

---

Formulario de Aprobación Curso de Posgrado 2012

Asignatura: **TEORÍA ERGÓDICA**

---

**Profesor responsable de la asignatura <sup>1</sup>:** Dra. Ing. Eleonora Catsigeras  
Cargo: Profesora Agregada, Grado 4,  
del Instituto de Matemática y Estadística Prof. Ing. Rafael Laguardia (IMERL),  
Facultad de Ingeniería, Universidad de la República.

**Otros docentes de la Facultad: de Ingeniería:** No hay  
(título, nombre, grado, Instituto)

**Instituto ó Unidad:** IMERL

<sup>1</sup> Se agrega CV.

---

**Fecha de inicio/finalización:** última semana de Agosto 2012/ primera semana de Diciembre 2012  
**Horario y Salón:** A determinar

**Horas Presenciales:** 91

**Nº de Créditos:** 12

**Público objetivo y Cupos:** Principalmente egresados y estudiantes avanzados de las carreras de grado en Ingeniería interesados en los objetivos del curso. También: docentes de la Facultad de Ingeniería, y estudiantes avanzados o egresados de las Licenciaturas en Matemática o en Física, o equivalentes, interesados en los objetivos del curso. **No hay cupo.**

---

**Objetivos del curso:** Objetivo general: Estudiar la teoría matemática abstracta de los sistemas dinámicos deterministas, desde el punto de vista de la teoría ergódica.. Alcance: desde las definiciones y teoremas básicos, completando los prerrequisitos matemáticos no incluidos en las asignaturas de grado en Ingeniería, llegar hasta algunos resultados recientes de la Teoría Ergódica y al planteamiento de problemas abiertos. Objetivos específicos (foco del curso): estudiar las propiedades ergódicas y estadísticas conocidas de la dinámica asintótica (atractores) de los sistemas dinámicos deterministas caóticos a tiempo discreto. Notas: Es un curso de matemática no aplicada. El contenido de su programa es teórico y abstracto. Los resultados que se estudiarán son aplicables en su mayoría a cualquier sistema dinámico determinístico continuo, con énfasis en las dinámicas que evolucionan en espacios o variedades de dimensión finita, incluyendo aquellas que son diferenciables.

---

**Conocimientos previos exigidos:** Los de los siguientes cursos de matemática de las carreras de grado en la Facultad de Ingeniería, o equivalentes: Cálculo 1, 2 y 3, Álgebra Lineal 1 y 2, Ecuaciones Diferenciales y Probabilidad y Estadística.

**Conocimientos previos recomendados:** Otros conocimientos previos convenientes: los del curso de postgrado Ecuaciones Diferenciales Avanzadas de la carrera de Ingeniería Matemática o similar, y / o los del curso de grado Análisis Real (teoría abstracta de la medida) e Introducción a la Topología, de la carrera de licenciatura en Matemática de la Fac. de Ciencias, o similar:

**Metodología de enseñanza:** Trabajo presencial: Se dictarán, en cada semana del curso, 2 clases teórico-prácticas de 2 horas de duración cada una, consistentes en exposición del docente de teoremas, demostraciones y ejemplos, y una clase de 2 horas de duración destinada a práctica de los estudiantes sobre los ejercicios propuestos, y completación de teórico, en la modalidad de trabajo en equipo de los estudiantes, consultas entre estudiantes y con el docente, y eventuales exposiciones por parte de los estudiantes. Estas 6 horas semanales, durante 15 semanas, más 1 hora del examen final oral por cada estudiante, comprenden la actividad presencial, sumando 91 horas.

El estudiante dedicará además, aproximadamente 4 horas semanales no presenciales para estudiar el teórico, durante las 15 semanas del curso; y por lo menos, en promedio 4 horas no presenciales semanales para realizar los ejercicios, estudiar y preparar las exposiciones que le correspondan, preferentemente en equipo con otros estudiantes, durante las últimas 10 semanas del curso, (incluyendo la preparación del examen oral final). Estas comprenden la actividad no presencial, sumando 100 horas.

