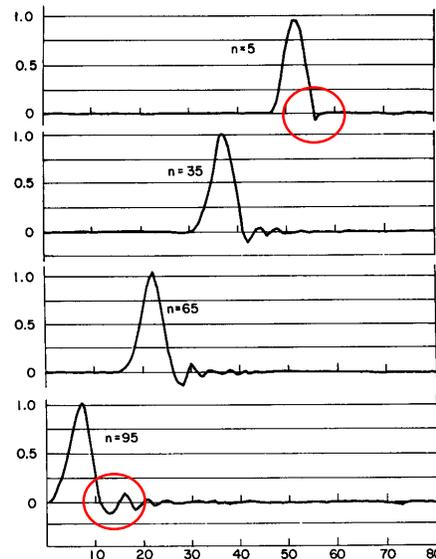


Figura 9. Resultados del cálculo de E_z utilizando las ecuaciones (32), (33) y (34) en ausencia del obstáculo. Las ordenadas son en Volts/metro, la abscisa es el número de incrementos horizontales y n es el número de los ciclos de tiempo.

La Figura 10 muestra el valor E_z de la onda TM en función de la coordenada i para un valor fijo de la coordenada vertical $j=30$. Al final del quinto ciclo de tiempo la onda choca con el obstáculo. El obstáculo no se encuentra en la posición $j=30$ pero en esta posición se está lo suficientemente cerca del mismo como para ser afectados por una onda 'parcialmente reflejada'. También hay una onda 'parcialmente transmitida'. La fase de la onda reflejada es opuesta a la de la onda incidente, como lo requiere la condición de borde del obstáculo.

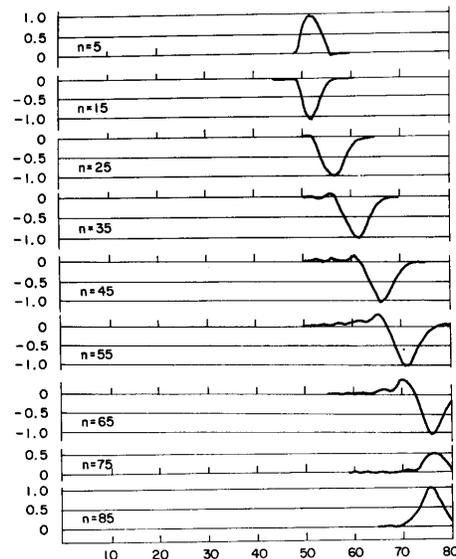


Figura 10. E_z de una onda TM para varios instantes de tiempo $j=30$

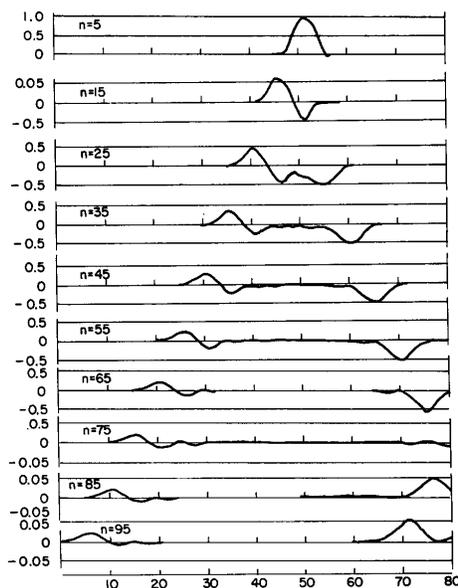


Figura 11. E_z de una onda TM en presencia de un obstáculo para varios instantes de tiempo $j=30$

En la Figura 11 se muestra el valor de E_z para la onda TM en función de la coordenada horizontal i para $j=50$. En esta coordenada $j=50$, la onda se choca con el obstáculo por lo que aparece una onda reflejada que viaja hacia la derecha. Luego de que la onda reflejada encuentra la frontera derecha vuelve a reflejarse nuevamente. Este efecto se muestra en los ciclos de tiempo 75, 85 y 95.

