

Paradoja EPR y desigualdades de Bell:

pruebas experimentales,
estado actual del conocimiento

Dr. Gonzalo Abal
Instituto de Física – Facultad de Ingeniería
Universidad de la República

*Trabajo determinado en el marco del concurso de méritos y
pruebas para el cargo de Profesor Agregado de Física.*

Montevideo
Febrero 2007

Índice general

1. Introducción	1
2. Paradoja EPR	6
2.1. Versión original de la paradoja EPR	7
2.2. Versión de Bohm	11
3. Desigualdades de Bell	15
3.1. Teorema de Bell	17
3.2. Desigualdad CHSH	21
3.3. Desigualdad CH74	25
3.3.1. Medidas de polarización de un canal	26
3.3.2. Hipótesis de “No Enhancement”	29
4. Buscando un veredicto experimental	36
4.1. Primeros experimentos	38
4.2. Las experiencias de Aspect	44
4.2.1. Experiencias de un canal	44
4.2.2. Experiencia de Aspect de dos canales	50
4.2.3. Loopholes	54
4.3. Experiencias de 3 ^{ra} generación	58
4.3.1. Experiencia de Innsbruck (1998)	59
4.3.2. Experiencia del NIST (2001)	65
4.3.3. Otras experiencias recientes	72
5. Conclusión	74
Apéndices	79

A. Partículas con Spin 1/2	80
A.1. Una partícula	80
A.2. Dos partículas	82
B. Polarización y Spin	85
B.1. Experiencia de Stern-Gerlach	85
B.2. Analogía con luz polarizada	89
B.3. Correlaciones de polarización	91
B.3.1. Medidas de un canal	91
B.3.2. Medidas de dos canales	93
C. Una desigualdad algebraica	95
D. Fotones por conversión paramétrica	97

Índice de figuras

2.1. Propuesta de Bohm para ilustrar la paradoja EPR	13
3.1. Orientación de los analizadores (1 ^{er} desigualdad de Bell) . . .	20
3.2. Orientación de los analizadores (esquema de dos canales) . . .	25
3.3. Experimento EPR de un canal	27
3.4. Predicción cuántica para $\Delta(\phi)$	33
4.1. Decaimiento en cascada en ^{40}Ca	39
4.2. Resultados de algunas experiencias de un canal	42
4.3. Resultados de la primer experiencia de Aspect et al.	46
4.4. Experiencia de Aspect et al. con analizadores variables	48
4.5. Experiencia de Aspect et al. con detección de dos canales . . .	51
4.6. Resultados de la segunda experiencia de Aspect et al.	53
4.7. Esquema de la experiencia de Innsbruck	60
4.8. Diagrama de Minkowski para la experiencia de Innsbruck . . .	63
4.9. Iones fluorescentes en trampa de iones	66
4.10. Resultados de la experiencia de Rowe et al.	70
B.1. Analizador de Stern-Gerlach	86
B.2. Analizadores de Stern-Gerlach secuenciales	88
B.3. Polarizadores secuenciales	90
B.4. Direcciones de polarización	90
B.5. Medida de polarización de un canal	92
D.1. Conversión paramétrica (PDC)	98
D.2. Esquema de los experimentos basados en PDC-I	99
D.3. Generación de pares enredados con PDC-II	100

Índice de cuadros

4.1. Parámetros experimentales de experiencias de un canal	41
4.2. Resultados de las primeras experiencias de un canal	43
4.3. Registros locales en la experiencia de Innsbruck	61
4.4. Parámetros de experiencias con analizadores variables	64
4.5. Parámetros en la experiencia de Rowe et al.	68
4.6. Principales experimentos tipo EPR	71

Capítulo 1

Introducción

Science is not and will never be a closed book. Every important advance brings new questions. Every development reveals, in the long run, new and deeper difficulties.

*Albert Einstein and Leopold Infeld,
The Evolution of Physics, 1937.*

Hacia 1930 quedan establecidas las bases de la Mecánica Cuántica, aunque no todos los físicos de la época están satisfechos con la situación. El crítico mas notable es Albert Einstein, quien luego de su *Annus Mirabilis* de 1905, se ocupa principalmente de desarrollar la Relatividad General y de otras contribuciones de importancia como la explicación del mecanismo de emisión estimulada de radiación en 1917 y (junto a S. Bose) la estadística de Bose-Einstein en 1924. Resulta paradójico que el fotón y la luz laser, dos conceptos tempranamente elucidados por Einstein, tengan un rol tan destacado en la comprobación de que la familia de teorías Realistas Locales no pueden dar una descripción adecuada de la naturaleza.

Desde 1913, Einstein mantuvo un encendido debate con Niels Bohr y, por separado, con su amigo Max Born buscando contradicciones internas en la Mecánica Cuántica. La indeterminación de las predicciones cuánticas, los efectos no locales (la inaceptable “acción a distancia”) y las superposiciones

de dos o mas alternativas clásicamente excluyentes¹, nunca fueron aceptadas por Einstein mas que como una descripción aproximada de una realidad física que por el momento permanecía inaccesible. Uno de los últimos episodios de este debate, la paradoja EPR, constituyó uno de los desafíos mas fuertes que recibió la Mecánica Cuántica, pero a la vez funcionó como un poderoso estimulante que llevó a profundizar en aspectos, hasta el momento apenas explorados, de la realidad.

El Realismo Local es un punto de vista filosófico de acuerdo al cual:

(i) un objeto tiene propiedades bien definidas, sea o no observado por un agente externo y (ii) cuando se observa una propiedad del objeto, eventos lo suficientemente alejados (en el cono de sombra de la medida, en sentido relativista) no afectan el resultado de la medida. En 1935, Einstein, Podolsky y Rosen (EPR) muestran [EPR35], que si la Mecánica Cuántica fuese local (como suponen debe ser toda teoría razonable), daría una descripción incompleta de la realidad física. La inmediata respuesta de N. Bohr en favor de la interpretación de Copenhage [Boh35], no logró apaciguar las aguas. Quedó latente una sensación incómoda, atenuada por el impresionante cuerpo de evidencia empírica consistente con la Mecánica Cuántica, que se acumulaba año a año. De cualquier modo, se estaba ante un debate “filosófico”, que un físico tomando datos en su laboratorio podía ignorar completamente, si seguía la prescripción de Copenhage para el buen uso de la Mecánica Cuántica. Una muestra de esto es que hay relativamente pocos trabajos sobre este tema previos a 1960 en revistas “respetables” de Física.

Esta situación tuvo un giro cerca de la década del 60 cuando Bohm y Aharonov [BA57] reformulan la paradoja EPR en términos de partículas de spin $1/2$, usando analizadores de Stern-Gerlach orientables como aparatos de medida. La propuesta original estaba redactada en términos de posición y cantidad de movimiento de una partícula, dos variables continuas. Por el contrario, una componente de spin de una partícula con spin $1/2$ como el electrón, puede tomar solo dos valores. En términos de esta variable binaria, se mantiene la esencia del problema, a la vez que la descripción del mismo resulta más sencilla. En el mismo trabajo seminal, Bohm y Aharonov

¹Más modernamente, estados enredados o “Entangled states”.

proponen por primera vez el uso de fotones polarizados² como alternativa a los sistemas de dos partículas de spin $1/2$. La inmensa mayoría de los experimentos realizados para testear efectos no locales se basan en el uso de pares de fotones en un estado enredado. En 1965, John Bell demuestra la primer versión del Teorema de Bell [Bel65], según el ninguna teoría determinista local puede reproducir todos los resultados de la Mecánica Cuántica. En años siguientes este resultado se generalizó a teorías locales no deterministas [CHSH69, Bel71]. La segunda desigualdad de Bell representa una restricción relativa a una cierta cantidad, el parámetro de Bell, que puede ser determinada experimentalmente. Esta restricción debe ser satisfecha por toda teoría realista local y es violada por la Mecánica Cuántica, lo cual hace posible distinguir experimentalmente ambas teorías. El trabajo de Bohm, Aharonov, Bell y otros, colocó el debate filosófico de los años 40 a las puertas del laboratorio de Física.

La primera generación de experimentos orientada a testear directamente versiones simplificadas de la desigualdad de Bell, se realizó en la primer mitad de la década del 70 en Berkeley [FC72, Cla76], Harvard [HP73] y en la Universidad de Texas [FT76]. Estos experimentos usaron pares de fotones correlacionados en polarización emitidos en ciertos decaimientos atómicos en cascada. La mayoría de ellos (aunque no todos) confirmaron las predicciones de la Mecánica Cuántica por un margen aceptable y contradijo las de las teorías realistas locales. Todas estas experiencias requieren de varias hipótesis adicionales (plausibles) para interpretar los datos, lo cual deja un amplio espacio para la duda. A inicios de la década del 80, en una serie de tres experiencias famosas, Alain Aspect de la Universidad de París-Sud convenció a muchos físicos de que el realismo local es incompatible con las observaciones empíricas. En [AGR82b] Aspect atacó el problema de la posible comunicación entre las diferentes estaciones de medida, separando las mismas por varios metros y eligiendo el tipo de medida en tiempo real mientras los fotones estaban ya en vuelo. Todas las experiencias realizadas hasta la fecha usaron filtros polarizadores, seguidos de un detector de fotones (detección de un canal), lo cual obliga a asumir hipótesis adicionales y usar versiones simplificadas de las

²En el Apéndice B desarrollamos la analogía entre las componentes de spin de una partícula de spin $1/2$ y las componentes de polarización de fotones.

desigualdades de Bell. En [AGR82a] se usaron analizadores de polarización de dos canales, análogos a medidas de spin por analizadores de Stern-Gerlach, y se verificó por primera vez la violación de la segunda desigualdad de Bell por varias desviaciones estándar. En conjunto, las tres experiencias de Orsay proporcionan evidencia empírica fuerte contra las teorías locales de variables ocultas y a favor de la Mecánica Cuántica.

Los defensores de las teorías realistas locales aún pueden recurrir a dos objeciones (loopholes). La hipótesis de localidad, el requisito esencial de las desigualdades de Bell, debe ser rigurosamente respetada en los experimentos. Esto implica que no puede haber conexión causal entre las medidas y que el la orientación del analizador se debe elegir al azar y que no puede haber conexión causal entre las diferentes partes del experimento. Este loophole afecta a prácticamente las experiencias de primera y segunda generación, incluso a la segunda de Aspect donde usó analizadores variables. La segunda objeción tiene que ver con la baja eficiencia de detección de los experimentos con fotones, donde solo se detectan una pequeña fracción de los pares emitidos por la fuente. Para obtener las correlaciones es necesario determinar las probabilidades de detección coincidente a partir de las observaciones. Es decir que es necesario asumir que la pequeña fracción observada, con la cual se estiman las probabilidades, es una muestra no sesgada (Fair Sampling) del conjunto total de pares generados. Todos los experimentos con fotones, incluidos los de tercera generación, deben asumir esta hipótesis.

Las experiencias de tercera generación comienzan a mediados de la década del 90, con los fotones obtenidos a partir de procesos no lineales de conversión paramétrica (PDC). Estos fotones enredados son emitidos en direcciones bien definidas, lo cual permite enviarlos a locales remotos a través de fibras ópticas. En una experiencia extremadamente cuidadosa, en la Universidad de Innsbruck [WJWZ98] se envió un par de fotones correlacionados por fibra óptica a dos estaciones de observación ubicadas a unos 200 m de la fuente, en direcciones opuestas. En las mismas, se seleccionó la orientación a medir en forma aleatoria con los fotones en vuelo. En este experimento se satisfacen estrictos requisitos de localidad y se observó una violación de las desigualdades de Bell por mas de 30 desviaciones estándar. Sin embargo, se debe asumir la hipótesis de Fair Sampling como en todos los experimentos con fotones

hasta la fecha. En otra experiencia importante, realizada en el NIST en 2001 [RKM⁺01], se usó una trampa de iones con dos iones de Berilio para testear la segunda desigualdad de Bell. En este caso, los observables son los estados electrónicos internos de los iones de Berilio que pueden enredarse, manipularse y medirse usando luz laser. Lo que hace verdaderamente especial a este experimento, además de que es uno de los pocos realizado con partículas masivas, es que prácticamente todos los estados enredados son detectados, con lo cual no es necesaria la hipótesis de Fair Sampling y se cierra el loophole de detección. Sin embargo, en la trampa los iones estando a una distancia media de $3\mu\text{m}$ e interactúan a través de su carga eléctrica. Las condiciones de localidad no son satisfechas por este experimento, pese a lo cual se observa una clara violación de la desigualdad de Bell por 8 desviaciones estándar. En suma, ambas objeciones han sido levantadas por una u otra experiencia, pero no existe aún la “experiencia ideal” que levante ambas objeciones simultáneamente y demuestre sin apelación posible la inadecuación de las teorías Realistas Locales.

Muchos de los experimentos más recientes envían fotones enredados a través de fibras ópticas (o directamente a través de la atmósfera) por distancias cada vez más largas, orientados hacia el desarrollo de las comunicaciones ópticas y de la criptografía cuántica. Otra línea de experimentos busca construir y manipular estados enredados de varias partículas, que son de interés para la Computación Cuántica. Desde el punto de vista de la Mecánica Cuántica, la magnitud por la cual un estado enredado viola una desigualdad de Bell es un “testigo de enredo” (Entanglement Witness) confiable. Sin enredo, se satisface la desigualdad de Bell. El hecho de que en muchos de los últimos experimentos la desigualdad de Bell sea usada como Testigo de Enredo, es una demostración elocuente como la Mecánica Cuántica ha salido fortalecida de este debate, que ya lleva más de 70 años. En este trabajo intentaremos contar esta historia en forma amena, aunque preservando cierto grado de detalle. Para este fin, hemos seleccionado unos pocos episodios (mencionados en esta introducción) que aportan las grandes líneas al cuadro general.

Capítulo 2

Paradoja EPR

I cannot seriously believe in [quantum theory] because it cannot be reconciled with the idea that physics should represent a reality in time and space, free from spooky actions at a distance... I am quite convinced that someone will eventually come up with a theory whose objects, connected by laws, are not probabilities but considered facts, as used to be taken for granted until quite recently.

*Albert Einstein,
carta a Max Born del 3 de marzo de 1947
Publicada en "The Born-Einstein letters"
Walker and Co., 1971, New York.*

El célebre artículo de A. Einstein, B. Podolsky y N. Rosen [EPR35] dio inicio a un fructífero debate sobre la naturaleza de la descripción cuántica de la realidad. EPR ponen en evidencia cierta característica de la Mecánica Cuántica, a través de la cual en cierto tipo de estados, una medida en una región A puede alterar instantáneamente la realidad física en otra región B, aunque A y B no interactúen entre sí por ningún medio conocido. El razonamiento EPR configuró el ataque más serio que Einstein realizó a la Mecánica

Cuántica. Este trabajo estimuló durante las décadas siguientes muchos desarrollos teóricos y experimentales algunos de los cuales describiremos aquí. El artículo original [EPR35] no es muy claro, pero unos años más tarde Einstein publica [Ein48] las mismas ideas en forma más ordenada siguiendo una sugerencia de Wolfgang Pauli [Bor71].

EPR concluyen a partir de un análisis lógico, ilustrado por un ejemplo, que la Mecánica Cuántica es una teoría incompleta. En la Sección 2.1 resumiremos las definiciones y las ideas centrales de este trabajo. Unos años más tarde, David Bohm reformula la paradoja EPR en términos de observables de spin. Como una componente de spin de una partícula de spin $1/2$ sólo toma dos valores, en esta representación binaria el problema queda reducido a su esencia. En la Sección 2.2 discutimos en detalle el ejemplo propuesto por Bohm [Boh51, BA57].