- Horas clase (teórico): 60
- Horas clase (práctico): 30
- Horas clase (laboratorio): No hay
- Horas consulta: incluidas en las clases prácticas
- Horas evaluación: exposiciones de estudiantes, incluidas en las clases prácticas, más 1 hora (por estudiante) del examen oral final.
  - Subtotal horas presenciales: 91
- Horas estudio del teórico: 60
- Horas resolución ejercicios/prácticos y horas trabajo estudio en equipo de estudiantes: 40
- Horas proyecto final/monografía: No hay
  - Total de horas de dedicación del estudiante no presenciales: 100
  - Total de horas de dedicación del estudiante: 191 (100 + 91)

**Forma de evaluación: EXPOSICIÓN ORAL O ESCRITA DE TEMAS Y EJERCICIOS PROPUESTOS DURANTE EL CURSO (individual o en equipo de hasta 3 estudiantes) y EXAMEN ORAL FINAL (individual).**

**TEMARIO:**

**I. PRELIMINARES DE TOPOLOGÍA, DINÁMICA Y TEORÍA DE LA MEDIDA (2 semanas) Bibliografía [5,8,15]**

- Espacios métricos compactos, compacidad secuencial, Variedades riemannianas compactas
- Sistema dinámico determinista discreto y continuo. Dinámica topológica.
- Espacios de medida abstracta finita, probabilidades de Borel, Integración abstracta en espacios de medida.
- Particiones medibles y Teorema de descomposición de Rohlin (solo enunciado)

**II. FUNDAMENTOS DE LA TEORIA ERGODICA (3 semanas) Bibliografía[1,2,16]**

- Existencia de medidas invariantes,
- Lema de Poincaré medible y de recurrencia topológica,
- Teorema ergódico de Birkhoff. Teorema ergódico subaditivo de Kingman.
- Ergodicidad. Teorema integral de descomposición ergódica.

**III. TEORIA ERGODICA DE ATRACTORES DE SISTEMAS DINÁMICOS CONTINUOS (2 semanas). Bibliografía [5,10,11,12,13,14]**

- Atractor topológico y atractor de Milnor.
- Atractor ergódico de Pugh-Shub, medidas SRB o físicas.
- Atractor estadístico de Ilyashenko y medidas SRB-like

**IV. TEORIA ERGODICA DE ATRACTORES DE SISTEMAS DINÁMICOS DIFERENCIABLES. (4 semanas) Bibliografía [3,5,6,7]**

- Puntos regulares, exponentes de Liapunov, Teorema de Oseledets (enunciado general, dem. en dimensión 1)
- Región de Pesin. Subvariedades invariantes. Continuidad absoluta de foliaciones invariantes.
- Hiperbolicidad uniforme, particiones de Markov, semiconjugación con subshift finito y medidas de Bernoulli.
- Relaciones entre medidas SRB y continuidad absoluta de medidas condicionales.
- Teorema de Sinai-Ruelle-Bowen: existencia de medidas físicas (SRB) para atractores unif, hiperbólicos

**V. ENTROPÍA Y FORMALISMO TERMODINÁMICO (4 semanas) Bibliografía [1,2,4,9]**

- Entropía métrica y topológica. definiciones, interpretación, propiedades y ejemplos.
- Expansividad. Definición y ejemplos. Principios variacionales de la entropía (solo enunciados).
- Desigualdad de Ruelle para la entropía métrica.
- Fórmula de Pesin para la entropía métrica. Mapas expansores.
- Relación entre fórmula de Pesin, los EQ (estados de equilibrio respecto al potencial  $-\det Df$ ) y las medidas SRB.
- Teorema de Ruelle existencia y unicidad de EQ para dinámicas expansoras  $C^2$  en  $S^1$ .
- Genericidad  $C^1$  de la unicidad de EQ para expansores en  $S^1$  (Teorema de Campbell/Quas)