La Figura 12 es para $j=65$. En $j=65$ se encuentra el borde del obstáculo. Debido a las condiciones de borde E_z es cero en los puntos pertenecientes a la frontera. A la derecha del obstáculo hay una onda 'parcialmente reflejada' cuya amplitud es la mitad de una onda totalmente reflejada. A la izquierda del obstáculo puede verse una onda 'trasmitida' después de 85 intervalos de tiempo.

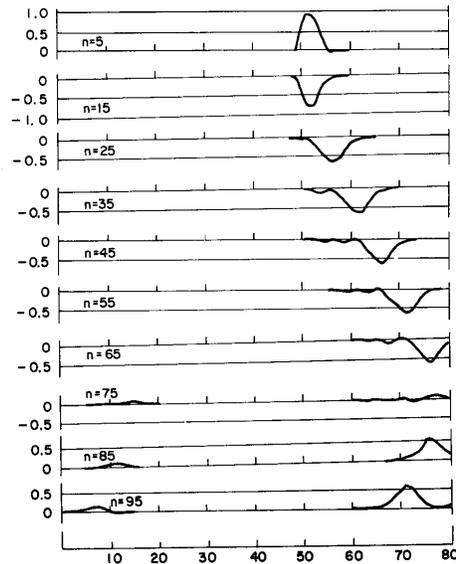


Figura 12. E_z de una onda TM en presencia de un obstáculo para varios instantes de tiempo $j=65$

8. Conclusiones

El método FDTD es una herramienta útil y fácil de implementar para resolver problemas transitorios que se comportan según las ecuaciones de Maxwell.

Los algoritmos basados en el método FDTD son muy populares debido a su flexibilidad y siendo además, muy fáciles de implementar. Una limitación del método es que la estabilidad del método depende de la grilla utilizada en la discretización y del intervalo de tiempo utilizado para ejecutar la integración en el tiempo.

Analizando el ejemplo desarrollado en [1], se concluye que este método se utiliza para obtener transitorios de ondas electromagnéticas; y que el campo electromagnético en el instante inicial deberá ser conocido en toda la zona de estudio para poder desarrollar las ecuaciones a partir de esa solución inicial.

El método no funciona bien cuando se tienen fronteras curvas ni tampoco puede resolver de forma adecuada pequeños detalles por la forma uniforme en que se construye la grilla [8].

Apéndice A – Ecuaciones en diferencias finitas para ondas TE y TM

A.1 Onda TE

La expresión en diferencias finitas de la ecuación (21)

$$\begin{aligned} & m \left[\frac{H_z^{n+\frac{1}{2}}(i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}) - H_z^{n-\frac{1}{2}}(i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2})}{\Delta t} \right] \\ &= \frac{E_x^n(i+\frac{1}{2}, j+1) - E_x^n(i+\frac{1}{2}, j)}{\Delta y} - \frac{E_y^n(i+1, j+\frac{1}{2}) - E_y^n(i, j+\frac{1}{2})}{\Delta x} \end{aligned}$$

operando se tiene que

$$\begin{aligned} H_z^{n+\frac{1}{2}}(i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}) &= H_z^{n-\frac{1}{2}}(i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}) + \\ &+ \frac{\Delta t}{m} \left[\frac{E_x^n(i+\frac{1}{2}, j+1) - E_x^n(i+\frac{1}{2}, j)}{\Delta y} - \frac{E_y^n(i+1, j+\frac{1}{2}) - E_y^n(i, j+\frac{1}{2})}{\Delta x} \right] \end{aligned}$$

utilizando las definiciones (27) y (28)

$$\frac{\Delta t}{m} = \frac{\Delta t \sqrt{me}}{m} = \Delta t \sqrt{\frac{e}{m}} = \frac{1}{Z} \Delta t \quad (35)$$

y sustituyendo (35)

$$\begin{aligned} H_z^{n+\frac{1}{2}}(i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}) &= H_z^{n-\frac{1}{2}}(i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}) + \\ &+ \frac{1}{Z} \frac{\Delta t}{\Delta y} [E_x^n(i+\frac{1}{2}, j+1) - E_x^n(i+\frac{1}{2}, j)] + \frac{1}{Z} \frac{\Delta t}{\Delta x} [E_y^n(i, j+\frac{1}{2}) - E_y^n(i+1, j+\frac{1}{2})] \end{aligned}$$