2.1. Versión original de la paradoja EPR

En esta sección analizamos la propuesta original realizada por Einstein et al. [EPR35, Ein48], concluyendo que la teoría cuántica, de ser local, sería una representación incompleta de la realidad física. Por claridad, separaremos las definiciones de los razonamientos posteriores.

Precisiones preliminares

Elemento de la realidad física

Si el valor de una variable se puede predecir con certeza sin afectar el estado del sistema, entonces la misma se corresponde con un elemento de la realidad física. EPR enfatizan que éste es un criterio de suficiencia, no de necesidad. Un elemento de la realidad física puede no tener contraparte en una teoría.

EPR ilustran la idea de realidad física usando el ejemplo de dos observables conjugados de una partícula en una dimensión. Eligen la posición Q y la cantidad de movimiento P , de modo que $[Q, P] = i\hbar$ y las observaciones de ambos están ligadas por el Principio de Heisenberg. Un conocimiento de una de ellas implica ignorancia sobre la otra. Si la partícula está en un es-

tado $\Psi \propto e^{ip_0x/\hbar}$, autoestado de P , una medida de cantidad de movimiento produce el valor p_0 con certeza y no afecta a Ψ . La cantidad de movimiento es un elemento de la realidad en este estado Ψ . Por el contrario, la posición no lo es, ya que el resultado de una medida no es predecible y si se mide, el estado Ψ es destruido.

Teoría completa

Una teoría es completa, si todo elemento de la realidad física tiene contraparte en la teoría.

Teoría local

Sucintamente, una teoría local es aquella que excluye la posibilidad de acción a distancia. A veces se enuncia la misma idea como Principio de Localidad, indicando, en términos relativistas, que dos eventos con separación de tipo espacial no admiten conexión causal.

El Principio de Localidad es asumido implícitamente en [EPR35]:

“...since at the time of measurement the two systems no longer interact, no real change can take place in the second system in consequence of anything that may be done on the first system. This is, of course, merely a statement of what it is meant by the absence of interaction between the two systems”.

Dos alternativas excluyentes

Einstein et al. observan que los criterios de realidad física y completitud enunciados en la sección anterior llevan a una disyuntiva excluyente entre dos afirmaciones:

- (i) la descripción de la realidad dada por la función de onda no es completa.
- (ii) dos observables conjugados no pueden tener realidad simultáneamente.

Si ambas fueran ciertas, la Mecánica Cuántica sería incompleta, como se intenta demostrar. Si ambas fueran falsas, se llega a una contradicción con la descripción cuántica en el caso de dos observables conjugados, como

mencionamos en el ejemplo de una partícula. Si P y Q tienen realidad simultáneamente y si la función de onda Ψ da una descripción completa de esa realidad, entonces Ψ debe predecir valores concretos para ambos observables, lo cual no ocurre. Por lo tanto, una y sólo una de las afirmaciones anteriores debe ser verdadera.

La estrategia de Einstein et al. es mostrar que dos observables conjugados de una partícula en un estado enredado podrían pertenecer a la misma realidad física. Esto haría que (ii) sea falso y por lo tanto (i) verdadero y la Mecánica Cuántica sería incompleta. Como veremos, para alcanzar esta conclusión se desliza en el razonamiento la exigencia adicional de *localidad*.

Dos partículas en un estado correlacionado

Para demostrar que en una teoría cuántica suplementada con la idea de localidad dos observables conjugados podrían ser simultáneamente reales, EPR proceden en tres etapas:

I) Se considera un estado Ψ de dos partículas y se expresa en las representaciones asociadas a dos observables conjugados A_1 y B_1 de la partícula 1.

Supongamos que los observables A_1 y B_1 tienen el siguiente conjunto¹ de autofunciones y autovalores:

$$A_1 u(x_1) = a_i u_i(x_1) \quad B_1 v(x_1) = b_i v_i(x_1).$$

Se puede expresar el estado de dos partículas Ψ usando las autofunciones del observable A_1 ,

$$\Psi(x_1, x_2) = \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n(x_2) u_n(x_1). \quad (2.1)$$

Alternativamente, en la representación asociada al observable B_1 ,

$$\Psi(x_1, x_2) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(x_2) v_n(x_1). \quad (2.2)$$

II) Se analiza en que estado queda la partícula 2 luego de medir los observables A_1 o B_1 de la partícula 1.

¹Escribimos las ecuaciones para el caso discreto, no degenerado, sin pérdida de generalidad.

Si se mide A_1 y se obtiene el autovalor a_k , entonces luego de la medida,

$$\Psi \xrightarrow{a_k} \Psi_A(x_1, x_2) \propto \psi_k(x_2)u_k(x_1). \quad (2.3)$$

En cambio, si se elige medir el observable B_1 , y el resultado es b_r ,

$$\Psi \xrightarrow{b_r} \Psi_B(x_1, x_2) \propto \varphi_r(x_2)v_r(x_1). \quad (2.4)$$

III) Algunos estados Ψ , luego de la medida quedan en autoestados simultáneos de dos observables (A_1, A_2) o (B_1, B_2) correspondientes a *diferentes* partículas². En ese caso, $\psi_k(x_2)$ sería autofunción de un observable A_2 y $\psi_p(x_2)$ sería autofunción del observable B_2 , conjugado de A_2 . Tenemos por lo tanto, dos conjuntos de observables conjugados: A_1, B_1 para la partícula 1 y A_2, B_2 para la partícula 2. En este tipo de estados correlacionados, al hacer una medida del observable A_1 de la partícula 1, el estado conjunto resultante

$$\Psi \longrightarrow \Psi_A$$

es autoestado simultáneo de A_1 y A_2 . Por tanto, luego de la medida de A_1 resulta que el valor de A_2 es predecible y este observable tiene realidad física.

Si, en cambio, elegimos medir el observable B_1 de la partícula 1,

$$\Psi \longrightarrow \Psi_B$$

el observable que tiene realidad física es B_2 de la partícula 2.

²EPR muestran que esto es posible considerando el ejemplo de dos partículas en un estado descrito por

$$\Psi(x_1, x_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi_p(x_2) u_p(x_1) dp = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(x_2-L)p/\hbar} e^{ix_1p/\hbar} dp,$$

donde L es una constante. Esta expresión es el análogo continuo de la ec. (2.1). Si se mide P_1 con resultado es p_0 , la función de onda resultante,

$$\Psi \xrightarrow{p_0} e^{-i(x_2-x_1-L)p_0/\hbar}$$

es autofunción de P_2 con autovalor $-p_0$. Modernamente, esto es lo que entendemos por un estado enredado. Si se expresa Ψ en la representación de posición (usando como autofunción la delta de Dirac) se ve que las posiciones de ambas partículas están correlacionadas en forma similar.

Paradoja (?)

En este punto, EPR invocan la localidad para concluir que, dado que las partículas se suponen alejadas y no interactúan entre si, la realidad física de la partícula 2 no puede verse afectada por la elección de medir el observable A_1 o el B_1 de la partícula 1. Concluyen que las funciones de onda después de la medida, Ψ_A y Ψ_B , deben describir *la misma realidad física* de la partícula 2. Por lo tanto, dos observables conjugados, A_2 y B_2 , pueden ser elementos de la misma realidad física. QED.

Dado que (ii) es falsa y las alternativas de la pag. 8 son mutuamente excluyentes, (i) debe ser verdadera y la Mecánica Cuántica es incompleta. La posibilidad, que Einstein et al. no consideran “razonable”, es admitir efectos no locales que no lleguen a violar la causalidad relativista. Citando a [EPR35],

“...this makes the reality of P and Q depend upon the process of measurement carried out on the first system, which does not disturb the second system in any way. No reasonable definition of reality could be expected to permit this.”

Fueron necesarios más de 50 años de desarrollos teóricos y experimentales para llegar a la conclusión, hoy predominante, de que la naturaleza en determinadas circunstancias puede manifestar efectos no locales. A continuación presentamos la forma mas conocida (y más simple) de la paradoja EPR, debida a David Bohm.

2.2. Versión de Bohm

En 1951 David Bohm propone [Boh51] una versión simplificada de la paradoja EPR, basada en medidas de las componentes de spin de dos partículas de spin 1/2. Los observables relevantes son binarios, lo cual reduce el planteo EPR a lo esencial. En el Apéndice A reunimos algunos resultados relativos a la descripción cuántica de dos partículas de spin 1/2 e introducimos con mas detalle la notación que adoptamos en este contexto. Tanto el Teorema de Bell, así como como la mayoría de los experimentos realizados utilizan la polarización de un par de fotones, un grado de libertad binario

con características similares a las componentes de spin de una partícula de spin $1/2$. En el Apéndice B discutimos la experiencia de Stern-Gerlach y analizamos la analogía con luz linealmente polarizada. Ambos Apéndices son complementarios a ésta Sección.

Bohm considera un par de partículas que se alejan entre si (vea la Fig. 2.1) con espines opuestos de forma que su spin total es nulo. A cierta distancia de la fuente F se encuentran dos observadores A (Alice) y B (Bob) equipados con dispositivos de Stern-Gerlach que les permiten analizar el signo de una componente de spin. El analizador de Alice se puede rotar 90° y permite medir la componente de espín en una u otra de dos direcciones ortogonales (z o x). El analizador de Bob es fijo y sólo mide spin en dirección z . En la notación³ introducida en la Sección A, el grado de libertad de espín de las partículas que se alejan se describe por medio de un estado singlete,

$$|\Psi_s\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} [|+, -\rangle_{zz} - |-, +\rangle_{zz}] \quad (2.5)$$

que es máximamente enredado.

Alice realiza su medida de spin eligiendo una de las dos direcciones ortogonales (z o x). Un instante después Bob puede medir la componente z de spin de la partícula 2. Si Alice elige medir S_{1z} y obtiene $+1$, el singlete se reduce a

$$|\Psi\rangle \longrightarrow |+, -\rangle_{zz}.$$

El enredo se ha perdido y ambas componentes de spin tienen valores bien definidos. En particular si Bob mide S_{2z} obtendrá -1 *con certeza* y sin afectar al sistema. Por lo tanto S_{2z} tiene realidad física para Bob.

Supongamos ahora que, dado el mismo estado $|\Psi\rangle$, Alice elige medir la componente S_{1x} . Para ver que los dos resultados ± 1 siguen siendo equiprobables, basta usar la ec. (A.7),

$$|\pm\rangle_z = \frac{1}{\sqrt{2}} [|+\rangle_x \pm |-\rangle_x]$$

³El ket $|+, -\rangle_{zz}$ refiere a la orientación de la componente z del espín de cada partícula: es decir, describe a la partícula 1 con componente z de espín $+1$ y la partícula 2 con componente z de espín -1 . En esta sección y en el resto de este trabajo usamos $\hbar/2$ como unidad de spin.

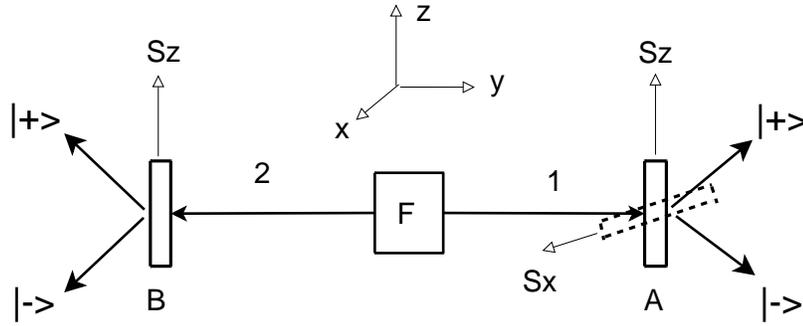


Figura 2.1: Propuesta de Bohm para ilustrar la paradoja EPR. La fuente F emite un par de partículas de spin 1/2 que se desplazan en sentidos opuestos. Las partículas están en un estado de spin total 0 de modo que sus spines están anticorrelacionados (detalles en el texto). A cierta distancia a ambos lados, se encuentran dos observadores Alice y Bob equipados con analizadores de Stern-Gerlach que les permiten medir la componente de spin a lo largo de una dirección espacial determinada. Alice puede medir la componente z o variar la orientación de su analizador en 90° para medir la componente x del spin de la partícula 1. Inmediatamente después, el observador B analiza la componente z (la dirección de su analizador se supone fija) de spin de la partícula 2.

para expresar $|\Psi\rangle$ en términos de autoestados de S_{1x} ,

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{2} [|+\rangle_x \otimes (|-\rangle_z - |+\rangle_z) + |-\rangle_x \otimes (|-\rangle_z + |+\rangle_z)]. \quad (2.6)$$

Supongamos que Alice obtiene -1 , entonces el estado conjunto se reduce a

$$|\Psi\rangle \longrightarrow |-\rangle_x \otimes \frac{|-\rangle_z + |+\rangle_z}{\sqrt{2}} = |-, +\rangle_{xx}$$

donde hemos usado la ec. (A.5). En este estado, la partícula 2 tiene un valor bien definido de su componente S_{2x} , pero no de S_{2z} . Si Bob mide S_{2z} obtendrá ± 1 con igual probabilidad. En este caso, la realidad física de Bob incluye S_{2x} pero no S_{2z} .

La “paradoja” tiene lugar si recordamos los criterios de (i) Elemento de la realidad (ii) Teoría completa y (iii) Localidad, enunciados al comienzo de éste capítulo. La realidad física de Bob esta siendo afectada *instantáneamente* por la decisión de Alice de como orienta su aparato, lo cual sugiere abandonar la localidad. La otra posibilidad, planteada por EPR, es que el estado $|\Psi\rangle$ no sea una descripción completa de la realidad. En ese caso, ambas componentes S_{2x} y S_{2z} estarían bien definidas en la realidad física de Bob (que no cambia),

pero no en el estado $|\Psi\rangle$. En el debate que siguió a estos planteos, esta posición se conoce como Realista y Local.

Como lo expresa la cita al comienzo de éste capítulo, la alternativa elegida por EPR de considerar que la Mecánica Cuántica daría una versión incompleta de la realidad física, implica la necesidad de una teoría alternativa que sea local, completa y realista a la vez. Este tipo de teorías se denomina genéricamente “de variables ocultas”. Dado que existe un considerable conjunto de evidencia experimental a favor de la Mecánica Cuántica, una teoría de variables ocultas debería “complementar” la descripción de la función de onda Ψ , reproduciendo los mismos resultados que la Mecánica Cuántica. La función de onda resultaría de tomar el promedio sobre un ensemble de valores de las variables ocultas, en el mismo sentido en que la Termodinámica puede considerarse una descripción promedio de un sistema de muchas partículas, descrito en detalle por la Mecánica Estadística. El ejemplo mas elaborado de teoría de variables ocultas se debe a David Bohm, quien se basó en las ideas de onda piloto de L. de Broglie [Boh52, BB66]. Sin embargo, el ejemplo de Bohm es no local y tiene el mismo conjunto de predicciones que la Mecánica Cuántica. Por lo que no es posible distinguir experimentalmente entre ambas teorías y, en realidad, el ejemplo de Bohm (llamado por algunos Mecánica Bohmiana) se acerca mas a una interpretación alternativa de la Mecánica Cuántica que a una teoría alternativa o complementaria.