## BIBLIOGRAFÍA

### Principal

- [1] *An Introduction to Ergodic Theory*, Peter Walters, Springer, ISBN 0387951529, New York-Heidelberg-Berlin, 2000
- [2] *Ergodic theory and differentiable dynamics*, Ricardo Mañé, *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete Vol. 3*, Springer-Verlag, ISBN 978-0387152783 Berlin-Heidelberg-New York-Tokyo, 1987.
- [3] *Lyapunov Exponents and Smooth Ergodic Theory*, Luis Barreira, Yakov Pesin, University Lectures Series Vol. 23, Amer. Math Soc, ISBN 978-08218-2921-1, Providence 2001
- [4] *Equilibrium States in Ergodic Theory*, Gerald Keller London Math. Soc. Texts, Vol. 42, Cambridge University Press, 978-052159534-6 Cambridge, 1998.

### Secundaria

- [5] *Modern Theory of Dynamical Systems*, Anatole Katok, Boris Hasselblatt, Cambridge University Press, ISBN 0521/57557/5, Cambridge, 1999.
- [6] *Dynamics Beyond Uniform Hyperbolicity*. Christian Bonatti, Lorenzo Díaz, Marcelo Viana, *Encyclopaedia of Mathematical Science. Series Mathematical Physics III 102*, Springer-Verlag, ISBN 3-540-22066-6, Berlin-Heidelberg, 2005
- [7] *Particiones de Markov para Difeomorfismos de Anosov*, Eleonora Catsigeras, Innovalibros, ISBN 978-84-938491-6-0, Madrid, 2011.
- [8] *Análisis Real y Complejo*, Walter Rudin, Alhambra ISBN 84-20-0651-6, Madrid, 1979

### Artículos y notas complementarias para las exposiciones de estudiantes

- [9] *A Generic  $C^1$  Expanding Map has a Singular SRB Measure*. James Campbell, Anthony Quass *Commun. Math. Physics* 221, Vol. 221, N° 2, pp. 335-349 ISSN: 0010-3616, 2001.
- [10] *On the concept of attractor*. John Milnor. *Commun. in Math. Phys.* Vol. 99 pp. 177-195 y Vol. 102, 517-519, ISSN: 0010-3616, 1985
- [11] *Ergodic Attractors*. Charles Pugh, Mike Shub. *Trans. Amer. Math. Soc.* 312, pp. 1-54, ISSN: ISSN 0002-9947, 1989
- [12] *Minimal attractors*. Yu. S. Ilyashenko: *In Proceedings of EQUADIFF 2003*, International Conference on Differential Equations in Hussels, Belgium, pp. 421-428, World Scientific Publishing, ISBN: 978-981-256-169-5 Singapore, 2005
- [13] *SRB-like measures for  $C^0$  dynamics*, E. Catsigeras, H. Enrich. *Bull. Polish Acad. of Scienc.Math.* Vol.59, 2011, pp. 151-164, ISSN 0239-7269, 2011.
- [14] *On Ilyashenko-s Statistical Attractors*, E. Catsigeras, *Prepublicaciones Matemáticas de la Universidad de la República Premat 2011/132*, ISSN 1688518X, 2da. versión, Montevideo, 2012
- [15] *Disintegration into conditional measures: Rokhlin's theorem*, Marcelo Viana, (para el Curso Teoría Ergódica del programa de Doutorado do IMPA), IMPA, publicado en <http://w3.impa.br/~viana/out/rokhlin.pdf> (Last retrieved 11-05-2012), Río de Janeiro, 2007.
- [16] *On the Subadditive Ergodic Theorem*, Artur Avila, Jairo Bochi, para el curso de Teoría Ergódica del programa de Postgrado Matemática da PUC-Rio, PUC, publicado en <http://www.mat.puc-rio.br/~jairo/docs/kingbirk.pdf> (Last retrieved 11-05-2012), Río de Janeiro, 2009