La ecuación (22) queda como

$$\begin{aligned} e \left[\frac{E_x^{n+1}(i+\frac{1}{2}, j) - E_x^n(i+\frac{1}{2}, j)}{\Delta t} \right] &= \frac{H_z^{n+\frac{1}{2}}(i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}) - H_z^{n+\frac{1}{2}}(i+\frac{1}{2}, j-\frac{1}{2})}{\Delta y} \\ E_x^{n+1}(i+\frac{1}{2}, j) &= E_x^n(i+\frac{1}{2}, j) + \Delta t \frac{1}{e} \frac{H_z^{n+\frac{1}{2}}(i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}) - H_z^{n+\frac{1}{2}}(i+\frac{1}{2}, j-\frac{1}{2})}{\Delta y} \end{aligned}$$

de (21) y (22)

$$\frac{\Delta t}{e} = \frac{\Delta t \sqrt{me}}{e} = \Delta t \sqrt{\frac{m}{e}} = Z \Delta t \quad (36)$$

sustituyendo

$$E_x^{n+1}(i + \frac{1}{2}, j) = E_x^n(i + \frac{1}{2}, j) + Z \frac{\Delta t}{\Delta y} \left[H_z^{n+\frac{1}{2}}(i + \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2}) - H_z^{n+\frac{1}{2}}(i + \frac{1}{2}, j - \frac{1}{2}) \right]$$

Para la ecuación (23) se tiene que

$$e \left[\frac{E_y^{n+1}(i, j + \frac{1}{2}) - E_y^n(i, j + \frac{1}{2})}{\Delta t} \right] = - \frac{H_z^{n+\frac{1}{2}}(i + \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2}) - H_z^{n+\frac{1}{2}}(i - \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2})}{\Delta x}$$

reagrupando los términos

$$E_y^{n+1}(i, j + \frac{1}{2}) = E_y^n(i, j + \frac{1}{2}) - \frac{\Delta t}{e} \left[\frac{H_z^{n+\frac{1}{2}}(i + \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2}) - H_z^{n+\frac{1}{2}}(i - \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2})}{\Delta x} \right]$$

sustituyendo (25)

$$E_y^{n+1}(i, j + \frac{1}{2}) = E_y^n(i, j + \frac{1}{2}) - Z \frac{\Delta t}{\Delta x} \left[H_z^{n+\frac{1}{2}}(i + \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2}) - H_z^{n+\frac{1}{2}}(i - \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2}) \right]$$

A.2 Onda TM

La aproximación en diferencias finitas de (24) es

$$E_z^{n+1}(i, j) = E_z^n(i, j) + \frac{1}{e} \frac{\Delta t}{\Delta x} \left[H_y^{n-\frac{1}{2}}(i + \frac{1}{2}, j) - H_y^{n-\frac{1}{2}}(i - \frac{1}{2}, j) \right] - \frac{1}{e} \frac{\Delta t}{\Delta y} \left[H_x^{n-\frac{1}{2}}(i, j + \frac{1}{2}) - H_x^{n-\frac{1}{2}}(i, j - \frac{1}{2}) \right]$$

teniendo en cuenta (36)

$$E_z^{n+1}(i, j) = E_z^n(i, j) + Z \frac{\Delta t}{\Delta x} \left[H_y^{n-\frac{1}{2}}(i + \frac{1}{2}, j) - H_y^{n-\frac{1}{2}}(i - \frac{1}{2}, j) \right] - Z \frac{\Delta t}{\Delta y} \left[H_x^{n-\frac{1}{2}}(i, j + \frac{1}{2}) - H_x^{n-\frac{1}{2}}(i, j - \frac{1}{2}) \right]$$

