Métodos Numéricos para la Resolución de Ecuaciones Diferenciales

Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

CeCal 2002

1. Problema de condición inicial

1.1. Planteo y resultados sobre propagación de errores

1.1.1 Planteo del problema

Se denomina ecuación diferencial ordinaria (EDO) con condición inicial al problema de hallar una función $y(x)$, definida en un intervalo $[a,b]$, que cumpla:

$$\text{(EDO)} \quad \begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = f(x,y) \forall x \in [\grave{a}, b] \\ y(a) = c \end{cases}$$

Existen técnicas analíticas que permiten hallar la solución exacta $y(x)$ en $a \le x \le b$ para ciertos tipos de EDO. Los métodos numéricos para la resolución de EDO tratan de aproximar la función solución $y(x)$ por una estimación de sus valores en un conjunto finito de puntos.

Las EDO aparecen en múltiples problemas de la ciencia y la tecnología. En ocasiones la variable independiente es el tiempo y la ecuación diferencial expresa la ley que gobierna los cambios del sistema.

El caso general del problema es el de un **sistema de EDO** de primer orden con varias funciones incógnita $\eta_1, \eta_2, \ldots.., \eta_s$:

$$\frac{d\eta_i}{dx} = \varphi_i \ (x, \eta_1, \eta_2, \ldots.., \eta_s) \ , \qquad i = 1,2,\ldots.,s$$

$$\eta_i(a) = \gamma_i \qquad i = 1,2,\ldots.,s \qquad \text{(condiciones iniciales)}$$

El sistema anterior se puede escribir en forma vectorial tomando

$$\mathbf{y} = (\eta_1, \eta_2, \ldots.., \eta_s)^T$$
$$\mathbf{f} = (\varphi_1, \varphi_2, \ldots.., \varphi_s)^T$$
$$\mathbf{c} = (\gamma_1, \gamma_2, \ldots.., \gamma_s)^T$$

con lo cual el problema queda de la forma canónica (EDO), siendo ahora **y** un vector:

$$\frac{d\mathbf{y}}{dx} = f(x, \mathbf{y}) \quad \text{con} \quad \mathbf{y}(a) = \mathbf{c}$$

Observación 1
Una EDO de orden mayor que 1 siempre se puede convertir en un sistema de EDO de primer orden.

Dada la ecuación diferencial de orden n: $\dfrac{d^n y}{dx^n} = g\left(x, y, \dfrac{dy}{dx}, \dfrac{d^2 y}{dx^2}, \ldots\ldots, \dfrac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}}\right)$

con condiciones iniciales

$$y(a) = \gamma_1, \ \frac{dy}{dx}(a) = \gamma_2, \ldots\ldots., \ \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}}(a) = \gamma_n$$

se puede efectuar el cambio de variables

$$\eta_1 = y$$
$$\eta_2 = \frac{dy}{dx}$$
$$\eta_3 = \frac{d^2 y}{dx^2}$$
$$\eta_n = \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}}$$

y derivando:
$$\frac{d\eta_1}{dx} = \eta_2 \qquad , \eta_1(a) = \gamma_1$$
$$\frac{d\eta_2}{dx} = \eta_3 \qquad , \eta_2(a) = \gamma_2$$

$$\frac{d\eta_n}{dx} = \frac{d^n y}{dx^n} = g(\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n)\ \eta_n(a) = \gamma_n$$

Entonces, llamando $\mathbf{y} = (\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n)^T, f(x,y) = (\eta_2, \eta_3, \ldots, g(x,y))$,

la ecuación se puede escribir como
$$\frac{d\mathbf{y}}{dx} = \mathbf{f}(x,\mathbf{y}) = (\mathbf{y}(2), \mathbf{y}(3), \ldots, g(x,\mathbf{y}))^T$$

Observación 2

Un sistema está en la **forma autónoma** si $\mathbf{f}$ no depende explícitamente de *x*: $\frac{d\mathbf{y}}{dx} = \mathbf{f}(\mathbf{y})$

Cualquier sistema no autónomo se lleva a uno autónomo, agregando la ecuación trivial,
$\frac{d\eta_{s+1}}{dx} = 1,\ \eta_{s+1}(a) = a$, que tiene solución $\eta_{s+1}(x) = x$.