La teoría realista local que, según las expectativas de algunos físicos, podría complementar la descripción cuántica de la realidad no llevo a plasmarse en algo concreto. Esto se debe al trabajo de John Bell, que mostró que había casos en que las teorías locales realistas y la Mecánica Cuántica daban predicciones discrepantes para el mismo experimento. Este es el tema del próximo capítulo. El trabajo de Bell, junto con los resultados de un conjunto aún creciente de experimentos (que discutiremos en el Cap. 4) son consistentes con las predicciones de la Mecánica Cuántica y descartan este tipo de teorías.

Capítulo 3

Desigualdades de Bell

“Science is not just a collection of laws, a catalogue of unrelated facts. It is a creation of the human mind, with its freely invented ideas and concepts. Physical theories try to form a picture of reality and to establish its connection with the wide world of sense impressions. Thus the only justification for our mental structures is whether and in what way our theories form such a link.”

*Albert Einstein and Leopold Infeld,
The Evolution of Physics, 1938.*

“... the peculiar character of some quantum-mechanical predictions seems almost to cry out for a hidden variable interpretation... We will find, in fact, that no local, deterministic hidden-variable theory can reproduce all the experimental predictions of quantum mechanics. This opens the possibility of bringing the question into the experimental domain, by trying to approximate as well as possible the idealized situations in which local hidden variables and quantum mechanics cannot agree.”

*J.S. Bell,
in “Introduction to the hidden variable question”, 1971, [Bel71]*

Como mencionamos en el capítulo anterior, en 1952 David Bohm mostró que es posible construir una interpretación (no local) de la Mecánica Cuántica basada en variables ocultas. John Bell comenzó a estudiar el problema la no localidad y, en particular, la cuestión de si la misma es un requisito *necesario* para que una teoría de variables ocultas (como la de Bohm) sea consistente con todas las predicciones cuánticas. El Teorema de Bell, publicado en 1965, da una respuesta afirmativa a esta cuestión: *toda teoría de variables ocultas que sea determinista y local tiene necesariamente algunas predicciones incompatibles con la Mecánica Cuántica*. Este resultado implica que las teorías deterministas locales de variables ocultas y la Mecánica Cuántica son mutuamente excluyentes.

Este primer resultado de Bell es seguido por una generalización (desigualdad CHSH o segunda desigualdad de Bell) de la cual resultan desigualdades que deben ser verificadas por cualquier teoría realista, local (en un sentido amplio) aunque sea no determinista. En la época en que ocurren éstos desarrollos las limitaciones experimentales estimulan la búsqueda de otras desigualdades derivadas, que puedan ser testeadas en el laboratorio. Existen por lo tanto varias versiones de “desigualdades de Bell” y muchas de ellas implican suposiciones adicionales a las del resultado original de Bell o su generalización. Es usual referirse a todas estas generalizaciones como “desigualdades de Bell”, aunque sean debidas a otros autores. En este capítulo trataremos de la primera y segunda desigualdades de Bell y de una de sus derivaciones, la desigualdad CH72, que es la base de las primeras experiencias con polarización de fotones. En el Capítulo 4 discutiremos otras formás de las desigualdades de Bell, adaptadas a experimentos específicos.

3.1. Teorema de Bell

La primer desigualdad de Bell [Bel65] esta formulada en el contexto de la propuesta de Bohm para la paradoja EPR y es satisfecha por cualquier teoría determinista, local de variables ocultas. Bell muestra que existen casos en que las predicciones cuánticas no satisfacen esta desigualdad, de modo que el siguiente es un enunciado compacto del Teorema de Bell:

Ninguna teoría determinista y local puede reproducir todos los resultados de la Mecánica Cuántica.

La restricción del determinismo no es esencial y es levantada más adelante por el propio Bell, como se muestra en la Sección 3.2.

En la versión de Bohm de la paradoja EPR, vea la Fig. 2.1, los observables relevantes son las componentes de spin de cada partícula en direcciones seleccionadas una vez que ambas se han separado y ya no interactúan entre si. Dos observadores, Alice y Bob, equidistantes de la fuente del par de partículas miden en forma simultánea las componentes de spin de cada partícula en dos direcciones espaciales $(\hat{\mathbf{a}}, \hat{\mathbf{b}})$. Llamamos $A(\hat{\mathbf{a}})$ al resultado de la medida de Alice del spin de la partícula 1 en la dirección $\hat{\mathbf{a}}$ y $B(\hat{\mathbf{b}})$ al resultado de la medida de Bob del spin de la partícula 2 en la dirección $\hat{\mathbf{b}}$.

El teorema de Bell se basa en dos hipótesis:

i) *Determinismo*

En base al argumento EPR, se requiere información suplementaria a la contenida en la función de estado Ψ para especificar completamente el valor de todos los observables. Supongamos que λ representa el conjunto de variables ocultas necesario para especificar el estado en forma *completa*. Estas variables pueden ser una o muchas, con valores distribuidos en forma continua o discreta¹. Consideremos un ensemble de pares de partículas preparadas en estados que son completamente es-

¹Sin pérdida de generalidad, escribimos las ecuaciones para una variable continua λ . Un estado cuántico Ψ representaría una media sobre un ensemble de estados descritos por varios valores de la variable oculta λ .

pecificados por un valor $\lambda \in \Lambda$. La única restricción sobre el espacio de estados Λ es que se pueda definir una función de distribución $\rho(\lambda)$ en el modo usual: $d\rho = \rho(\lambda) d\lambda$ es la probabilidad de que el estado este en el intervalo $[\lambda, \lambda + d\lambda]$. La densidad de estados ρ tiene normalización

$$\int_{\Lambda} \rho(\lambda) d\lambda = \int_{\Lambda} d\rho = 1. \quad (3.1)$$

En este ensemble, el valor medio, $E(X)$, de un observable X se obtiene en la forma usual

$$E(X) = \int_{\Lambda} X(\lambda) \rho(\lambda) d\lambda \quad (3.2)$$

promediando sobre estados, es decir, sobre los posibles valores de la variable oculta λ que describe cada par de partículas emitido por la fuente. El resultado de una medida depende de la orientación del analizador y de la variable² λ . Tomando $\hbar/2$ como unidad de spin, los posibles resultados de las medidas de Alice y Bob son

$$A(\mathbf{a}; \lambda) = \pm 1, \quad B(\mathbf{b}; \lambda) = \pm 1. \quad (3.3)$$

Localidad

El producto de ambos observables (necesario para calcular la correlación $E(AB)$) dependerá en general del estado del par y de las orientaciones de ambos aparatos de medida, $AB = [AB](\hat{\mathbf{a}}, \hat{\mathbf{b}}; \lambda)$. La hipótesis de localidad asumida por Bell en [Bel65]

“The vital assumption is that the result B for particle 2 does not depend on the setting $\hat{\mathbf{a}}$ of the magnet for particle 1, nor A on $\hat{\mathbf{b}}$.”

implica que la dependencia de AB es de la forma

$$[AB](\hat{\mathbf{a}}, \hat{\mathbf{b}}; \lambda) = A(\hat{\mathbf{a}}; \lambda) B(\hat{\mathbf{b}}; \lambda). \quad (3.4)$$

²Se supone que si se conoce λ una vez emitido el par, habrá alguna regla de evolución especificada en la teoría para obtener su valor a tiempos posteriores.

En otras palabras, el resultado de la medida de Bob, $B(\hat{\mathbf{b}}; \lambda)$, depende *exclusivamente* del estado λ y de la orientación de su analizador y no de la orientación del analizador de Alice. Toda teoría física que excluya la posibilidad de acción a distancia será local en este sentido. Esta hipótesis de localidad implica que la correlación entre ambas medidas de spin (es decir, el valor medio del observable conjunto AB) es, en virtud de (3.2) y (3.4),

$$E(\hat{\mathbf{a}}, \hat{\mathbf{b}}) \equiv \int_{\Lambda} A(\hat{\mathbf{a}}; \lambda) B(\hat{\mathbf{b}}; \lambda) \rho(\lambda) d\lambda. \quad (3.5)$$

Primera desigualdad de Bell

Para encontrar un ejemplo en el cual las predicciones de teorías deterministas, locales y las de la Mecánica Cuántica difieran, es necesario especificar una forma concreta de correlación entre el par de partículas. Siguiendo el ejemplo de Bohm, podemos suponer que el par se prepara en un estado singlete, ec. (2.5), en el cual las componentes de spin (en cualquier dirección espacial) están perfectamente anti-correlacionadas. De modo que el resultado de dos medidas *en la misma dirección* verifica,

$$A(\hat{\mathbf{a}}) + B(\hat{\mathbf{a}}) = 0. \quad (3.6)$$

Es decir, que a partir del resultado de la medida de Alice se puede predecir *con certeza* cual será el resultado de la medida de Bob en la misma dirección espacial. Para estados perfectamente anti-correlacionados, en virtud de (3.3) y (3.6), se obtiene $E(\hat{\mathbf{a}}, \hat{\mathbf{a}}) = -1$.

Supongamos que Alice orienta su aparato de medida en la dirección fija $\hat{\mathbf{a}}$, pero Bob puede optar por alinear su analizador en dos direcciones alternativas $\hat{\mathbf{b}}$ o $\hat{\mathbf{b}}'$. Bell demostró [Bel65] que las correlaciones asociadas a estas medidas satisfacen la desigualdad

$$|E(\hat{\mathbf{a}}, \hat{\mathbf{b}}) - E(\hat{\mathbf{a}}, \hat{\mathbf{b}}')| - E(\hat{\mathbf{b}}, \hat{\mathbf{b}}') \leq 1. \quad (3.7)$$

Partiendo de la diferencia de correlaciones $E(\hat{\mathbf{a}}, \hat{\mathbf{b}}) - E(\hat{\mathbf{a}}, \hat{\mathbf{b}}')$, usando las

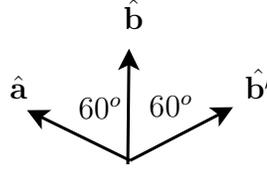


Figura 3.1: Versores coplanares que definen tres direcciones de medida para las cuales la predicción cuántica viola la desigualdad de Bell, ec. (3.7).

ecs. (3.6) y (3.3) se obtiene

$$\begin{aligned}
 E(\hat{\mathbf{a}}, \hat{\mathbf{b}}) - E(\hat{\mathbf{a}}, \hat{\mathbf{b}}') &= \int_{\Lambda} \left[A(\hat{\mathbf{a}}; \lambda)B(\hat{\mathbf{b}}; \lambda) - A(\hat{\mathbf{a}}; \lambda)B(\hat{\mathbf{b}}'; \lambda) \right] \rho(\lambda) d\lambda \\
 &= - \int_{\Lambda} \left[A(\hat{\mathbf{a}}; \lambda)A(\hat{\mathbf{b}}; \lambda) - A(\hat{\mathbf{a}}; \lambda)A(\hat{\mathbf{b}}'; \lambda) \right] \rho(\lambda) d\lambda \\
 &= - \int_{\Lambda} A(\hat{\mathbf{a}}; \lambda)A(\hat{\mathbf{b}}; \lambda) \left[1 - A(\hat{\mathbf{b}}; \lambda)A(\hat{\mathbf{b}}'; \lambda) \right] \rho(\lambda) d\lambda..
 \end{aligned}$$

Dado que productos de la forma $A(\hat{\mathbf{a}}; \lambda)B(\hat{\mathbf{b}}; \lambda)$ son ± 1 , usando la condición de normalización (3.1), resulta

$$|E(\hat{\mathbf{a}}, \hat{\mathbf{b}}) - E(\hat{\mathbf{a}}, \hat{\mathbf{b}}')| \leq \int_{\Lambda} [1 - A(\hat{\mathbf{b}}; \lambda)A(\hat{\mathbf{b}}'; \lambda)] \rho(\lambda) d\lambda = 1 + E(\hat{\mathbf{b}}, \hat{\mathbf{b}}')$$

con lo cual la desigualdad (3.7) queda demostrada.

Predicción cuántica

Para completar el Teorema de Bell resta mostrar que la predicción de la Mecánica Cuántica viola la desigualdad (3.7). El valor esperado del observable conjunto $\sigma_1 \cdot \hat{\mathbf{a}} \otimes \sigma_2 \cdot \hat{\mathbf{b}}$ asociado a medidas simultáneas de las componentes de spin de cada partícula en dos direcciones $\hat{\mathbf{a}}, \hat{\mathbf{b}}$, se calcula en la Sección A.2, ec. (A.18), como

$$E_{MC}(\hat{\mathbf{a}}, \hat{\mathbf{b}}) \equiv \langle \Psi | S_a \otimes S_b | \Psi \rangle = -\hat{\mathbf{a}} \cdot \hat{\mathbf{b}} = -\cos \theta_{ab}. \quad (3.8)$$

La correlación cuántica depende sólo de la orientación relativa, $\theta_{ab} \equiv |\theta_a - \theta_b|$, de ambos analizadores. Eligiendo tres orientaciones $\hat{\mathbf{a}}, \hat{\mathbf{b}}, \hat{\mathbf{b}}'$ coplanares, formando ángulos entre si de 60° como se indica en la Fig. 3.1, se obtienen las correlaciones $E_{MC}(\hat{\mathbf{a}}, \hat{\mathbf{b}}) = E_{MC}(\hat{\mathbf{b}}, \hat{\mathbf{b}}') = -\frac{1}{2}$ y $E_{MC}(\hat{\mathbf{a}}, \hat{\mathbf{b}}') = \frac{1}{2}$. Por lo tanto,

$$|E_{MC}(\hat{\mathbf{a}}, \hat{\mathbf{b}}) - E_{MC}(\hat{\mathbf{a}}, \hat{\mathbf{b}}')| - E_{MC}(\hat{\mathbf{b}}, \hat{\mathbf{b}}') = \frac{3}{2} > 1,$$

y la desigualdad (3.7) no se satisface en este caso.

La importancia del resultado de Bell radica en colocar, por primera vez, la disyuntiva filosófica planteada por la paradoja EPR en términos cuantitativos susceptibles – al menos en principio – de verificación experimental. Al demostrar que las teorías locales, deterministas de variables ocultas y la Mecánica Cuántica no comparten el mismo conjunto de predicciones, se abre la puerta a la posibilidad de decidir experimentalmente entre ambos tipos de teoría. Sin embargo, la desigualdad (3.7) requiere de una correlación perfecta, lo cual es muy restrictivo y nunca fue testeada experimentalmente.

3.2. Desigualdad CHSH

En 1969, se publica el seminal trabajo de Clauser, Horne, Shimony y Holt [CHSH69], en adelante CHSH, donde se realizan tres aportes significativos para la realización experimental de la paradoja EPR. En primer lugar, CHSH demuestran una versión más general del Teorema de Bell, en la cual mantienen las suposiciones básicas de determinismo (i) y localidad (ii), pero no asumen la correlación perfecta, ec. (3.6). La desigualdad que obtienen es equivalente a la forma más conocida de desigualdad de Bell,

$$-2 \leq S \equiv E(\hat{\mathbf{a}}, \hat{\mathbf{b}}) - E(\hat{\mathbf{a}}, \hat{\mathbf{b}}') + E(\hat{\mathbf{a}}', \hat{\mathbf{b}}) + E(\hat{\mathbf{a}}', \hat{\mathbf{b}}') \leq 2, \quad (3.9)$$

aplicable a experimentos con detección de dos canales (como en la propuesta de Bohm). El parámetro de Bell, S , definido en (3.9) es una combinación lineal de correlaciones para dos pares de orientaciones de los analizadores de Alice ($\hat{\mathbf{a}}, \hat{\mathbf{a}}'$) y Bob ($\hat{\mathbf{b}}, \hat{\mathbf{b}}'$). No reproduciremos aquí la demostración original de esta desigualdad, ya que J.S. Bell la demostró bajo hipótesis más generales [Bel71], incluyendo en la descripción del sistema por variables ocultas al estado de los aparatos de medida y la eventualidad de fallas en la detección, con lo cual implícitamente se abandona el determinismo de las propuestas anteriores. La desigualdad (3.9), referida en la literatura como “desigualdad CHSH”, no pudo ser aplicada directamente ya que las experiencias con polarización de fotones y detección eficiente de dos canales no eran realizables [CHSH69]. Recién se verificó experimentalmente la violación de

la desigualdad (3.9) en 1982 en la segunda experiencia de Aspect [AGR82a], que tratamos en la Sección 4.2.2. La mayoría de las experiencias modernas usan esta desigualdad de Bell.

