Expresiones y funciones booleanas

Expresiones y funciones booleanas

Podemos definir las expresiones booleanas por medio de una definición recursiva de la siguiente forma:

- 0 es una expresión booleana y 1 es una expresión booleana
- Las variables son expresiones booleanas
- Si e es una expresión booleana, $\overline{e}$ es una expresión booleana
- Si e es una expresión booleana, (e) es una expresión booleana
- Si e_1 y e_2 son expresiones booleanas, $e_1 + e_2$ y $e_1 \cdot e_2$ son expresiones booleanas

El primer caso base que define los elementos del conjunto $G = \{0,1\}$ como expresiones booleanas, se podría simplificar cambiándolo por "Las constantes son expresiones booleanas". Los elementos del álgebra son constantes, tienen un valor y éste no cambia.

Si no incluímos las variables, las expresiones booleanas siempre se podrían evaluar, y podrían por lo tanto siempre escribirse como 0 o como 1.

Un ejemplo de expresión booleana es la siguiente:

$$(x+y)\cdot z + \overline{x}\cdot(y+z)$$

El valor de la evaluación de esta expresión estará en función de los valores de x, y, z. De otra forma, la expresión booleana está definiendo una función de (por lo menos) las variables que incluye.

La expresión anterior podría ser la definición de la función:

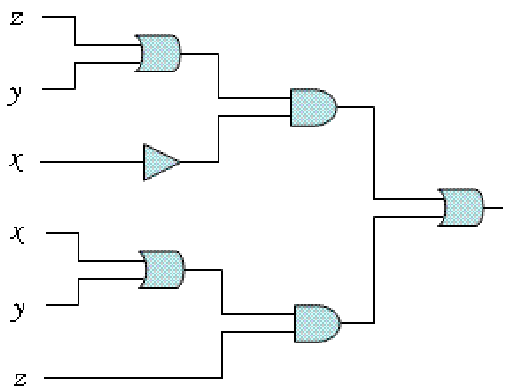
$$f(x,y,z,w) = (x+y)\cdot z + \overline{x}\cdot(y+z)$$

Para determinar los valores de una función se puede organizar una tabla que contemple todas las posibles combinaciones de las variables de la función.

Consideremos por ejemplo la función booleana $f(x,y,z) = (x+y)\cdot z + \overline{x}\cdot(y+z)$

Para cada expresión dada, es posible hallar una tabla de evaluación y un circuito asociados.

x	y	z	$f(x,y,z)$
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1



Podemos preguntarnos si no habrá una expresión que represente la misma función y sea más sencilla, o permita construir un circuito más rápido (de menos niveles) o más barato (con menos compuertas).

Suma de productos canónicos

Llamaremos producto canónico de n variables al producto de todas ellas en el cual cada variable aparece de forma simple o complementada. Por ejemplo, un producto canónico de tres variables x, y, z es:

$$x \cdot \overline{y} \cdot \overline{z}$$

Cada producto canónico da 1 sólo para una determinada combinación de las variables, y 0 para todas las otras combinaciones.
Una suma de productos canónicos es una expresión formada sumando productos canónicos. Se puede demostrar que toda función de n variables puede expresarse como:

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, ..., x_n) = & \; x_1 \cdot x_2 \cdot ... \cdot x_n \cdot f(1,1,...,1) \\ & + \overline{x}_1 \cdot x_2 \cdot ... \cdot x_n \cdot f(0,1,...,1) \\ & + x_1 \cdot \overline{x}_2 \cdot ... \cdot x_n \cdot f(1,0,...,1) \\ & ... \\ & + \overline{x}_1 \cdot \overline{x}_2 \cdot ... \cdot \overline{x}_n \cdot f(0,0,...,0) \end{aligned}$$

Es decir que toda función se puede representar como una suma de productos canónicos, ya que los coeficientes sólo pueden ser 0 (lo que significaría que ese producto canónico no estará en la representación) o 1 (lo que significaría que este producto canónico sí estará en la representación).

Si un producto canónico está en la representación de suma de productos canónicos de una función, significa que para esa función, la combinación de variables que se obtiene con las variables que aparecen de forma simple en 1 y con las variables que aparecen complementadas en 0, se corresponde con un 1.

Es fácil entonces buscar la representación de una función como suma de productos canónicos, buscando el producto canónico que corresponde a las combinaciones que dan 1.