Teorema de existencia y unicidad de la solución de una EDO

Si se asume que la función $f: D \subset \mathbf{R}^{s+1} \to \mathbf{R}^s$; es diferenciable $\forall x \in [a,b]$ y para todo vector $\mathbf{y} = (\eta_1, \ldots, \eta_s) \in D_y \subset \mathbf{R}^s$ siendo D_y un cierto dominio que contiene a $\mathbf{c}$ como punto interior, entonces la solución existe y es única, dependiendo solo de la condición inicial, mientras $\mathbf{y}(x)$ permanezca en D_y.

Definición 1

$f(x,y)$ verifica la condición de Lispchitz en el punto $(x_0, y_0) \in D$, respecto de la segunda variable, si $\exists U \subseteq D$ entorno de (x_0, y_0), y L>0 tal que :

$$\forall (x,y_1),(x,y_2) \in U \Rightarrow \|f(x,y_1) - f(x,y_2)\| \le L\|y_1 - y_2\|$$

También es válido un teorema de existencia y unicidad, con hipótesis un poco más débiles que las asumidas:

Teorema

Sea $f: D \to \mathbf{R}^s$; *continua*, siendo D un abierto de $\mathbf{R}^{s+1}$. Si *f* cumple la condición de Lispchitz respecto de la segunda variable en D entonces el problema planteado tiene solución única.

Observación 3

Si $f(x,y) = f(x)$, independiente de y, entonces la EDO pasa a ser un problema de integración.

$$f(x,y) = f(x) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = f(x) \Rightarrow y(x) = \int_a^x f(u)\,du \quad \text{si} \quad y(a) = 0$$

1.1.2 Presentación de los elementos de un método numérico de resolución de EDO, a través del método de Euler

Si $\mathbf{y}(x)$ es la solución de la ecuación diferencial, el objetivo será hallar una sucesión $\{\mathbf{y}_n\}$ tal que $\mathbf{y}_n \approx \mathbf{y}(x_n)$ para $x_n = x_0 + nh \quad n = 0,1,2,\ldots,N \quad ,x_0 = a\,, \quad h = \dfrac{b-a}{N}$.

El valor *h* se denomina paso y en este método se adopta constante.

En el método de Euler (o de la tangente) se elige $\mathbf{y}_0 = c$ y se calculan las aproximaciones $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \ldots\ldots.$ a los valores exactos $\mathbf{y}(x_1), \mathbf{y}(x_2), \ldots\ldots.,$ aproximando la derivada en el punto x_n mediante el cociente incremental $\dfrac{\mathbf{y}_{n+1} - \mathbf{y}_n}{h}$.

Se obtiene la ecuación en diferencias $\dfrac{\mathbf{y}_{n+1} - \mathbf{y}_n}{h} = f(x_n, \mathbf{y}_n)$, o sea $\mathbf{y}_{n+1} = \mathbf{y}_n + h\, f(x_n, \mathbf{y}_n)$

Definición 2
Una ecuación en diferencias es una relación que deben cumplir los términos de una sucesión.
Para verlo de otra manera, considérese el desarrollo de Taylor:

$$y(x+h) = y(x) + h\,y'(x) + \frac{h^2}{2} y''(\xi)\ ,\xi \in (x, x+h)$$

Sustituyendo la derivada dada por la EDO en el desarrollo, se obtiene:

$$y(x+h) = y(x) + h\,f(x,y) + 0(h^2)$$

Si se desprecia el término de 2º orden y se evalúa $f(x,y)$ en (x_n, y_n) se tiene nuevamente la fórmula de recurrencia del método:

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n)$$

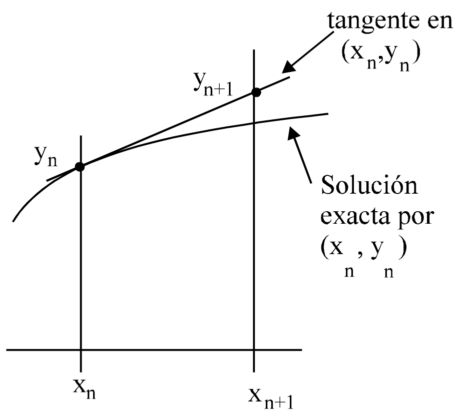


FIGURA 1

Observación 4
Este tipo de método se puede generalizar, partiendo del desarrollo de Taylor y considerando términos de mayor orden.

Definición 3
Un **método de un paso**, consiste en un método donde $\mathbf{y}_n$ es el único dato que se usa en el paso en que se calcula $\mathbf{y}_{n+1}$, n=0,1,2.....

Ejemplo: El método de Euler

Es importante distinguir entre error global y error local, así como entre la sucesión y_n y la función $y(x)$.