En segundo lugar, CHSH usan una hipótesis adicional³ para obtener una forma de la desigualdad de Bell susceptible de ser verificada experimentalmente con la tecnología disponible en la época. La misma desigualdad fue demostrada algo más tarde por dos de ellos (Clauser y Horne) bajo hipótesis menos restrictivas, por lo que será presentada en la siguiente sección.

Finalmente, en tercer lugar, CHSH proponen un experimento concreto que permita testear la desigualdad propuesta. Su propuesta esta basada en una generalización de la primer experiencia con polarización de pares de fotones correlacionados creados en un decaimiento atómico en cascada, realizada poco antes por Kocher y Commings en Berkeley [KC67]. Esta propuesta fue realizada poco después en Berkeley por Freedman y Clauser y se convirtió en la primer refutación experimental del realismo local [FC72]. Resulta asombroso que tantas ideas se hayan colocado en sólo 4 páginas de una revista.

Segunda desigualdad de Bell (1971)

Bell mantiene el esquema general del desarrollo de su primera desigualdad, basado en medidas de spin de dos partículas. Teniendo en cuenta que el estado de los aparatos de medida podría influenciar las correlaciones, el mismo se incluye en la descripción del sistema por variables ocultas. Esto implica que el valor medio (3.5), tomado sobre los estados λ de las partículas, se redefine en términos de \bar{A} , \bar{B} , las observaciones promediadas en los grados de libertad (ocultos) de los instrumentos. Estas variables \bar{A} , \bar{B} ya no son binarias, como en la ec. (3.3), sino que cumplen

$$-1 \leq \bar{A} \leq 1 \quad \text{y} \quad -1 \leq \bar{B} \leq 1. \quad (3.10)$$

Por lo tanto la correlación entre un par de medidas es ahora,

$$E(\hat{\mathbf{a}}, \hat{\mathbf{b}}) = \int_{\Gamma} \bar{A}(\hat{\mathbf{a}}, \lambda) \bar{B}(\hat{\mathbf{b}}, \lambda) \rho(\lambda) d\lambda. \quad (3.11)$$

³Asumen que si un par de fotones emerge de los filtros polarizadores, la probabilidad de detección coincidente es independiente de las orientaciones ($\hat{\mathbf{a}}, \hat{\mathbf{b}}$) de los filtros.

En esta expresión, Γ representa (como antes) el conjunto de estados λ asociado a las partículas. La hipótesis de localidad esta implícita en (3.11), que es una generalización de la ec. (3.5). La posibilidad de no detección de una partícula queda automáticamente contemplada suponiendo que el resultado de una medida de una componente de spin puede ser 0 si por alguna razón no hay detección en ninguno de los dos canales. Bell intentaba contemplar así imperfecciones en los mecanismos de detección. Se puede pensar en \bar{A}, \bar{B} como variables aleatorias cuya correlación (3.11) es consistente con el requisito de localidad. A través del elemento estocástico asociado a los estados de los aparatos de medida (y a eventuales fallas de detección) se abandona el determinismo.

La desigualdad

El siguiente razonamiento algebraico conduce a la segunda desigualdad de Bell. Sean $(\hat{\mathbf{a}}, \hat{\mathbf{b}})$ y $(\hat{\mathbf{a}}', \hat{\mathbf{b}}')$ dos conjuntos de orientaciones de los aparatos de medida. Consideremos la diferencia de correlaciones

$$E(\hat{\mathbf{a}}, \hat{\mathbf{b}}) - E(\hat{\mathbf{a}}, \hat{\mathbf{b}}') = \int_{\Lambda} \left[\bar{A}(\hat{\mathbf{a}}, \lambda) \bar{B}(\hat{\mathbf{b}}, \lambda) - A(\hat{\mathbf{a}}, \lambda) \bar{B}(\hat{\mathbf{b}}', \lambda) \right] \rho(\lambda) d\lambda. \quad (3.12)$$

Usando la notación compacta $\bar{A}(\hat{\mathbf{a}}, \lambda) \rightarrow A_a$, *etc.*, escribimos la identidad algebraica,

$$\begin{aligned} A_a B_b - A_a B_{b'} &= A_a B_b \pm A_a B_b A_{a'} B'_b - A_a B_{b'} \mp A_a B_b A_{a'} B_{b'} \\ &= A_a B_b [1 \pm A_{a'} B_{b'}] - A_a B_{b'} [1 \pm A_{a'} B_b]. \end{aligned}$$

En virtud de (3.10), los productos $|\bar{A}\bar{B}| \leq 1$, por lo tanto $1 \pm \bar{A}\bar{B} \geq 0$ y, usando la identidad algebraica anterior, el valor absoluto de la diferencia (3.12) satisface la desigualdad

$$\begin{aligned} |E(\hat{\mathbf{a}}, \hat{\mathbf{b}}) - E(\hat{\mathbf{a}}, \hat{\mathbf{b}}')| &\leq \int_{\Gamma} |\bar{A}(\hat{\mathbf{a}}, \lambda) \bar{B}(\hat{\mathbf{b}}, \lambda)| \left[1 \pm \bar{A}(\hat{\mathbf{a}}', \lambda) \bar{B}(\hat{\mathbf{b}}', \lambda) \right] \rho(\lambda) d\lambda \\ &\quad + \int_{\Gamma} |\bar{A}(\hat{\mathbf{a}}, \lambda) \bar{B}(\hat{\mathbf{b}}', \lambda)| \left[1 \pm \bar{A}(\hat{\mathbf{a}}', \lambda) \bar{B}(\hat{\mathbf{b}}, \lambda) \right] \rho(\lambda) d\lambda \\ &\leq \int_{\Gamma} \left[1 \pm \bar{A}(\hat{\mathbf{a}}', \lambda) \bar{B}(\hat{\mathbf{b}}', \lambda) \right] \rho(\lambda) d\lambda \\ &\quad + \int_{\Gamma} \left[1 \pm \bar{A}(\hat{\mathbf{a}}', \lambda) \bar{B}(\hat{\mathbf{b}}, \lambda) \right] \rho(\lambda) d\lambda. \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta la condición de normalización (3.1), resulta

$$|E(\hat{\mathbf{a}}, \hat{\mathbf{b}}) - E(\hat{\mathbf{a}}, \hat{\mathbf{b}}')| + |E(\hat{\mathbf{a}}', \hat{\mathbf{b}}) + E(\hat{\mathbf{a}}', \hat{\mathbf{b}}')| \leq 2. \quad (3.13)$$

Esta desigualdad implica a la primer desigualdad de Bell: si se elige $\hat{\mathbf{a}}' = -\hat{\mathbf{b}}$ y se asume una anticorrelación perfecta, $E(\hat{\mathbf{b}}, \hat{\mathbf{b}}) = -1$, se obtiene (3.7) como un caso especial. La inec. (3.13) se puede expresar en términos del parámetro de Bell S ,

$$-2 \leq S \equiv E(\hat{\mathbf{a}}, \hat{\mathbf{b}}) - E(\hat{\mathbf{a}}, \hat{\mathbf{b}}') + E(\hat{\mathbf{a}}', \hat{\mathbf{b}}) + E(\hat{\mathbf{a}}', \hat{\mathbf{b}}') \leq 2. \quad (3.14)$$

y es por lo tanto equivalente a la desigualdad CHSH, ec. (3.9).

Para llegar a esta desigualdad se ha asumido el criterio de localidad, ec. (3.11), además del realismo implícito en la descripción por variables ocultas. No se asume explícitamente ningún tipo de correlación entre las observaciones \bar{A}, \bar{B} ; la correlación existente es debida a la interacción pasada entre ambas partículas cuyos efectos las acompañan al alejarse entre si y dependen del mismo valor de λ . En este trabajo, nos referiremos esta desigualdad, como la segunda desigualdad de Bell.

Predicción cuántica

Para completar esta generalización del teorema de Bell, basta mostrar que en algún caso las correlaciones cuánticas violan la desigualdad (3.14). La correlación cuántica es $E_{MC}(\hat{\mathbf{a}}, \hat{\mathbf{b}}) = -\cos\theta_{ab}$, como se muestra en la Sección A.2.

Supongamos que las direcciones de Alice $\hat{\mathbf{a}}, \hat{\mathbf{a}}'$ y las de Bob $\hat{\mathbf{b}}, \hat{\mathbf{b}}'$ son coplanares y ortogonales entre si y que el sistema de Bob esta rotado un ángulo $\phi \in [0, 2\pi]$ en relación al de Alice, como se indica en la Fig. 3.2. En este caso la predicción cuántica para el parámetro de Bell es

$$S_{MC}(\phi) = \cos(3\phi) - 3\cos(\phi). \quad (3.15)$$

Esta función se muestra en la Fig. 3.2. Hay una amplia gama de valores de $\phi \in [0, 2\pi]$ que resultan en $|S| > 2$. Los ángulos para los cuales la violación de la desigualdad (3.14) es máxima son

$$\text{para } \phi = 45^\circ, \phi = 315^\circ \Rightarrow S = -2\sqrt{2} < -2 \quad (3.16)$$

$$\text{para } \phi = 135^\circ, \phi = 225^\circ \Rightarrow S > 2\sqrt{2} > 2. \quad (3.17)$$

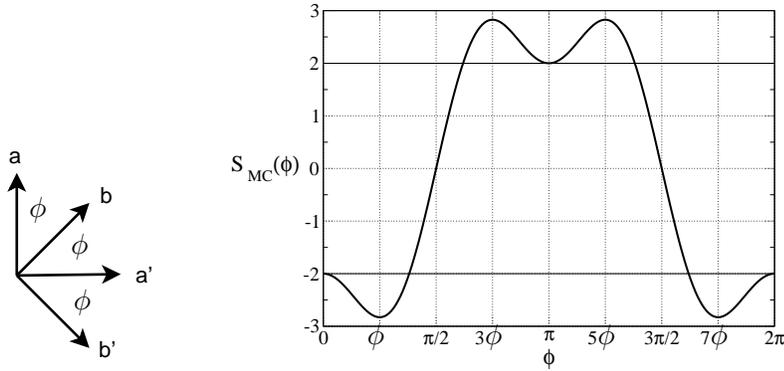


Figura 3.2: Izquierda: direcciones coplanares ortogonales para Alice (a, a') y Bob (b, b'). Los ejes de Bob están rotados un ángulo ϕ con respecto a los de Alice. Derecha: Predicción cuántica para el parámetro de Bell, ec. (3.15). Las líneas horizontales marcan el límite $S = \pm 2$ de la desigualdad.

Como discutimos más adelante, cuando se aplica esta desigualdad al caso de polarización de fotones, es necesario considerar los semiángulos $\varphi = \phi/2$.

La segunda desigualdad de Bell, inec. (3.14), es una generalización importante con respecto a la primera que se aplica a toda teoría realista, local. Se ha abandonado la exigencia de una correlación perfecta, se aparta del determinismo y se da un paso en dirección al laboratorio, incluyendo la posibilidad de una falla del detector (conteo nulo). Sin embargo, su verificación directa requiere un esquema de detección de dos canales que, como ya mencionamos, no se realizó hasta 1982 (vea la Sección 4.2.2). En la siguiente sección consideramos una versión de la desigualdad de Bell especializada para el caso particular de medidas de polarización de fotones usando filtros polarizadores (un esquema de un canal).

3.3. Desigualdad CH74

Las experiencias más relevantes realizadas en la década del 70 para comprobar las desigualdades de Bell se basaron en medidas de correlación entre las direcciones de polarización de pares de fotones ópticos producidos por decaimientos atómicos en cascada (vea la Sección 4.1). En el Apéndice B discutimos la analogía existente entre las componentes de polarización de un fotón y las componentes de spin de una partícula de spin $1/2$. Todas las expe-

riencias de primera generación con polarización de fotones se hicieron usando filtros polarizadores, seguidos de un tubo fotomultiplicador para detectar los fotones que los atraviesan. Es decir, un esquema de detección de un canal. Las desigualdades de Bell desarrolladas en el contexto de partículas de spin $1/2$ no son directamente aplicables a experiencias de un canal. Construyendo sobre su propuesta inicial [CHSH69], Clauser y Horne [CH74] obtienen una desigualdad de Bell que puede ser comprobada usando esquemas de detección de un canal.

3.3.1. Medidas de polarización de un canal

El esquema general de detección de un canal se muestra en la Fig. 3.3. La fuente F crea un par de fotones polarizados a través de un proceso adecuado que no especificaremos por el momento. Los fotones viajan en direcciones opuestas hacia dos filtros polarizadores lineales orientables, indicados A y B en la figura. Un polarizador ideal transmite los fotones con polarización paralela a su eje principal y bloquea aquellos con polarización ortogonal (vea el Apéndice B por más detalles). Dos detectores ($D1$ y $D2$ en la figura) registran los fotones transmitidos por el polarizador correspondiente.

Durante el experimento, la fuente emite N pares de fotones, Alice detecta $N_1(\hat{\mathbf{a}})$ en $D1$ y Bob detecta $N_2(\hat{\mathbf{b}})$ en $D2$. Estas son las lecturas acumuladas de sus respectivos detectores. Los eventos de interés para evaluar correlaciones son aquellos en que hay coincidencia⁴ en la detección de ambas partículas, $N_{12}(\hat{\mathbf{a}}, \hat{\mathbf{b}})$.

Perspectiva desde el realismo local

En una descripción realista por variables ocultas, el estado del par de fotones al momento de la emisión esta asociado al valor de $\lambda \in \Gamma$. La evolución subsecuente de λ es desconocida pero se asume que existe. Se supone también que la densidad de estados $\rho(\lambda)$ no depende de la orientación de

⁴“Coincidencia” en el contexto experimental significa que dos eventos tienen lugar con una diferencia temporal menor a la ventana de simultaneidad τ del aparato. Si bien τ es finito, se puede ignorar si $1/f \ll \tau \ll 1/r$ donde f es la tasa de emisión de pares correlacionados y r la tasa de conteo media de uno de los detectores.