Por ejemplo, para el caso de la función $f(x, y, z) = (x + y) \cdot z + \overline{x} \cdot (y + z)$, que se puede evaluar de la siguiente forma:

x	y	z	$f(x,y,z)$	
0	0	0	0	
0	0	1	1	$\rightarrow \overline{x} \cdot \overline{y} \cdot z$
0	1	0	1	$\rightarrow \overline{x} \cdot y \cdot \overline{z}$
0	1	1	1	$\rightarrow \overline{x} \cdot y \cdot z$
1	0	0	0	
1	0	1	1	$\rightarrow x \cdot \overline{y} \cdot z$
1	1	0	0	
1	1	1	1	$\rightarrow x \cdot y \cdot z$

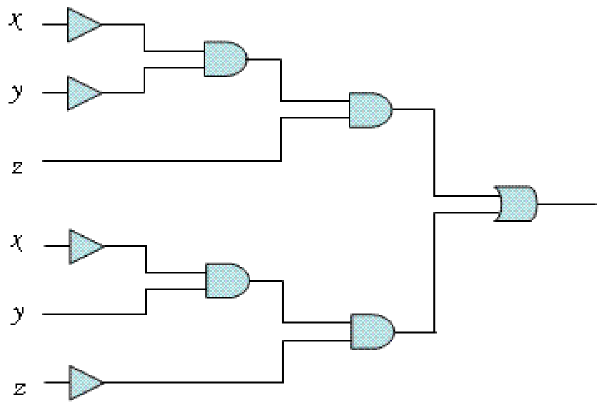
Los productos canónicos que hemos puesto al lado de cada combinación de variables que produce un 1 en la función, corresponden al producto canónico que produce un 1 sólo para esa combinación. Si sumamos los productos canónicos que hemos encontrado, tendremos que esta suma de productos canónicos produce un 1 exactamente en los mismos casos que la función, y por lo tanto serán iguales como funciones.

Hemos encontrado entonces (y tenemos un procedimiento para el caso general) una expresión equivalente, en forma de suma de productos canónicos, para la función $f(x, y, z) = (x + y) \cdot z + \overline{x} \cdot (y + z)$, y esta es:

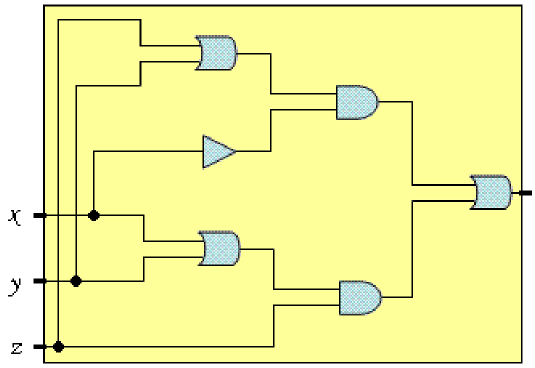
$$f(x, y, z) = \overline{x} \cdot \overline{y} \cdot z + \overline{x} \cdot y \cdot \overline{z} + \overline{x} \cdot y \cdot z + x \cdot \overline{y} \cdot z + x \cdot y \cdot z$$

Esta forma puede resultar conveniente para trabajar en algunos casos, pero nótese que la expresión es más larga y la construcción de un circuito utilizando esta expresión podría resultar más caro.

A continuación se muestra la parte del circuito que corresponde a la suma de los dos primeros productos canónicos (y faltan tres más).



El circuito completo utilizando la expresión original, se puede representar con menos compuertas que el circuito parcial anterior.



Nótese que este circuito es el mismo que dibujamos al principio, solamente hemos eliminado las entradas duplicadas bifurcando las "señales de entrada" x, y, z .

Producto de sumas canónicas

Por la propiedad de dualidad del álgebra de Boole, todo lo que hemos visto tiene su dual. En particular, una función se puede representar como producto de sumas canónicas. En este caso deben buscarse las combinaciones donde la función vale 0 y encontrar en cada uno de esos casos la única suma que produce 0 para luego realizar el producto de dichas sumas, que será 0 exactamente en esas combinaciones (las mismas donde se hace 0 la función).

Operadores lógicamente completos

Un conjunto de operadores es lógicamente completo si cualquier función booleana puede expresarse mediante los mismos. Por lo que hemos visto sobre la suma de productos canónicos (o el producto de sumas canónicas) sabemos que mediante los operadores **AND**, **OR** y **NOT** podemos expresar cualquier función booleana.

Para probar que otro conjunto de operadores es lógicamente completo, basta con probar que mediante operadores de ese conjunto se puede representar el **AND**, el **OR** y el **NOT**. Por ejemplo, como x **AND** y = **NOT** x **OR** **NOT** y, tenemos que el conjunto de operadores {**OR, NOT**} es completo.