Definición 4
El **error global** en el punto x_{n+1} es $E_{n+1} = \mathbf{y}_{n+1} - \mathbf{y}(x_{n+1})$, donde $y(x)$ es la **solución exacta** al problema de valor inicial, con $y(a) = c$ e y_{n+1} es el resultado del cálculo correspondiente a $x = x_{n+1}$

Definición 5
El **error local** en x_{n+1} es la diferencia entre $\mathbf{y}_{n+1}$ y el valor en x_{n+1} de la solución de la EDO que pasa por $(x_n, \mathbf{y}_n)$. Gráficamente, este error está representado por los "saltos" en la solución numérica.

Usando como notación $y(x, x_0, c)$ para la solución de $\begin{cases} \dot{y} = f(x, y) \\ y(x_0) = c \end{cases}$, se obtiene:

Error local $(x_{n+1}) = y_{n+1} - y(x_{n+1}, x_n, y_n) = \varepsilon_{n+1}(h)$
Error global $(x_{n+1}) = \mathbf{y}_{n+1} - \mathbf{y}(x_{n+1}, x_0, \mathbf{c}) = E_{n+1}(h)$

Observación 5

En el caso del problema de integración, como el sistema es $\frac{d\mathbf{y}}{dx} = \mathbf{f}(x)$, la derivada de $\mathbf{y}$ respecto de *x* no depende de $\mathbf{y}$, sino que solo depende de *x*, por lo cual **<u>las curvas son paralelas</u>** y es claro que la suma de los errores locales da el error global. Si el error local es $0(h^n)$ el error global es $0(h^{n-1})$ porque la cantidad de errores locales que se suman es proporcional a $1/h$.

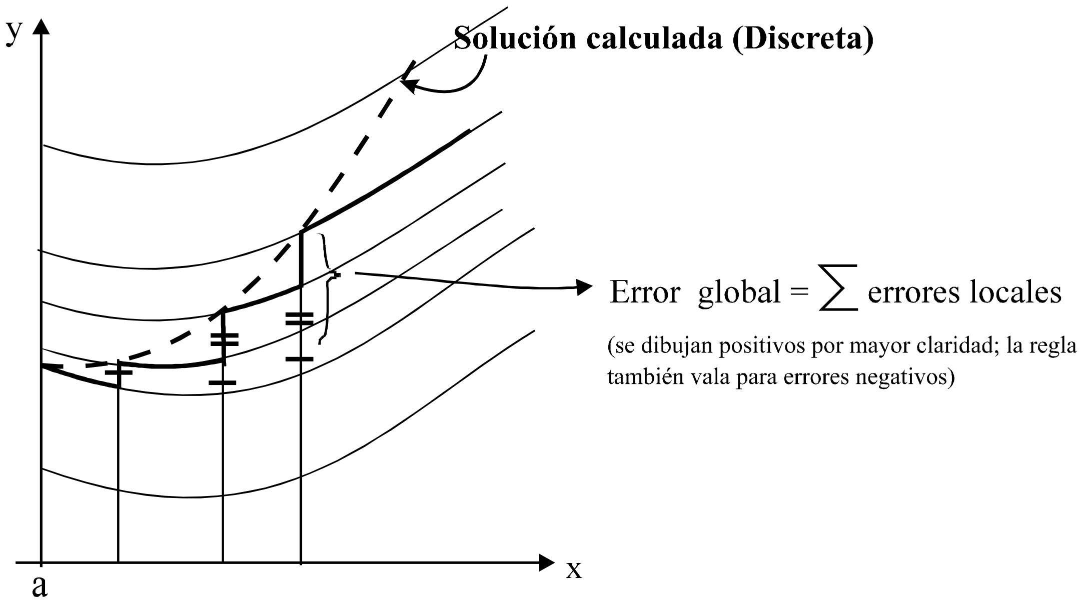


Figura 2

En una EDO, la propagación del error es más complicada. En el punto siguiente se verá que puede ser tanto que Error global > $\sum$ Errores locales o viceversa.