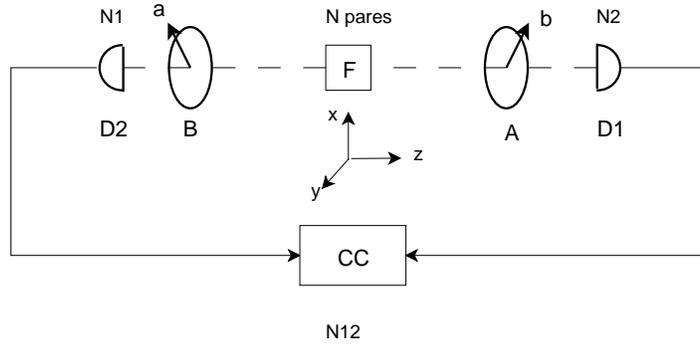


Figura 3.3: Esquema del experimento típico de un canal para medir correlaciones entre las direcciones de polarización de un par de fotones. Un par de fotones polarizados se emite en direcciones opuestas e incide en filtros polarizadores orientables A y B (con ejes principales en las direcciones \hat{a} y \hat{b}), respectivamente. Idealmente, los filtros sólo dejan pasar fotones con polarización a lo largo de su eje principal. Los detectores D1 y D2 alimentan un contador de coincidencias (CC). Más detalles en el texto.

los analizadores (que puede elegirse a posteriori de la emisión del par) y se verifica la condición de normalización (3.1). Si se ha emitido un número N suficientemente grande de partículas⁵, las probabilidades de: detectar un fotón en D1, detectar un fotón en D2 y detectar coincidentemente un fotón en ambos extremos, dependen de λ y de las orientaciones de los analizadores,

$$p_1(\hat{a}, \lambda) = \frac{N_1(\hat{a}, \lambda)}{N}, \quad p_2(\hat{b}, \lambda) = \frac{N_2(\hat{b}, \lambda)}{N}, \quad p_{12}(\hat{a}, \hat{b}, \lambda) = \frac{N_{12}(\hat{a}, \hat{b}, \lambda)}{N}. \quad (3.18)$$

Se asume localidad, suponiendo que las medidas se realizan una vez que las partículas se han alejado lo suficiente y no hay interacción mutua. Por lo tanto, p_1 no depende de \hat{b} y p_2 no depende de \hat{a} y

$$p_{12}(\hat{a}, \hat{b}, \lambda) = p_1(\hat{a}, \lambda) p_2(\hat{b}, \lambda). \quad (3.19)$$

Integrando sobre el ensemble Γ de estados emitidos por la fuente, se obtienen

⁵La asociación entre tasas de conteo y probabilidades requiere suponer que el ensemble de medidas es un muestreo no sesgado (Fair Sampling) del total. Este problema se discute en detalle en el Cap. 4, en el contexto de experimentos concretos.

las probabilidades de que Alice detecte una partícula (p_1), Bob detecte una partícula (p_2) y de que tenga lugar una coincidencia en ambos extremos (p_{12}),

$$\begin{aligned} p_1(\hat{\mathbf{a}}) &= \int_{\Gamma} p_1(\hat{\mathbf{a}}, \lambda) \rho(\lambda) d\lambda \\ p_2(\hat{\mathbf{b}}) &= \int_{\Gamma} p_2(\hat{\mathbf{b}}, \lambda) \rho(\lambda) d\lambda \\ p_{12}(\hat{\mathbf{a}}, \hat{\mathbf{b}}) &= \int_{\Gamma} p_1(\hat{\mathbf{a}}, \lambda) p_2(\hat{\mathbf{b}}, \lambda) \rho(\lambda) d\lambda. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Aquí se ha supuesto que la densidad de estados $\rho(\lambda)$ es independiente de las orientaciones de los analizadores. Si bien razonable, esto es otro requisito de localidad. En algunos experimentos [AGR82b], esta independencia se asegura orientando los analizadores con los fotones en vuelo.

Desigualdades

La demostración de la desigualdad CH74 se basa en el siguiente lema cuya demostración se incluye en el Apéndice C.

Si x, x', y, y', X, Y son números reales no negativos tales que $x, x' \in [0, X]$ y $y, y' \in [0, Y]$, entonces cumplen la desigualdad

$$-XY \leq U \equiv x(y - y') + x'(y + y') - Yx' - Xy \leq 0. \quad (3.21)$$

Para dos juegos de orientaciones alternativas de los analizadores, con las identificaciones

$$\begin{aligned} x &\leftarrow p_1(\hat{\mathbf{a}}, \lambda), & x' &\leftarrow p_1(\hat{\mathbf{a}}', \lambda), & X &\leftarrow 1, \\ y &\leftarrow p_2(\hat{\mathbf{b}}, \lambda), & y' &\leftarrow p_2(\hat{\mathbf{b}}', \lambda), & Y &\leftarrow 1, \end{aligned} \quad (3.22)$$

la desigualdad (3.21) implica

$$\begin{aligned} -1 &\leq p_1(\hat{\mathbf{a}}, \lambda) p_2(\hat{\mathbf{b}}, \lambda) - p_1(\hat{\mathbf{a}}, \lambda) p_2(\hat{\mathbf{b}}', \lambda) + p_1(\hat{\mathbf{a}}', \lambda) p_2(\hat{\mathbf{b}}, \lambda) + \\ &\quad p_1(\hat{\mathbf{a}}', \lambda) p_2(\hat{\mathbf{b}}', \lambda) - p_1(\hat{\mathbf{a}}', \lambda) - p_2(\hat{\mathbf{b}}, \lambda) \leq 0. \end{aligned}$$

Finalmente, multiplicando por la densidad de estados $\rho(\lambda)$, usando la condición de localidad (3.19) e integrando en λ , se obtiene

$$-1 \leq p_{12}(\hat{\mathbf{a}}, \hat{\mathbf{b}}) - p_{12}(\hat{\mathbf{a}}, \hat{\mathbf{b}}') + p_{12}(\hat{\mathbf{a}}', \hat{\mathbf{b}}) + p_{12}(\hat{\mathbf{a}}', \hat{\mathbf{b}}') - p_1(\hat{\mathbf{a}}') - p_2(\hat{\mathbf{b}}) \leq 0. \quad (3.23)$$

Como ya se mencionó, la desigualdad superior fue obtenida anteriormente [CHSH69]. Estas desigualdades deben ser satisfechas por las predicciones estadísticas de cualquier teoría realista local.

Contacto con experiencias de dos canales

Las desigualdades (3.23) implican la segunda desigualdad de Bell, desarrollada en el contexto de experiencias de dos canales. Cuando estas experiencias se realizan con fotones, un cristal (PBS) divide el haz en dos direcciones dependiendo de su dirección de polarización. En cada rama del haz hay detectores. Idealmente, se obtienen conteos de ambas componentes de polarización para cada uno de los fotones del par. Definiendo las probabilidades de detección conjunta correspondientes como $p_{12}^{++}, p_{12}^{+-}, p_{12}^{-+}, p_{12}^{--}$, para cada tipo de detección (p_{12}^{kl} , con $k, l = \pm$) se satisface una desigualdad de la forma (3.23). Escribimos genéricamente estas cuatro desigualdades como

$$-1 \leq S(k, l) \leq 0, \quad (3.24)$$

donde

$$S(k, l) \equiv p_{12}^{kl}(\hat{\mathbf{a}}, \hat{\mathbf{b}}) - p_{12}^{kl}(\hat{\mathbf{a}}, \hat{\mathbf{b}}') + p_{12}^{kl}(\hat{\mathbf{a}}', \hat{\mathbf{b}}) + p_{12}^{kl}(\hat{\mathbf{a}}', \hat{\mathbf{b}}') - p_1^k(\hat{\mathbf{a}}') - p_2^l(\hat{\mathbf{b}}).$$

Las correlaciones $E(\hat{\mathbf{a}}, \hat{\mathbf{b}})$ son valores medios del producto $AB = \pm 1$ y resultan de las probabilidades de detección conjunta

$$E(\hat{\mathbf{a}}, \hat{\mathbf{b}}) = p_{12}^{++} + p_{12}^{--} - p_{12}^{+-} - p_{12}^{-+}. \quad (3.25)$$

La combinación lineal $S(+, +) + S(-, -) - S(+, -) - S(-, +)$ de las desigualdades (3.24) resulta en la segunda desigualdad de Bell, ec. (3.14).

3.3.2. Hipótesis de “No Enhancement”

La expresión (3.23) depende no solo de las probabilidades conjuntas, sino también de las probabilidades de detección en cada detector, (p_1, p_2) . Dado que las bajas eficiencias de detección de fotones individuales han sido uno de los problemas de los primeros experimentos, es deseable desde el punto de vista experimental, eliminar las probabilidades de detección individual

de la desigualdad. Esto motiva a Clauser y Horne a formular una *hipótesis adicional* que permite expresar la desigualdad (3.23) en términos de probabilidades conjuntas. La hipótesis adicional es:

Si se quita un filtro polarizador, la probabilidad de detección será mayor o igual que con el filtro en su lugar.

Esta razonable suposición⁶ se conoce como la hipótesis de “No Enhancement” y es asumida por todas las experiencias basadas en detección de un canal. Usamos, como es usual en este contexto, el símbolo ∞ para representar la probabilidad de detección cuando se retira el filtro polarizador. La hipótesis de “No Enhancement” se traduce en que $\forall \lambda$

$$\begin{aligned} 0 \leq p_1(\hat{\mathbf{a}}, \lambda) &\leq p_1(\hat{\mathbf{a}} = \infty, \lambda), \\ 0 \leq p_2(\hat{\mathbf{b}}, \lambda) &\leq p_2(\hat{\mathbf{b}} = \infty, \lambda). \end{aligned} \quad (3.26)$$

Realizando las identificaciones $X \leftarrow p_1(\hat{\mathbf{a}} = \infty, \lambda)$, $Y\hat{\mathbf{b}} \leftarrow p_2(\infty, \lambda)$, manteniendo las restantes ecs. (3.22). Integrando sobre estados λ , como antes, la desigualdad (3.21) y usando la condición de localidad, (3.19), se obtiene la desigualdad CH72,

$$\begin{aligned} -p_{12}(\infty, \infty) &\leq p_{12}(\hat{\mathbf{a}}, \hat{\mathbf{b}}) - p_{12}(\hat{\mathbf{a}}, \hat{\mathbf{b}}') + \\ &\quad p_{12}(\hat{\mathbf{a}}', \hat{\mathbf{b}}) + p_{12}(\hat{\mathbf{a}}', \hat{\mathbf{b}}') - \\ &\quad p_{12}(\hat{\mathbf{a}}', \infty) - p_{12}(\infty, \hat{\mathbf{b}}) \leq 0. \end{aligned} \quad (3.27)$$

En esta expresión $p_{12}(\infty, \hat{\mathbf{b}})$ es la probabilidad de detección *conjunta* cuando el analizador de Alice ha sido removido y $p_{12}(\hat{\mathbf{a}}, \infty)$ es la correspondiente probabilidad de detección conjunta cuando el analizador de Bob se ha removido. Similarmente, la cantidad $p_{12}(\infty, \infty)$ es la probabilidad de detección conjunta con ambos polarizadores removidos.

⁶Que no es necesariamente cierta. En el Apéndice B presentamos un ejemplo bien conocido en el cual no se cumple: al intercalar un filtro polarizador con eje a 45° entre dos filtros con ejes ortogonales entre si, la intensidad de la luz (que era nula) aumenta a 25%. Esta situación (el uso de polarizadores dispuestos secuencialmente) no se presenta en las experiencias de interés.

Tasas de Coincidencia

Lo que se observa experimentalmente son tasas de coincidencia R (eventos coincidentes/seg). Para dos orientaciones $(\hat{\mathbf{a}}, \hat{\mathbf{b}})$ las tasas de coincidencia relativa son $\tilde{R}(a, b) \equiv R(a, b)/R_0 = p_{12}(a, b)/p_{12}(\infty, \infty)$, donde R_0 es la tasa de coincidencias sin ninguno de los polarizadores en el sistema. La cantidad $\tilde{R}_1(\hat{\mathbf{a}})$ es la tasa relativa de coincidencias cuando el analizador de Bob ha sido removido y $\tilde{R}_2(\hat{\mathbf{b}})$ la correspondiente tasa de coincidencias cuando el analizador de Alice ha sido removido. Si se asume simetría rotacional, las tasas coincidentes R_1 y R_2 no dependen de la orientación del analizador que permanece en el sistema. Este es un caso especial importante y será considerado al comienzo del Cap. 4. Las desigualdades (3.27) se expresan, en términos de las tasas de coincidencia relativa, como

$$-1 \leq \tilde{R}(\hat{\mathbf{a}}, \hat{\mathbf{b}}) - \tilde{R}(\hat{\mathbf{a}}, \hat{\mathbf{b}}') + \tilde{R}(\hat{\mathbf{a}}', \hat{\mathbf{b}}) + \tilde{R}(\hat{\mathbf{a}}', \hat{\mathbf{b}}') - \tilde{R}_1(\hat{\mathbf{a}}') - \tilde{R}_2(\hat{\mathbf{b}}) \leq 0. \quad (3.28)$$

Esta desigualdad (CH74) es el punto de partida para las desigualdades de Bell usadas en los experimentos con polarización de fotones y esquemas de detección de un canal. Si además de la hipótesis de “No Enhancement”, se asume una simetría de rotación se obtiene la versión de Freedman, más conveniente desde el punto de vista experimental y la que se usó en la mayoría de las experiencias hasta la década del 90.

Invariancia rotacional

En un experimentos típico diseñado para testear las desigualdades de Bell, un par de fotones con polarización correlacionada se aleja entre si a lo largo de una dirección $\hat{\mathbf{z}}$, (vea la Fig. 3.3). En muchos casos, la experiencia se monta de forma de aprovechar la simetría de rotación en torno al eje $\hat{\mathbf{z}}$, y es adecuado asumir la hipótesis de invariancia rotacional⁷. Si se cumple esta condición, las tasas de relativas de coincidencia que aparecen en la ec. (3.28)

⁷En una descripción en términos de variables ocultas, las mismás podrían quebrar la simetría de rotación. Desde esta perspectiva, la dependencia en la orientación relativa de los polarizadores no puede asumirse, pero siempre puede verificarse experimentalmente. Ninguno de los experimentos analizados en esta sección reporta evidencia de tal quiebra de simetría.

sólo dependen de la *orientación relativa* de los aparatos de medida de Alice y Bob,

$$\tilde{R}(\hat{\mathbf{a}}, \hat{\mathbf{b}}) \rightarrow \tilde{R}(\theta_{ab}) \quad \text{con} \quad \theta_{ab} \equiv |\theta_a - \theta_b|. \quad (3.29)$$

Otra consecuencia de la invariancia rotacional es que la tasa de detección conjunta con uno de los polarizadores removidos no puede depender de la dirección del polarizador restante, de modo que las cantidades \tilde{R}_1 y \tilde{R}_2 pasan a ser consideradas constantes (a ser determinadas experimentalmente).

Por otra parte, las direcciones de los polarizadores son variadas en un plano transversal a la dirección de propagación de los fotones y los versores correspondientes son coplanares. Típicamente, se eligen los ángulos relativos del modo mostrado en la Fig. 3.2,

$$\theta_{ab} = \theta_{a'b} = \theta_{a'b'} = \frac{1}{3}\theta_{ab'} \equiv \phi. \quad (3.30)$$

en términos de un sólo ángulo $\phi \in [0, 2\pi]$. Con estas simplificaciones, la desigualdad (3.28) se expresa en términos de la orientación relativa ϕ como

$$-1 \leq \Delta(\phi) \equiv 3\tilde{R}(\phi) - \tilde{R}(3\phi) - \tilde{R}_1 - \tilde{R}_2 \leq 0. \quad (3.31)$$

Esta forma de la desigualdad CH74 es satisfecha por teorías locales de variables ocultas bajo condiciones de simetría cilíndrica, admitiendo la hipótesis adicional de “No Enhancement”.