Procediendo de forma análoga para la ecuación (25)

$$H_x^{n+\frac{1}{2}}(i, j + \frac{1}{2}) = H_x^{n-\frac{1}{2}}(i, j + \frac{1}{2}) - \frac{\Delta t}{m} \left[\frac{E_z^n(i, j + 1) - E_z^n(i, j, k + \frac{1}{2})}{\Delta y} \right]$$

utilizando (35)

$$H_x^{n+\frac{1}{2}}(i, j + \frac{1}{2}) = H_x^{n-\frac{1}{2}}(i, j + \frac{1}{2}) - \frac{1}{Z} \frac{\Delta t}{\Delta y} \left[E_z^n(i, j + 1) - E_z^n(i, j, k + \frac{1}{2}) \right]$$

Por último se tiene que (26) puede escribirse como

$$H_y^{n+\frac{1}{2}}(i + \frac{1}{2}, j) = H_y^{n-\frac{1}{2}}(i + \frac{1}{2}, j) + \frac{\Delta t}{m} \left[\frac{E_z^n(i + 1, j) - E_z^n(i, j)}{\Delta x} \right]$$

sustituyendo (35)

$$H_y^{n+\frac{1}{2}}(i + \frac{1}{2}, j) = H_y^{n-\frac{1}{2}}(i + \frac{1}{2}, j) + \frac{1}{Z} \frac{\Delta t}{\Delta x} \left[E_z^n(i + 1, j) - E_z^n(i, j) \right]$$

Apéndice B

Para una onda de la forma

$$E(x, t) = \operatorname{Re}\{E_0 e^{j(\omega t - bx)}\}$$

se define la velocidad de fase [9]

$$v = fl = \frac{\omega}{b}$$

y la longitud de onda

$$l = \frac{2\pi}{b}$$

La onda que se estudia en el ejemplo de este trabajo es

$$E_z(x, y, t) = \operatorname{sen}\left[\frac{(x - 50a + ct)p}{8a}\right]$$
$$0 \leq x - 50a + ct \leq 8a$$

siendo

$$b = \frac{p}{8a}$$

por lo tanto su longitud de onda es

$$l = 16a$$

9. Referencias

- [1] Kane S.Yee. 'Numerical Solution of initial Boundary Value Problem Involving Maxwell's Equations in Isotropic Media' IEEE Trans. on Antennas and propagation Vol 14. pp302-307 May 1966.
- [2] Algoritmo de Yee
<http://www.nmr.mgh.harvard.edu/~adunn/papers/dissertation/node32.html>
- [3] Brunel University, UK. The Finite Difference Time Domain Algorithm
<http://www.nmr.mgh.harvard.edu/~adunn/papers/dissertation/node32.html>
- [4] MSC Computational Physics. Time dependent Maxwell's equations
http://rugth30.phys.rug.nl/msc_compphys/FDTD.htm
- [5] Modelling requirements for irregular grids
<http://trigrd.sourceforge.net/tgdocs/node4.htm>
- [6] FDTD Method.
<http://www.electromagnetics.co.uk/fdtd.htm>
- [7] Charlie Chen, Tae-Woo Lee, Narayanan Murugesan, Susan Hagness. 'Generalized FDTD-ADI: An Unconditionally stable Full-Wave Maxwell's equations. Solver for VLSI Interconnect Modeling'
<http://vlsi.ece.wisc.edu/research/2000iccad01.pdf>
- [8] Ulf Andersson. 'The FDTD Method for Computational Electromagnetics (A Case study)'
<http://www.pdc.kth.se/training/2002/SummerSchool/CourseWork/FDTD/index.pdf>
- [9] Eduard C. Jordan, Keith G. Balmain. Ondas electromagnéticas y sistemas radiantes.