Se puede probar que para un sistema de EDO de primer orden, la diferencia de exponente entre la dependencia asintótica con *h*, del error local y global es 1 (como en el problema de integración)

$$\therefore \frac{\text{error local}}{\text{error global}} \sim 0(h).$$

1.1.3 Estudio de la propagación de perturbaciones en la ecuación diferencial

La solución al problema de valor inicial se puede considerar como una función $\mathbf{y}(x,\mathbf{c})$ donde $\mathbf{c}$ es el vector de condiciones iniciales.
Graficando en el espacio $(x,\mathbf{y})$ la familia de soluciones de una ecuación de primer orden, se obtendrán curvas del tipo:

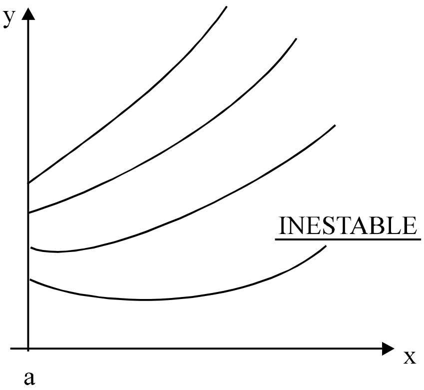


FIGURA 3

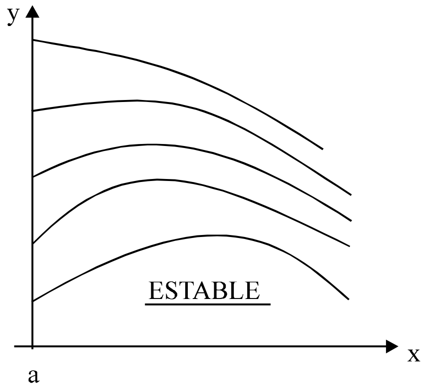


FIGURA 4

Una perturbación en la condición inicial (por ejemplo, causado por un error de redondeo en el valor de $\mathbf{c}$), implica que $\mathbf{y}(x)$ se verá forzada a saltar "una pista" en la familia de soluciones.

En cada paso de un método numérico hay una pequeña perturbación (debido tanto al error de truncamiento del método como a los errores de redondeo debidos al sistema de representación FP) que produce una transición hacia "otra pista" en la familia de curvas solución.

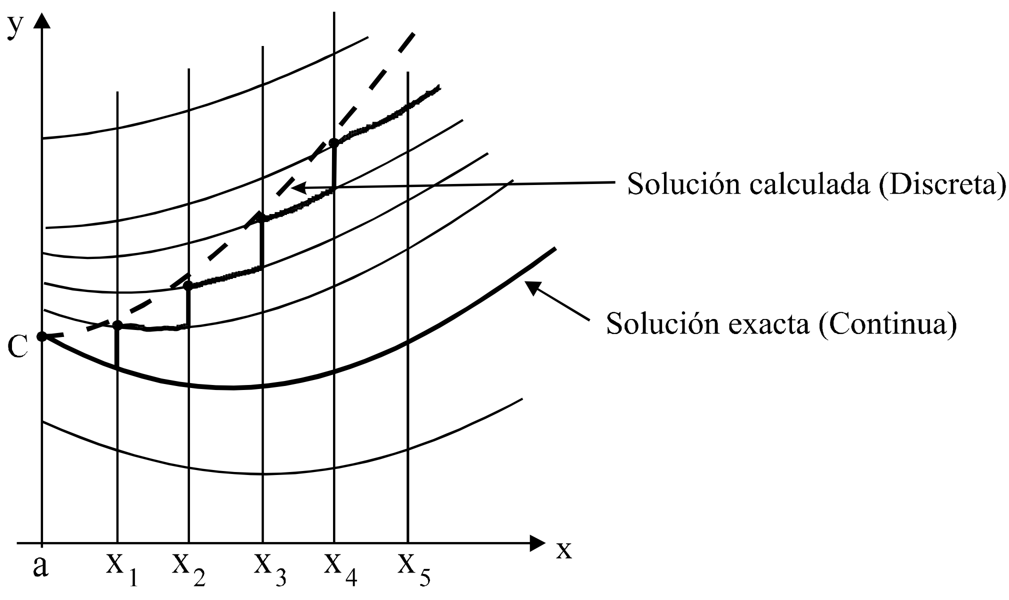


FIGURA 5

Si la familia de soluciones está formada por curvas que se apartan unas de otras (figura 3) entonces el problema es **mal condicionado** (inestable), de la otra manera (figura 4) el problema es **bien condicionado**.

Para el análisis del error, será necesario utilizar los resultados del siguientes lema y teorema.