Predicción cuántica

En el decaimiento en cascada del Calcio usado por varias experiencias tipo EPR, se producen (idealmente) pares de fotones en el estado enredado,

$$|\Psi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|++\rangle + |--\rangle), \quad (3.32)$$

donde $|+\rangle$ describe un fotón con polarización en alguna dirección de referencia y $|-\rangle$ describe un fotón polarizado en la dirección ortogonal.

El observable asociado a una detección coincidente es $Q(a) \otimes Q(b)$, donde $Q(a)$ es el proyector de polarización sobre una dirección $\hat{\mathbf{a}}$, definido en la ec. (B.4) del Apéndice B. Allí se muestra que el valor esperado de éste observable para el estado (3.32) es

$$\tilde{R}_{MC}(\phi) = \langle \Psi | Q(\hat{\mathbf{a}}) \otimes Q(\hat{\mathbf{b}}) | \Psi \rangle = \frac{1}{4} [1 + \cos(2\phi)] = \frac{1}{2} \cos^2(\phi), \quad (3.33)$$

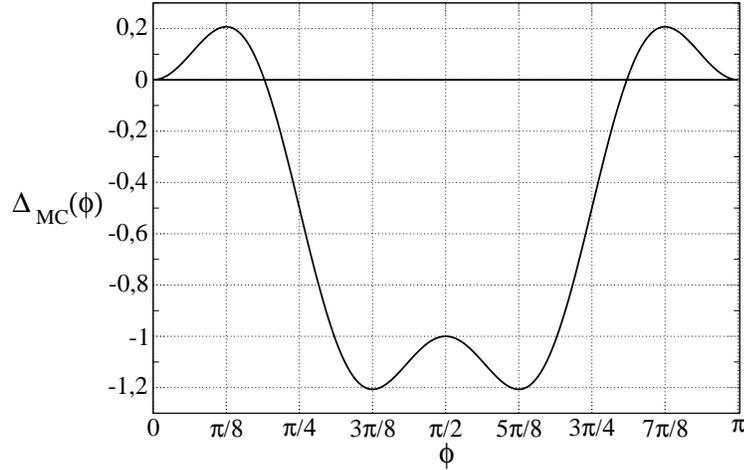


Figura 3.4: Gráfico de la ec. (3.36), la predicción cuántica para la función $\Delta(\phi)$ definida en (3.31). La violación de la desigualdad tiene lugar para orientaciones relativas tales que $\Delta > 0$ o $\Delta < -1$.

en términos de la orientación relativa ϕ , definida en la sección anterior

Las tasas ideales de detección coincidente relativa con un polarizador fuera del sistema son $1/2$, ya que la mitad de los fotones son bloqueados por el polarizador restante y no contribuyen a la tasa de coincidencias. En cualquier caso, un cálculo directo como el del Apéndice B confirma que

$$\tilde{R}_{1,MC} = \frac{1}{2} \langle \Psi | Q(\hat{\mathbf{a}}) \otimes I | \Psi \rangle = \frac{1}{2}, \quad (3.34)$$

$$\tilde{R}_{2,MC} = \frac{1}{2} \langle \Psi | I \otimes Q(\hat{\mathbf{b}}) | \Psi \rangle = \frac{1}{2}. \quad (3.35)$$

Estas expresiones se aplican al caso de una experiencia ideal, sin errores experimentales. Más adelante consideramos las modificaciones necesarias para describir el resultado de una experiencia real.

Usando las ecs. (3.33), la predicción cuántica para la función $\Delta(\phi)$ definida en (3.31), es

$$\Delta_{MC}(\phi) = \frac{1}{4} [3 \cos(2\phi) - \cos(6\phi) - 2]. \quad (3.36)$$

Esta función de período π se muestra en la Fig. 3.4. Es cualitativamente similar a la predicción cuántica para el parámetro de Bell S (vea la Fig. 3.2).

Existen rangos de orientaciones relativas de los ejes de los aparatos de Alice y Bob para los cuales la predicción cuántica, ec. (3.36), difiere de las teorías locales de variables ocultas. En términos aproximados,

$$\phi \in [0, 34,3^\circ] \quad \phi \in [55, 7^\circ, 122,3^\circ] \quad \phi \in [145,7^\circ, 180^\circ]. \quad (3.37)$$

La mayoría de las experiencias se han realizado usando $\phi = \pi/8 \sim 22,5^\circ$ o $\phi = 3\pi/8 \sim 67,5^\circ$, los llamados “ángulos de Bell” para los cuales Δ_{MC} tiene extremos y la violación de la desigualdad (3.31) es máxima⁸.

Desigualdad de Freedman

La versión de la desigualdad de Bell usada en las experiencias de primera generación es una forma aún más compacta de la ec. (3.31), en la que no aparecen las tasas de detección coincidente (\tilde{R}_1, \tilde{R}_2) con uno de los polarizadores removido. Esta versión de las desigualdades de Bell, debida a Freedman [FC72], es

$$\delta \equiv |\tilde{R}(\pi/8) - \tilde{R}(3\pi/8)| \leq \frac{1}{4}. \quad (3.38)$$

Evaluando la inec. (3.31) en los dos ángulos extremos, $\phi = \pi/8$ y $\phi = 3\pi/8$ resultan las desigualdades

$$-1 \leq 3\tilde{R}(\pi/8) - \tilde{R}(3\pi/8) - \tilde{R}_1 - \tilde{R}_2 \leq 0, \quad (3.39)$$

$$-1 \leq 3\tilde{R}(3\pi/8) - \tilde{R}(\pi/8) - \tilde{R}_1 - \tilde{R}_2 \leq 0, \quad (3.40)$$

donde hemos usado $\tilde{R}(9\pi/8) = \tilde{R}(\pi/8)$, suponiendo $\tilde{R}(\phi)$ periódica con período π (como sugiere la predicción cuántica, ec. (3.33)). Restando estas desigualdades se obtiene la desigualdad (3.38). Al implicar solo tasas de detección coincidente evaluadas en dos ángulos de Bell, ya no es necesario repetir el experimento (para cada orientación relativa de los analizadores) para tomar

⁸El momento angular es el generador de rotaciones [Mes65]: $\mathcal{R}_u(\theta) = e^{-i\theta J_u}$, donde $\mathcal{R}_u(\theta)$ es el operador de rotación de eje $\hat{\mathbf{u}}$ y ángulo θ y J_u la componente de momento angular a lo largo del eje. Para momentos angulares semienteros, como en el caso de partículas de spin 1/2, $J_u = \pm 1/2$ y los autoestados de spin transforman bajo rotaciones como $\mathcal{R}_u^\pm(\theta) = e^{\pm i\theta/2}$. Los fotones son partículas con spin entero ($s = 1$) y estados de polarización definida corresponden a $J_u = \pm 1$ (vea el Apéndice B), lo que explica el factor 2 entre los ángulos de las expresiones para spin 1/2 (Sección 3.2) y para fotones.

conteos sin uno u otro de los polarizadores en el aparato. Esto reduce el tiempo de adquisición en un factor 3, pero además tiende a simplificar el experimento y reduce la posibilidad de errores sistemáticos. Las hipótesis en que se basa la desigualdad (3.38) son esencialmente las mismas⁹ que la forma simétrica de la desigualdad CH74, ec. (3.31).

La predicción de la Mecánica Cuántica para el parámetro δ de la desigualdad de Freedman se obtiene a partir de la ec. (3.33),

$$\tilde{R}(\pi/8) = \frac{1}{4} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \quad \tilde{R}(3\pi/8) = \frac{1}{4} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \right).$$

Por lo tanto

$$\delta_{MC} = |\tilde{R}(\pi/8) - \tilde{R}(3\pi/8)| = \frac{\sqrt{2}}{4} > \frac{1}{4}. \quad (3.41)$$

En este punto, tenemos la infraestructura teórica necesaria para comprender las experiencias EPR descritas en el siguiente capítulo.

⁹Salvo en lo que respecta a la periodicidad de $R(\phi)$, verificable experimentalmente.

Capítulo 4

Buscando un veredicto experimental

I have entertained myself always by squeezing the difficulty of Quantum Mechanics into a smaller and smaller place, so as to get more and more worried about this particular item. It seems almost ridiculous that you can squeeze it to a numerical question that one thing is bigger than another. But there you are – it is bigger.

*R.P. Feynman,
R.P.Int.J.Theor.Phys.,21,467-488 (1982).*

Yes, it is bigger by 30 standard deviations.

*Alain Aspect, comentando la cita anterior en
Nature 398, pag. 189 (1999).*

El trabajo experimental realizado en los últimos 35 años tendiente a dilucidar si las desigualdades de Bell son o no satisfechas en experiencias tipo EPR, se puede dividir en tres etapas [Asp99]. La primera etapa esta dominada por experiencias con detección de un canal que usan pares de fotones visibles producidos por decaimientos atómicos en cascada. Los resultados tienden a coincidir con la predicción cuántica, pero hay excepciones. Esta primera generación de experiencias no se considera concluyente, ya que para interpretar las observaciones requieren de hipótesis adicionales a las de la segunda desigualdad de Bell. Pese a ello, es interesante describir las primeras experiencias con fotones correlacionados para apreciar en perspectiva los logros experimentales modernos.

En las experiencias de segunda generación, iniciadas a comienzos de la década del 80, la electrónica ya es lo bastante rápida como para permitir que la dirección de los polarizadores se elija mientras el par de fotones esta "en vuelo". Además, se realiza la primera experiencia con detección de dos canales, en la cual se mide ambas componentes de polarización y es posible comprobar directamente la segunda desigualdad de Bell. Es a partir de este tipo de experiencias, que el debate comienza inclinarse decididamente en favor de la Mecánica Cuántica. Los tres experimentos realizados por Aspect et al. en Orsay son considerados por muchos físicos como una prueba concluyente a favor de la Mecánica Cuántica y en contra las teorías locales de variables ocultas. Sin embargo, estrictamente hablando, subsisten algunos problemas (loopholes) principalmente asociados a la condición de localidad, reclamada por John Bell como esencial [Bel65] y al problema de la eficiencia de detección que obliga a asumir la hipótesis de "Fair Sampling" para vincular las probabilidades de detección coincidente con los datos experimentales.

Algunas de las experiencias de tercera generación se diseñan específicamente para "cerrar" los loopholes mencionados y, en nuestra opinión, lo consiguen. Por ejemplo, en el experimento de Innsbruck se plasmaron las condiciones inicialmente propuestas por Bell eligiendo las direcciones de medida al azar mientras los fotones están en vuelo y logrando además excluir la posibilidad de conexión causal entre las medidas de polarización en ambos extremos del "aparato" (separados por 400 m). En 2001, en la trampa de iones del NIST se realizó un experimento con iones de ${}^9\text{Be}^+$ en el cual se detectaron

todos los pares originalmente enredados y se cerró el loophole de detección. Sin embargo, no existe, hasta el momento, ninguna experiencia que cierre simultáneamente todos los loopholes.

Desde el punto de vista cuantitativo, en la literatura se encuentran varias decenas de experimentos reportando la violación de algún tipo de desigualdad de Bell por varias desviaciones estándar. Salvo alguna excepción (no repetible) entre las primeras experiencias, en todas los experimentos realizados hasta la fecha se confirma la predicción cuántica.

4.1. Primeros experimentos

Podemos agrupar los primeros experimentos diseñados exclusivamente para testear las desigualdades de Bell, en dos clases:

(1) Experiencias basadas en medidas de polarización de pares de fotones ópticos generados a partir de transiciones electrónicas “en cascada” inducidas en átomos de Calcio o Mercurio. Si bien estos experimentos no permiten comprobar aún la segunda desigualdad de Bell, si permiten una comprobación de la desigualdad de Freedman, inec. (3.38). Estas experiencias son el antecedente inmediato de los experimentos de Aspect et al., con los cuales comparten un enfoque similar. Esta sección esta dedicada a describir los resultados de estos experimentos.

(2) Experimentos basados en fotones de alta energía ($\sim 0,5 \text{ MeV}$), obtenidos por aniquilación del positronio. Su polarización se “mide” en forma indirecta cuando los fotones son dispersados¹ en blancos metálicos (dispersión Compton) y luego detectados en forma coincidente. En una serie de experiencias de este tipo [KUW75, F⁺74, WLB76, BdM77] realizada a mediados de la década del 70, la mayoría (aunque no todos) verifican la predicción de la Mecánica Cuántica. Sin embargo, el vínculo de éstos experimentos con las desigualdades de Bell es remoto y requieren de la teoría cuántica para interpretar sus resultados. Algo similar ocurre con una experiencia aislada de dispersión de protones [LRM76]. Vea [CS78] por una crítica de éstos experimentos.

¹No existían en la época filtros polarizadores eficientes para fotones de esta energía.

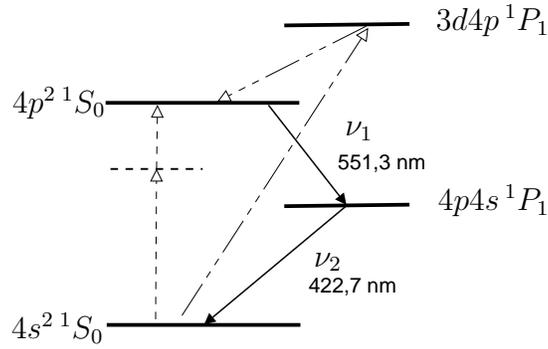


Figura 4.1: Niveles electrónicos relevantes del Calcio. El mecanismo de excitación usado por [FC72] se muestra con las flechas trazo-punto. Los fotones ópticos ν_1, ν_2 emitidos en el decaimiento en cascada están correlacionados en polarización. La misma fuente de fotones fue usada en [AGR81], con un mecanismo de excitación selectiva basado en dos fotones (flechas verticales a trazos).

Decaimiento en cascada

Todas las experiencias discutidas en esta sección usan fotones generados a partir de decaimientos atómicos sucesivos (cascada). Por ejemplo, la Fig. 4.1 muestra el decaimiento en cascada del Calcio usado en los experimentos de Freedman y Clauser [FC72] y en las tres experiencias de Aspect [AGR81, AGR82a, AGR82b]. El par de fotones emitido en un decaimiento en cascada tiene sus polarizaciones correlacionadas². La naturaleza de las correlaciones depende del tipo de cascada. En las experiencias tipo EPR que discutimos en este trabajo se han usado dos tipos de cascada que se pueden caracterizar por los valores inicial, intermedio y final del momento angular total del átomo J . En las cascadas tipo $J = 0 \rightarrow J = 1 \rightarrow J = 0$, como la mostrada en la figura Fig. 4.1, la correlación entre los fotones se describe bien por un estado tipo $|\Psi_2\rangle = (|++\rangle + |--\rangle)/\sqrt{2}$. Como se muestra en el Apéndice B, la predicción cuántica para el valor esperado de la tasa de coincidencias en una experiencia ideal a partir de este estado esta dada por la ec. (3.33). Esta ecuación deber ser corregida para tener en cuenta la eficiencia de los polarizadores [FC72],

$$\tilde{R}(\phi) = \frac{1}{4} [\epsilon_+^2 + \epsilon_-^2 F(\theta) \cos(2\phi)], \quad (4.1)$$

²Debido a las restricciones impuestas por la conservación de la cantidad de movimiento angular y de la paridad.

donde ϕ es la orientación relativa entre ambos polarizadores (ϕ se define en la Sección 3.3.2). $|F(\theta)| \leq 1$ es una medida de la pureza de las correlaciones presentes en el estado inicial y depende del tipo de cascada y de la co-linealidad con que se aleja un par de fotones de la fuente. Esto último depende del semiángulo θ con el cual los polarizadores “ven” la fuente. En el caso ideal los fotones son colineales y $F(0) = \pm 1$, dependiendo del tipo de decaimiento. Para decaimientos tipo $0 \rightarrow 1 \rightarrow 0$ resulta $F = 1$ y para decaimientos tipo $1 \rightarrow 1 \rightarrow 0$ es $F(0) = -1$ [CS78]. En una experiencia real, el valor concreto de $|F|$ a ser usado en la ec. (4.1) depende de la geometría. Las cantidades ϵ_{\pm} están asociadas a la calidad de los polarizadores. Idealmente, un filtro polarizador transmite fotones con polarización paralela a su eje principal y absorbe aquellos con polarización perpendicular. Un polarizador real tiene asociadas transmitancias $\epsilon_M \lesssim 1$ y $\epsilon_m \gtrsim 0$, que pueden definirse como las probabilidades de transmisión cuando un fotón tiene polarización a lo largo de la dirección principal (ϵ_M) o perpendicular (ϵ_m) a la misma. Para cada³ polarizador A,B, las cantidades que aparecen en la ec. (4.1) se definen como $\epsilon_{\pm} \equiv \epsilon_M \pm \epsilon_m$. Los parámetros experimentales disponibles en la literatura sobre estas experiencias se resumen en el Cuadro 4.1.

La versión de la desigualdad de Bell usada en todos los experimentos es versión compacta debida a Freedman, ineq. (3.38). Los sistemas de detección son – en todos los casos – de un canal y se ajustan al esquema general mostrado en la Fig. 3.3. En todas las experiencias (salvo [KC67]), usando las definiciones de la Sección 3.3.2, se miden las tasas de coincidencia relativas para los ángulos de Bell, $\tilde{R}_{exp}(22, 5^\circ)$ y $\tilde{R}_{exp}(67, 5^\circ)$. Con estas tasas se obtiene el valor experimental para el parámetro de Freedman,

$$\delta_{exp} = |\tilde{R}_{exp}(22, 5^\circ) - \tilde{R}_{exp}(67, 5^\circ)| \quad (4.2)$$

que, de acuerdo a las teorías locales, y también las hipótesis adicionales mencionadas en la Sección 3.3, debe estar acotado por la desigualdad de Freedman, $\delta \leq 1/4$.

³En la ec. (4.1) hemos supuesto, por simplicidad, que ambos polarizadores son idénticos.

Ref.	átomos	cascada (J)	ϵ_M	ϵ_m	θ ($^\circ$)	$F(\theta)$
[FC72]	^{40}Ca	$0 \rightarrow 1 \rightarrow 0$	$0,96 \pm 0,01$	$0,037 \pm 0,004$	30	0,990
[HP73]	^{198}Hg	$1 \rightarrow 1 \rightarrow 0$	$0,895 \pm 0,001$	$< 10^{-4}$	13	-0,951
[FT76]	^{198}Hg	$1 \rightarrow 1 \rightarrow 0$	$0,975 \pm 0,010$	$0,020 \pm 0,005$	19,9	-0,912
[Cla76]	^{202}Hg	$1 \rightarrow 1 \rightarrow 0$	0,969	0,010	18,6	-0,904
[AGR81]	^{40}Ca	$0 \rightarrow 1 \rightarrow 0$	$0,999 \pm 0,007$	$0,029 \pm 0,007$		0,984

Cuadro 4.1: Parámetros experimentales usados en las primeras experiencias de un canal. Los datos de [HP73] (que no fue publicado) son los mencionados en [CS78]. Las transmittancias son valores promedio para ambos polarizadores. El ángulo θ esta en grados. Los errores reportados corresponden a una desviación estándar en todos los casos. Los resultados correspondientes se detallan en el cuadro 4.2. La experiencia [AGR81] se discute en detalle en la siguiente sección.

Descripción de los experimentos

Los primeros pasos para plasmar en una experiencia con polarización de fotones la propuesta original de Aharonov-Bohm [BA57] fueron dados por Kocher y Commings en Berkeley [KC67]. Usaron el par de fotones generado en un decaimiento en cascada tipo $0 \rightarrow 1 \rightarrow 0$ en átomos de Calcio excitados ópticamente. En esta primer experiencia solo se toman datos de coincidencias con (i) los filtros polarizadores paralelos y (ii) los filtros polarizadores ortogonales entre si. Kocher y Commings reportan datos consistentes con la correlación cuántica, ec. (4.1), esperada para este tipo de cascada.

La primer experiencia diseñada específicamente para testear la desigualdad de Freedman usando fotones visibles es realizada por Freedman y Clauser [FC72] en Berkeley. Este experimento se basa en una propuesta realizada por el mismo grupo tres años antes [CHSH69]. Usando una emisión en cascada del Calcio del mismo tipo que la de Kocher y Commings (vea la Fig. 4.1), obtienen las tasas de coincidencia para los ángulos de Bell y estiman $\delta_{exp} = 0,300$, violando la desigualdad de Freedman por 6σ . También verifican la predicción cuántica para otras orientaciones relativas de los polarizadores, como se muestra en la Fig. 4.2.

Un año después de realizado el experimento de Freedman y Clauser, se

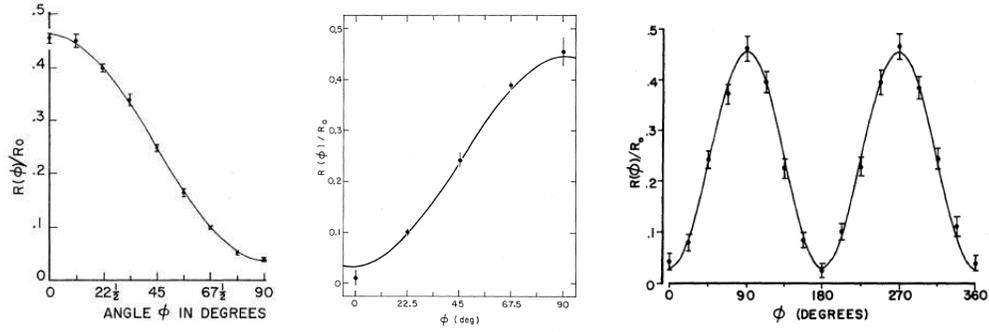


Figura 4.2: Comparación entre la predicción cuántica, ec. (4.1), para $\tilde{R}(\phi)$ y las observaciones experimentales para varias orientaciones relativas ϕ : izquierda [FC72], centro [Cla76], derecha [FT76]. Figuras tomadas de las publicaciones citadas.

lleva a cabo una experiencia similar usando pares de fotones de un decaimiento en cascada tipo $1 \rightarrow 1 \rightarrow 0$ del ^{198}Hg por parte de Holt y Pipkin, de la Universidad de Harvard [HP73]. En este experimento, en discrepancia con la Mecánica Cuántica, no se observa ninguna violación de la desigualdad de Freedman.

En 1976 John Clauser en Berkeley, repite la experiencia de Holt y Pipkin usando el mismo decaimiento en cascada, y observa una clara violación de la desigualdad de Bell [Cla76]. Ese mismo año se realiza un cuarto experimento en la Universidad de Kansas [FT76], basado en el decaimiento tipo $1 \rightarrow 1 \rightarrow 0$ del ^{200}Hg (que tiene spin nuclear total nulo), que también confirma la violación de la desigualdad de Bell.

En el Cuadro 4.2 resumimos los resultados de estas experiencias. A partir de éstos resultados, se ha afirmado [Cla76, CS78] que la experiencia discrepante (de Holt y Pipkin) estaría afectada por algún tipo de error sistemático⁴. Como muestra el cuadro 4.2, en los tres casos en que se observa una violación de la desigualdad (3.38), esta se da por varias desviaciones estándar. Además (Fig. 4.2) la predicción de la Mecánica Cuántica para la tasa relativa de coincidencias, ec. (4.1), ha sido verificada para varias ori-

⁴Es interesante observar, según se reporta en [CS78], que los primeros resultados de la repetición hecha por Clauser [Cla76] coincidieron con los de Holt y Pipkin... Al realizar un chequeo de la óptica se encontró una lente con problemas de montaje. Al corregir este problema, los resultados pasaron a coincidir con la Mecánica Cuántica. Holt y Pipkin nunca repitieron su experiencia.

Ref.	δ_{MC}	$\tilde{R}_{exp}(\pi/8)$	$\tilde{R}_{exp}(3\pi/8)$	δ_{exp}	$\delta_{exp} > \frac{1}{4} ?$
[FC72]	$0,301 \pm 0,007$	$0,400 \pm 0,007$	$0,100 \pm 0,003$	$0,300 \pm 0,008$	por $\sim 6\sigma$
[HP73]	0,266	$0,099 \pm 0,009$	$0,316 \pm 0,011$	$0,216 \pm 0,013$	NO
[FT76]	$0,294 \pm 0,007$			$0,296 \pm 0,014$	por $\sim 3\sigma$
[Cla76]	0,2841			$0,289 \pm 0,009$	por $\sim 4\sigma$
[AGR81]	$0,308 \pm 0,002$			$0,307 \pm 0,004$	por $\sim 14\sigma$

Cuadro 4.2: Resultados de las primeras experiencias de un canal realizadas para testear las desigualdades de Bell. La predicción cuántica, δ_{MC} , se calcula usando la ec. (4.1) con los parámetros experimentales detallados en el cuadro 4.1. Los datos de [HP73] (que no fue publicado) son los mencionados en [CS78]. Los errores reportados corresponden a una desviación estándar en todos los casos. El estimativo para el parámetro de Freedman, δ_{exp} , se obtiene a partir de las tasas de coincidencia, con la ec. (4.2). La experiencia [AGR81] se discute en detalle en la siguiente sección.

entaciones relativas de los polarizadores. Sin embargo, éstas experiencias de primera generación no son concluyentes. Un crítico de la Mecánica Cuántica podría objetar los resultados de éstos experimentos en varios aspectos:

1. No se usó la segunda desigualdad de Bell, sino la forma de Freedman que contiene una hipótesis adicional sobre la detección en ausencia de polarizadores además de la suposición de simetría de rotación. Los resultados solo pueden invalidar teorías locales de variables ocultas en los que estas hipótesis se satisfacen.
2. La violación a la desigualdad se da por pocas desviaciones estándar, lo que permite alentar la idea de que algún error sistemático no tenido en cuenta cambie el resultado de tres de los experimentos (sin afectar el restante), de modo que todos los datos satisfagan la desigualdad de Bell. En otras palabras, existe la posibilidad de que la experiencia de Holt y Pipkin esté correcta y las otras tres equivocadas, ya que el presunto error sistemático que afectó los datos de Holt y Pipkin nunca fue identificado [CS78]. Esta es una posibilidad muy remota, ya que los resultados negativos de Holt y Pipkin no pudieron ser reproducidos en

el intento llevado a cabo por Clauser [Cla76].

3. Las orientaciones de los polarizadores son fijas. No se realizó la experiencia propuesta por Bell en la cual la elección de como orientar el polarizador se realiza mientras las partículas están en vuelo. La información sobre la orientación de polarización que se va medir se puede “filtrar” en los fotones al ser creados.
4. Para interpretar las tasas relativas de detección como las probabilidades de coincidencia presentes en la versión original de la desigualdad CH74, se requiere suponer que la muy pequeña fracción de todos los pares emitidos que fue detectada, es una muestra no sesgada del total.

4.2. Las experiencias de Aspect

A través de tres experiencias realizadas por Alain Aspect y colaboradores en la Universidad de París-Sud a comienzos de la década del 80 [AGR81, AGR82a, AGR82b], quedó bastante bien establecido que las correlaciones en medidas de polarización de fotones no satisfacen las desigualdades de Bell por un amplio margen. Esto representó un fuerte golpe para el realismo local. La primera y tercera experiencia de Aspect usan medidas de un canal y serán consideradas en conjunto en la siguiente sección. La segunda es especial por más de una razón. Es la primer comprobación de la segunda desigualdad de Bell, lo cual la libera de las hipótesis adicionales (simetría rotacional y “No Enhancement”) que afectan a la desigualdad de Freedman. En segundo lugar, la violación de la desigualdad se da en el nivel nunca antes observado de 46 desviaciones estándar y se verifican las predicciones cuánticas para varias orientaciones relativas de los analizadores.

4.2.1. Experiencias de un canal

Analizadores fijos

La primer experiencia de Aspect [AGR81] es un refinamiento, con mejor tecnología, de las experimentos históricos de primera generación [FC72, Cla76, FT76]. Esta experiencia se ajusta al esquema general de detección de un

canal, mostrado en la Fig. 3.3. Se utilizan los dos fotones generados en la cascada $0 \rightarrow 1 \rightarrow 0$ del ^{40}Ca , (Fig. 4.1), la misma fuente de fotones usada por Freedman y Clauser, pero el mecanismo de excitación es diferente. En este caso la excitación es específica a los isótopos de ^{40}Ca , con lo cual se evita que otros isótopos residuales afecten las correlaciones de los fotones emitidos. Además, alcanzan tasas de decaimiento muy superiores a las de anteriores experimentos (el último fue el de Fry y Thomson, 1976). Con esto, los tiempos de conteo pasan a ser del orden de 10 minutos en vez de varias horas como en las experiencias de primera generación. Los polarizadores usados son, como en experiencias anteriores, de tipo “pila de platos” y sus eficiencias, junto con otros detalles del experimento, se incluyen en el cuadro comparativo 4.1.

Como es usual se consideran orientaciones coplanares de los polarizadores que verifican la condición (3.30) y se miden tasas relativas de coincidencia, $\tilde{R}(\phi)$, para una orientación relativa ϕ concreta. Las coincidencias observadas son corregidas restando las coincidencias accidentales⁵.

En esta experiencia se obtienen varios resultados:

1. Violación de la desigualdad de Freedman por 13σ .

Orientando los polarizadores con los ángulos de Bell, $\phi = \pi/8$ y $\phi = 3\pi/8$, se obtienen lecturas de tasas de coincidencia $\tilde{R}(\pi/8)$ y $\tilde{R}(3\pi/8)$. Las medidas se repiten de modo que se obtiene una incertidumbre experimental para estas cantidades. Luego se evalúa el parámetro de Freedman δ_{exp} . El resultado obtenido es

$$\delta_{exp} = |\tilde{R}(\pi/8) - \tilde{R}(3\pi/8)| = 0,3072 \pm 0,0043$$

representa una violación de la desigualdad $\delta \leq 1/4$ por mas de 13σ , lo cual es la mayor diferencia obtenida hasta el momento (vea el Cuadro 4.1).

2. Violación de la desigualdad CH72 por 9σ .

La desigualdad de Freedman asume invariancia rotacional. Para testear una desigualdad sin suponer invariancia rotacional, Aspect et al. toman

⁵Estas son detecciones coincidentes no debidas a un par de fotones correlacionados emitidos por la fuente.