Lema

Sea $w_0, w_1, w_2, \ldots\ldots$ una sucesión de números reales que satisface $w_n \le A w_{n-1} + B, \quad n = 1, 2, \ldots\ldots$ donde A,B son constantes y A es positivo y distinto de 1. Entonces

$$w_n \le w_0 A^n + B\frac{A^n - 1}{A - 1}, \quad n = 1, 2, \ldots\ldots$$

Teorema

Supóngase que, en una resolución numérica paso a paso (con paso fijo), las magnitudes ε_n de los errores locales en los puntos x_n , n=1,2,....... son menores que ε. Entonces:

1) los errores globales satisfacen la desigualdad,

$$|y_n - y(x_n)| \le \varepsilon . \frac{e^{Lnh} - 1}{e^{Lh} - 1}$$

para n=1,2,........, mientras que esta cota garantice que la región entre la solución calculada y la exacta está contenida en D.

2) Una cota más manejable (válida para L > 0 y aproximada para L< 0 para $|Lh| << 1$) es:

$$|y_n - y(x_n)| \le \frac{\varepsilon}{h} . \frac{e^{Lnh} - 1}{L} \le \frac{cte\varepsilon}{h}$$

La parte 3 del teorema no se pide, pero enuncia que : 3) Para L=0 se tiene,

$$|y_n - y(x_n)| \le n\varepsilon$$

Demostración:

1) El error global debido a las perturbaciones en el punto x_{n-1} es $\mathrm{w}_{n-1} = |y_{n-1} - y(x_{n-1})|$, y se propaga al paso siguiente x_n, acotado por $w_{n-1} \; e^{Lh}$. En x_n se produce una nueva perturbación acotada por ε, y se tendrá que

$$w_n \le w_{n-1} \; e^{Lh} + \varepsilon$$

Aplicando el Lema (con $w_0 = 0; \quad A = e^{Lh}; \quad B = \varepsilon$), se concluye que

$$w_n \le \varepsilon . \frac{e^{Lnh} - 1}{e^{Lh} - 1}$$

2) Se cumple que

$$|y_n - y(x_n)| \le \varepsilon . \frac{e^{nLh} - 1}{\left(1 + Lh + \frac{(Lh)^2}{2} + \ldots\right) - 1} \underset{\approx}{\le} \varepsilon . \frac{e^{nLh} - 1}{(1 + Lh) - 1} = \frac{\varepsilon}{h} \bullet \frac{e^{nLh} - 1}{L} \le C \frac{\varepsilon}{h}$$

porque $nh \le b - a$. La segunda desigualdad es aproximada cuando L< 0 para $|Lh| << 1$

3) Cuando L=0 se tiene que $|y_n - y(x_n)| \le \sum_{i=1}^{n} \varepsilon . 1 = n\varepsilon$

1.2 ESTUDIO DEL ERROR EN EL CASO PARTICULAR DEL MÉTODO DE EULER

Recuérdese que el método de Euler está definido por la recursión:

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + h\ f(x_n, y_n) \qquad (E) \\ y_0 = c \end{cases}$$

1.2.1 Estudio del error y la consistencia

Se comenzará estudiando el **error local**, que como ya se indicó tiene 2 componentes: una debida al truncamiento en el desarrollo de Taylor de la solución exacta y otra debida a los errores de redondeo en los cálculos.

i) Error local debido al truncamiento: Sea $\tilde{y}(x)$ la solución del problema $y' = f(x,y)$ con condición inicial $\tilde{y}(x_n) = y_n$. El error local en el paso *n*+1 estará dado por $\varepsilon_1(h) = \tilde{y}(x_{n+1}) - y_{n+1}$.

$$\tilde{y}(x_{n+1}) = \tilde{y}(x_n + h) = \tilde{y}(x_n) + h\tilde{y}'(x_n) + \frac{h^2}{2}\tilde{y}''(\xi_n) =$$

$$y_n + h f(x_n, y_n) + \frac{h^2}{2}\tilde{y}''(\xi_n) = y_{n+1} + \frac{h^2}{2}\tilde{y}''(\xi_n)$$

$$\Rightarrow \varepsilon_1(h) = \tilde{y}(x_n + h) - y_{n+1} = \frac{h^2}{2}\tilde{y}''(\xi_n)$$

El valor $\varepsilon_1(h)$, que se define como **error local de truncamiento,** también se puede obtener como resultado de sustituir el valor $\tilde{y}(x_{n+1})$ de la solución exacta de la ecuación diferencial en la ecuación en diferencias que determina y_{n+1}:

$$\varepsilon_1(h) = \tilde{y}(x_{n+1}) - (\tilde{y}(x_n) + hf(x_n, \tilde{y}(x_n))) = \frac{\tilde{y}''(\xi_n)h^2}{2}$$

Interesa trabajar con métodos para los cuales el error global debido al truncamiento es un infinitésimo en h. Recuérdese que por teorema anterior, el error global por truncamiento se acota por $\frac{C.\varepsilon_1}{h}$. Esto motiva la siguiente

Definición 6:

Se dice que el método es **consistente** si

$$\frac{1}{h}\text{máx}|\varepsilon_1(h)| \xrightarrow[h \to 0]{} 0 \ \forall y \text{ suficientemente diferenciable}.$$

Se define como **orden de consistencia** al orden del infinitésimo $\varepsilon_1(h)/h$.

En este caso: $\frac{1}{h}|\varepsilon_1(h)| \le \frac{h}{2}\|y''\|_{\infty,[a,b]}$ por lo que el método de Euler es consistente de orden 1.

Se puede probar que el método es consistente de orden p si la ecuación en diferencias se cumple exactamente para funciones *y(x)* que sean polinomios de grado menor o igual a p. Nótese que el método es o no consistente independientemente de $f(x,y)$.

El error global analizado mide diferencias entre la solución exacta de la EDO y la solución exacta de la ecuación en diferencias. Como un argumento a tener en cuenta, se analizará el problema del redondeo en el error local.

ii) Error local debido al redondeo: Suponiendo que el único error en el cálculo de y_{n+1} se debe a la representación en punto flotante de dicho valor, se cumplirá que: $\varepsilon_2(h) \le \varepsilon_{mach} \|y\|_{\infty,[a,b]}$

De i) y ii) se concluye que el error local está acotado por $\varepsilon(h) \le \frac{h^2}{2} \|y''\|_{\infty,[a,b]} + \varepsilon_{mach} \|y\|_{\infty,[a,b]}$

Usando el resultado del teorema anterior con $\varepsilon = \varepsilon(h)$ se obtiene la siguiente acotación para el **error global**,

$$E_{global}(h) \le \frac{\mathcal{C}\varepsilon(h)}{h} = \frac{\mathcal{C}}{h}\left(\frac{h^2}{2}\|y''\|_{\infty,[a,b]} + \varepsilon_{mach}\|y\|_{\infty,[a,b]}\right) = \mathcal{C}_1 h + \frac{\mathcal{C}_2}{h}$$

De la acotación anterior se infiere que existirá un h óptimo para el que se minimiza el error global. En lo que sigue no se utilizará este argumento numérico, sino que se analizará la estabilidad.

1.2.2 Estabilidad numérica

Inevitablemente, en cada paso temporal de la solución numérica de la ecuación en diferencias se introducen pequeños errores, que se convierten en parte de la solución aproximada. La noción de estabilidad numérica relaciona la solución exacta $\{y_n\}$ de la ecuación en diferencias (E) del método numérico con la solución $\{\bar{y}_n\}$ calculada con errores de redondeo. La ecuación en diferencias será estable cuando los errores $\bar{E}_n = y_n - \bar{y}_n$ permanezcan acotados al aumentar *n*.

Para el análisis del error, será necesario utlizar el resultado del lema antes enunciado.

Si $\bar{e}_n$ es el error local debido al redondeo (en el paso *n*) de la ecuación en diferencias, resulta

$$\bar{y}_{n+1} = \bar{y}_n + h f(x_n, \bar{y}_n) + \bar{e}_n$$

restando miembro a miembro la ecuación (E), $\bar{E}_{n+1} = \bar{E}_n + h(f(x_n, y_n) - f(x_n, \bar{y}_n)) + \bar{e}_n$

asumiendo que *f* es diferenciable respecto de *y*, $\bar{E}_{n+1} \le |1 + hK_n|\bar{E}_n + |\bar{e}_n|$

donde $K_n = \frac{\partial f}{\partial y}(x_n, \xi_n), \xi_n \in [y_n, \bar{y}_n]$

Si $K_n \le \mathrm{L}$ aplicando el lema anterior, con $|\bar{e}_n| \le \varepsilon \quad \forall n, \bar{E}_n \le (1 + hL)^n \bar{E}_0 + \varepsilon \frac{(1 + hL)^n - 1}{hL}$

Análogamente, si $K_n = K$ constante, se obtiene $\bar{E}_n \le |1 + hK|^n \bar{E}_0 + \varepsilon \frac{|1 + hK|^n - 1}{hK}$

de donde se concluye que los errores estarán acotados siempre que $|1 + hK| \le 1$.

Nótese que esta restricción depende del *método* y del propio *problema* (a través de K).

Salvo en el caso de Euler (y de otros métodos también simples) el estudio de la evolución de $\bar{E}_n$ es muy engorroso. En general, para estudiar este tipo de propagación se estudia qué ocurre en una ecuación diferencial lineal de variable compleja sencilla que se denomina **problema test:**

$$\begin{cases} y' = qy \\ y(0) = 1 \end{cases} \qquad \text{(PT)}$$

cuya solución es $y = e^{qx}$

La parte crucial de este estudio (para el caso real) ocurre cuando *Re(q)<0* pues allí la solución debe decaer. La cuestión es si la cantidad $|1+hq|$ **se hace mayor que 1**. Esto introduce un intervalo de valores permitidos para h. Para valores de h suficientemente pequeños la desigualdad anterior se satisface, pero cuando *q* es fuertemente negativo (caso en el que la solución exacta decae rápidamente) esta restricción puede obligar a utilizar un *h* demasiado pequeño, y por lo tanto a desechar el método.

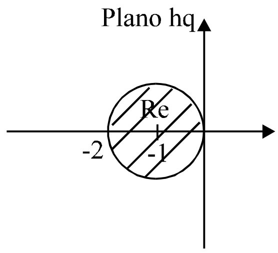
Definición 7:
Se llama **región de estabilidad** del método numérico al conjunto de puntos *z=hq* del plano complejo para los cuales la solución $\{y_n\}$ de la ecuación en diferencias se mantiene acotada al crecer *n.*

Observación
La definición anterior **no es equivalente** a imponer que los errores de redondeo estén acotados. Sin embargo, para el caso del método de Euler, ambas condiciones coinciden.

Aplicando el método de Euler al problema Test, resulta

$$y_{n+1} = y_n + h f(x_n, y_n) = y_n + hq y_n = (1+hq) y_n = (1+hq)^{n+1} y_0$$

y la región de estabilidad es el círculo $R_e = \{z \in C, |z-(-1)| \leq 1\}$



La región de estabilidad caracteriza al método, ya que resulta de aplicárselo al problema test, y no a ningún problema concreto. En cambio, el valor admisible máximo para *h* depende del problema (a través de *q*).

Ejemplo 4: Si $q = -10 \Rightarrow 0 < h < 0,2.$
Si $q = -10 + 102 \Rightarrow 0 \leq h \leq 0,1$

Observaciones al uso del problema test

1) Evita realizar, en métodos más complejos, el estudio de propagación del error $\overline{E}_n = y_n - \overline{y}_n$ efectuado para el método de Euler

2) Si la ecuación en diferencias es lineal, se puede ver que el error $\overline{e}_n$ también cumple esa ecuación. Por eso la condición de soluciones acotadas en (PT) garantiza la acotación de los errores.

3) Una motivación del PT se verá en el punto siguiente, tratado conjuntamente con el caso vectorial.

4) La solución exacta sería

$$\mathrm{y}_{\mathrm{n}+1} = y_0 . \left(1 + hq + \frac{(hq)^2}{2} + \frac{(hq)^3}{6} + \ldots\right)^{n+1} = y_0 . e^{(1+n)qh}$$

lo que evidencia lo crudo de la aproximación conseguida con Euler.

Observación 10:
El estudio de la convergencia del método deberá tener en cuenta los 2 conceptos anteriores de consistencia y estabilidad numérica.

Resumiendo:
Los pasos seguidos al resolver numéricamente una EDO con el método de Euler:

$y' = f(x,y)$ $y(a) = c$	sol. exacta de (1) $y(x)$	$\rightarrow$	$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n)$ $y_0 = c$	sol. exacta de (2) $\{y_n\}$	$\rightarrow$	solución calculada $\{\bar{y}_n\}$
(1)			(2)			(3)

<u>Tres conceptos</u> relacionan los problemas (1), (2) y (3):
Consistencia: $(1) \sim (2)\,\text{cuando}\, h \rightarrow 0$ (la ecuación en diferencias "tiende" a la EDO)

Estabilidad: $(2) \sim (3)$ (la solución calculada de la ecuación en diferencias aproxima a la solución exacta de dicha ecuación)

Convergencia: $(1) \sim (3)$ (la solución calculada aproxima a la solución de la EDO)

1.2.3 Estudio del caso vectorial

Motivación del problema test

Considérese el sistema de EDO $\mathbf{y}' = f(x, \mathbf{y}), \mathbf{y}(a) = \mathbf{c}$.
Sean $\mathbf{y}_1(x), \mathbf{y}_2(x)$ soluciones de dicho sistema, entonces la EDO que satisface su diferencia es:

$$\mathbf{y}_1'(x) - \mathbf{y}_2'(x) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{y}}\left(f(x, \mathbf{y}_1(x))(\mathbf{y}_1(x) - \mathbf{y}_2(x)) + O\left((\mathbf{y}_1(x) - \mathbf{y}_2(x))^2\right)\right)$$

.Se nota $\varepsilon(x) = \mathbf{y}_1(x) - \mathbf{y}_2(x)$ y se tiene $\varepsilon'(x) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{y}}\left(f(x, \mathbf{y}_1(x))\varepsilon(x) + O\left(\varepsilon(x)^2\right)\right)$.

Dicha ecuación linearizada (esto es, cuando las soluciones son cercanas, despreciando el efecto del término $O\left(\varepsilon(x)^2\right)$) es la ecuación variacional !!

$$\varepsilon' = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{y}}(x)\varepsilon = \mathbf{J}(\mathbf{x})\varepsilon = \left(\left(\frac{\partial f_i}{\partial y_j}(x, \mathbf{y}(x))\right)\right)\varepsilon,$$, donde $\mathbf{J}(\mathbf{x})$ es la matriz Jacobiana de $\mathbf{f}$.

Aproximando localmente el Jacobiano por una matriz constante **A** se obtiene un sistema lineal de EDO con coeficientes constantes. $\mathbf{z}' = \mathbf{A}\,\mathbf{z}$, $\mathbf{z}(0) = \mathbf{z}_0$

Si **A** es diagonalizable, existe **T** tal que $\mathbf{D} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T}$ es una matriz diagonal

Con el cambio de variable $\mathbf{T}^{-1}\mathbf{z} = \mathbf{w}$ queda, sustituyendo en $\mathbf{z}' = \mathbf{T}\mathbf{D}\mathbf{T}^{-1}\mathbf{z}$, la nueva ecuación
$$\mathbf{w}' = \mathbf{D}\,\mathbf{w}, \ \mathbf{w}(0) = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{z}_0 = \beta$$

que se descompone en n ecuaciones diferenciales desacopladas $\boxed{w_i' = \lambda_i w_i}$, $w_i(o) = \beta_i$, $i = 1, 2, \ldots, n.$

Entonces para analizar la estabilidad de métodos numéricos para un sistema de EDO, basta usar el problema test del caso escalar: $\boxed{y' = qy,\ y(o) = 1}$, exigiendo que el paso h usado cumpla $\lambda_i h \in R_e$, $\forall\ \lambda_i$ valor propio de A.

Si esto ocurre, $\|\mathbf{w}\|$ está acotado, por lo cual $\mathbf{z} = \mathbf{T}\mathbf{w}$ también estará acotado.

Un ejemplo de matriz **A** podría ser del tipo

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \rho\cos\varphi & \rho\,\mathrm{sen}\,\varphi \\ -\rho\,\mathrm{sen}\,\varphi & \rho\cos\varphi \end{bmatrix} \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} \rho e^{i\varphi} & 0 \\ 0 & \rho e^{-i\varphi} \end{bmatrix} \quad \mathbf{T} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2}i \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}i \end{bmatrix}$$

<u>Ejemplo</u>

$$y'' = -2dy' - y \quad y(9) = c_1 \quad y'(0) = c_2$$

1) Transformar a primer orden

$$y'_1 = y_2 \quad \vec{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \quad f(x, y) = \begin{bmatrix} y_2 \\ -2dy_2 - y_1 \end{bmatrix}$$

$$y'_2 = -2dy_2 - y_1 \quad \mathbf{J}(x) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2d \end{bmatrix}$$

En este caso $\mathbf{J}(x)$ es constante

2) El método de Euler es consistente, pero...¿Qué valor de *h* usar?

Los valores propios de $\mathbf{J}(x)$ son solución de $\lambda^2 + 2d\,\lambda + 1 = 0$

$\lambda_i = -d \pm \sqrt{d^2 - 1} \quad i = 1, 2$, que tienen parte real negativa siempre

Debe cumplirse para *d* dado:

$$|1 + \lambda_i h| < 1; i = 1, 2$$

$$d = 0{,}1 \rightarrow \ 0 \le h \le 0{,}19\ldots$$
$$d = 1 \qquad 0 \le h \le 2$$
$$d = 10 \qquad 0 \le h \le 0{,}1\ldots.$$

Si algún $\lambda_i > 0$, el método es inestable independientemente de h.