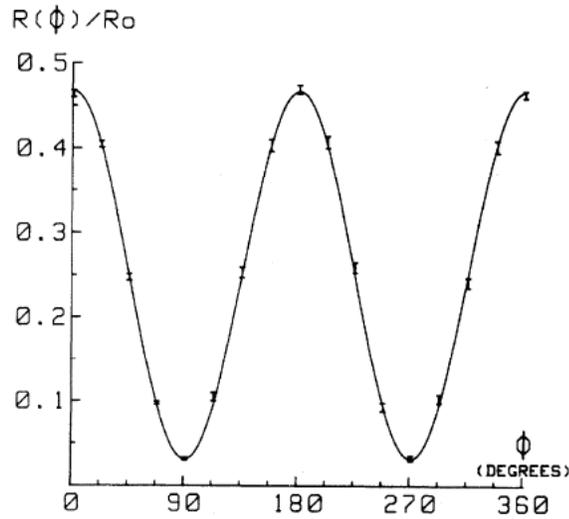


Figura 4.3: Tasa relativa de coincidencia observada para varias orientaciones relativas. Las barras de error indican una desviación estándar. La curva corresponde a la predicción cuántica, ec. (4.1), usando los parámetros indicados en el cuadro 4.1. Figura reproducida de [AGR81].

dos series de medidas de tasas de coincidencia \tilde{R}_1, \tilde{R}_2 con uno (o el otro) de los analizadores fuera del sistema y evalúan desigualdad CH74, eq. (3.28) que no requiere simetría de rotación. Para $\phi = 22,5^\circ$ se obtiene,

$$\Delta_{exp} = 0,126 \pm 0,014$$

lo cual representa una violación por 9σ de la desigualdad CH74. Este resultado es consistente con la predicción cuántica (con las correcciones correspondientes a las eficiencias de los polarizadores y de los detectores) de $\Delta_{MC} = 0,0,118 \pm 0,005$.

3. Chequeo de la predicción cuántica para varias orientaciones relativas de los polarizadores.

Se toman medidas de $\tilde{R}(\phi)$ para varios valores de ϕ y se verifica la predicción cuántica (con las correcciones correspondientes a las eficiencias experimentales), ec. (4.1). Esta comparación se muestra en la Fig. 4.3.

4. Descarte de la hipótesis de Bohm-Aharonov

Para testear la propuesta de Bohm y Aharonov [BA57] sobre un posible debilitamiento de las correlaciones con la distancia⁶ Aspect et al. repiten el experimento (para diversas orientaciones relativas ϕ) con los polarizadores separados de la fuente por una distancia de hasta 6.5 m. No observan cambios significativos en las tasas de coincidencia, lo cual se interpreta como evidencia de un nivel de correlación similar, independientemente de la distancia fuente-detector (modernamente, se ha detectado enredo entre fotones a distancias de decenas de kilómetros). La distancia de 6,5 m corresponde a 4 longitudes de coherencia para la fuente usada⁷.

En suma este experimento es el primero en comprobar la violación de una desigualdad de Bell sin suponer la simetría de rotación y por niveles no alcanzados previamente. Sin embargo, este experimento tampoco puede ser considerado concluyente. No escapa a la hipótesis de “No enhancement” y, pese a la mayor separación entre A y B, comparte el problema de que las orientaciones de los polarizadores son fijas, lo cual vulnera la condición de localidad.

Analizadores variables

En su tercer experiencia [AGR82b], Aspect et al. intentan descartar la posibilidad de que la hipótesis de localidad subyacente en las desigualdades de Bell no se esté cumpliendo. De acuerdo con esta suposición, (i) la medida de la polarización de Bob no es afectada por la orientación del analizador de Alice y viceversa. Además, (ii) el proceso de emisión y las propiedades de los fotones

⁶De acuerdo a esta idea de Bohm y Aharonov (también planteada antes por Furry [Fur36]), el decaimiento del enredo entre fotones que se alejan podría tener lugar en una distancia del orden de un largo de coherencia. Con esta idea, evidentemente, se disuelve la paradoja EPR.

⁷La longitud de coherencia de una fuente de luz, $L \equiv \lambda^2/\Delta\lambda$, es la distancia característica, a partir de la cual se considera que se pierde la coherencia. Para los fotones emitidos en la cascada considerada, $L = c/\Delta\nu = c\tau = 1,5$ m, donde τ es la vida media del nivel intermedio $4p4s\ ^1P_1$ de la cascada, que genera una incertidumbre $\Delta\nu = 1/\tau$ en la frecuencia (vea la fig. 4.1).

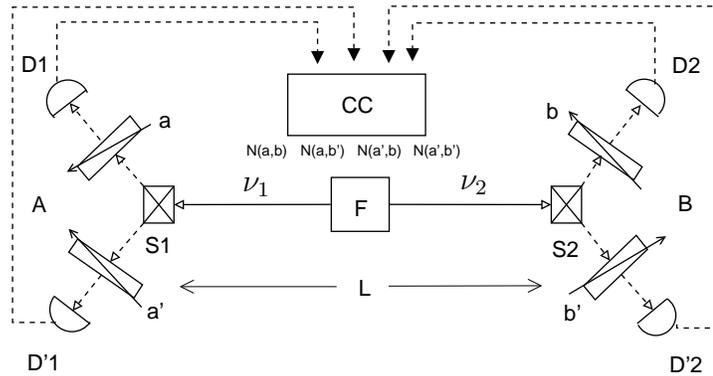


Figura 4.4: Esquema general de la experiencia [AGR82b]. La fuente F emite un par de fotones correlacionados que viajan en direcciones opuestas. Cada switch (S1,S2) varía – en forma efectiva – la orientación del analizador correspondiente cada 10ns. La separación fuente-switch es $L/2 = 6$ m, de modo que el tiempo de tránsito de cada fotón es de $L/2c = 20$ ns. Con este dispositivo, que sigue siendo de un canal, en una sola corrida se logran conteos correspondientes a cuatro orientaciones relativas.

emitidos se suponen independientes de las orientaciones de los analizadores. En un experimento en el cual las orientaciones de los analizadores son fijadas al comienzo, es imposible excluir la posibilidad de comunicación sublumínica entre los polarizadores o entre un polarizador y la fuente de fotones.

En este experimento se implementa por primera vez la idea de polarizadores variables. Acercándose a la propuesta original de Bell [Bel65], las orientaciones de los polarizadores son variadas entre dos alternativas, mientras los fotones están en vuelo⁸

En este experimento se usa la misma fuente de fotones que en el anterior y su planteo general también es similar, con la salvedad de que se usan dos switches acusto-ópticos para desviar los fotones por uno u otro polarizador. En la Fig. 4.4 se muestra un esquema de esta experiencia. Un fotón que va hacia la izquierda pasa por el analizador A orientado según \hat{a} o (excluyente)

⁸Lo cual tiende a excluir la posibilidad de que de algún modo la información sobre la orientación de los polarizadores pudiese estar contenida en la descripción de variables ocultas λ que los fotones llevan consigo al ser emitidos.

por el A' orientado según $\hat{\mathbf{a}}'$ dependiendo del estado del switch S1. Luego es detectado por uno de los tubos fotomultiplicadores D_1 o D'_1 ubicados detrás de cada analizador. Los fotones que van a la derecha siguen un camino análogo. Es importante destacar que se trata de un *esquema de detección de un canal*, con analizadores variables y no de dos canales. En el curso de cada experimento hay en juego 4 orientaciones, en vez de dos como en el caso de detección de dos canales con analizadores fijos.

Los interruptores S_1 y S_2 son moduladores acusto-ópticos y cambian de estado a intervalos de ~ 10 ns. La distancia fuente-detector es de $D = 6$ m, lo que corresponde a un tiempo de tránsito hasta el switch de $D/c = 20$ ns. Es decir que cada interruptor cambia un par de veces mientras los fotones están en vuelo. Ambos switches funcionan a frecuencias inconmensurables entre sí para evitar sincronías indeseables. Una cascada en la fuente dura unos 5 ns, (la vida media del estado intermedio de la cascada) de modo que no tiempo de que llegue la información de que orientación tendrán los polarizadores.

Parametrizando las orientaciones como se indica en la ec. (3.30), con $\phi = 22,5^\circ$, las tasas de coincidencia relativas que aparecen en la desigualdad CH72, ec. (3.28)

$$-1 \leq \tilde{R}(\hat{\mathbf{a}}, \hat{\mathbf{b}}) - \tilde{R}(\hat{\mathbf{a}}, \hat{\mathbf{b}}') + \tilde{R}(\hat{\mathbf{a}}', \hat{\mathbf{b}}) + \tilde{R}(\hat{\mathbf{a}}', \hat{\mathbf{b}}') - \tilde{R}_1(\hat{\mathbf{a}}') - \tilde{R}_2(\hat{\mathbf{b}}) \leq 0. \quad (4.3)$$

son medidas. Esto requiere cuatro corridas (lo cual lleva en total unas 3 horas):

- i) Se miden las cuatro tasas de coincidencia – en una única corrida – correspondientes a los dos juegos de orientaciones posibles, $N(\hat{\mathbf{a}}, \hat{\mathbf{b}})$, $N(\hat{\mathbf{a}}, \hat{\mathbf{b}}')$, $N(\hat{\mathbf{a}}', \hat{\mathbf{b}})$ y $N(\hat{\mathbf{a}}', \hat{\mathbf{b}}')$.
- ii) Para normalizar, se retiran ambos analizadores (manteniendo los switches) y se miden las cuatro tasas de coincidencia correspondientes, $N(\infty, \infty)$, $N(\infty, \infty')$, $N(\infty', \infty)$ y $N(\infty', \infty')$. Con lo cual se calculan las tasas relativas correspondientes $\tilde{R}(\hat{\mathbf{a}}, \hat{\mathbf{b}}) = N(\hat{\mathbf{a}}, \hat{\mathbf{b}})/N(\infty, \infty)$, etc.
- iii) Se hace una corrida con el analizador de Bob removido y el de Alice fijo, obteniendo el conteo $N(\hat{\mathbf{a}}', \infty)$ y la tasa relativa $\tilde{R}_1 = N(\hat{\mathbf{a}}', \infty)/N(\infty', \infty)$.

- iv) Se hace una corrida con el analizador de Alice removido y el de Bob fijo, obteniendo el conteo $N(\infty, \hat{\mathbf{b}})$ y la tasa relativa $\tilde{R}_2 = N(\infty, \hat{\mathbf{b}})/N(\infty, \infty)$.

Con estas tasas relativas se evalúa (4.3) y se obtiene

$$\Delta_{exp} = 0,101 \pm 0,020,$$

una violación de por 5 σ . Esta cantidad es consistente con la predicción cuántica (ec. (4.1), con las transmitancias medidas para los polarizadores) $\Delta_{QM} = 0,112$. Además se realizan comparaciones entre tasas de coincidencia para varias orientaciones relativas ϕ , encontrando un muy buen ajuste con la predicción cuántica en todos los casos.

Si bien este experimento se acerca mucho a satisfacer la hipótesis de localidad, los propios autores admiten que no lo hace completamente. La razón es que la variación de los switches se hace en forma determinista (incluso periódica) y no aleatoria como sería deseable. Un observador en la fuente con conocimiento de la fase inicial y la frecuencia del modulador de un switch puede predecir – al menos en principio – el estado futuro del switch.

4.2.2. Experiencia de Aspect de dos canales

En 1982 A. Aspect y su equipo realizan la primer experiencia con detección de dos canales [AGR82a]. El esquema general de la se muestra en la Fig. 4.5. La fuente de fotones utilizada es la misma cascada $0 \rightarrow 1 \rightarrow 0$ del Calcio, usada en las experiencias anteriores del grupo. La distancia entre los polarizadores también es la misma que en las otras experiencias ($L = 13$ m), lo cual garantiza una separación adecuada entre eventos de detección coincidente.

El esquema de detección usado es de dos canales. Se basa en el uso de cubos analizadores (PBS, Polarizing Beam Splitter). Estos cubos, formados por cristales con propiedades birrefringentes, transmiten la luz con componente de polarización paralela a su eje principal y desvían la componente de polarización ortogonal al mismo. De este modo, colocando tubos fotomultiplicadores detrás de las dos salidas del cubo, se consigue una medida real de la componente de polarización en la dirección del eje principal del cristal. Para fijar ideas, supongamos que es Alice quien mide. Una detección en $D1_{\parallel}$

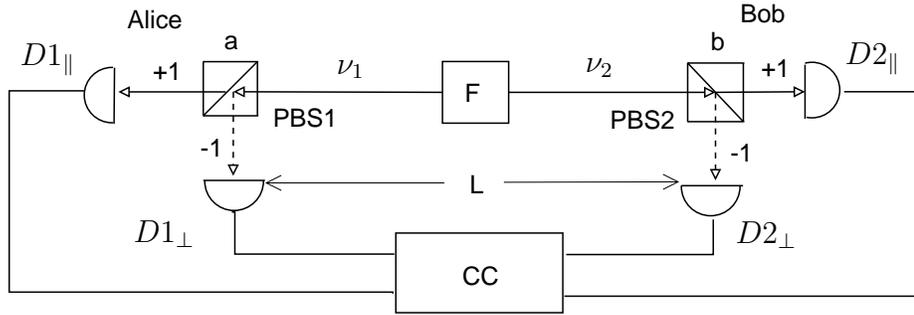


Figura 4.5: Esquema general de la experiencia [AGR82a], la primera con detección de dos canales. La fuente F emite un par de fotones correlacionados que viajan en direcciones opuestas. Los polarizadores (PBS) de dos canales separan los fotones de acuerdo a sus componentes ortogonales de polarización con respecto a su eje principal. Detrás de cada polarizador hay dos detectores, uno por cada componente de polarización. El contador de coincidencia CC opera con cuatro canales. La distancia entre ambos polarizadores es $L = 13$ m.

corresponde a un resultado $A = +1$ e indica que el fotón ha sido transmitido y por lo tanto su polarización es paralela al eje principal $\hat{\mathbf{a}}$ del polarizador. Por otra parte, una cuenta en $D1_{\perp}$ corresponde a $A = -1$ e indica que el fotón fue reflejado y por lo tanto su polarización resultó ser ortogonal a $\hat{\mathbf{a}}$. Este esquema es muy próximo a una medida de componente de spin con un aparato Stern-Gerlach (vea el Apéndice B), el contexto en el cual John Bell desarrolló sus desigualdades.

Esta experiencia apunta a comprobar la segunda desigualdad de Bell, ec. (3.13),

$$-2 \leq S = E(\hat{\mathbf{a}}, \hat{\mathbf{b}}) - E(\hat{\mathbf{a}}, \hat{\mathbf{b}}') + E(\hat{\mathbf{a}}', \hat{\mathbf{b}}) + E(\hat{\mathbf{a}}', \hat{\mathbf{b}}') \leq 2. \quad (4.4)$$

Como discutimos en la Sección 3.2, esta desigualdad debe ser satisfecha por todas las teorías realistas locales. No se asumen por lo tanto las hipótesis adicionales que están detrás de otras versiones de las desigualdades (en particular, "No enhancement" e invariancia rotacional). Para orientaciones dadas de los polarizadores, las correlaciones que aparecen en la desigualdad (4.4),

se relacionan con las probabilidades de detección conjunta,

$$E(\hat{\mathbf{a}}, \hat{\mathbf{b}}) = p_{12}^{++}(\hat{\mathbf{a}}, \hat{\mathbf{b}}) + p_{12}^{--}(\hat{\mathbf{a}}, \hat{\mathbf{b}}) - p_{12}^{+-}(\hat{\mathbf{a}}, \hat{\mathbf{b}}) - p_{12}^{-+}(\hat{\mathbf{a}}, \hat{\mathbf{b}}), \quad (4.5)$$

donde hemos usado la notación de la ec. (3.25) para las probabilidades conjuntas⁹. El dispositivo de la Fig. 4.4 acumula detecciones coincidentes para $A = \pm 1$ y $B = \pm 1$. Al cabo de una corrida, después de sustraer coincidencias accidentales, se obtienen las cuatro tasas de coincidencia $R^{++}(\hat{\mathbf{a}}, \hat{\mathbf{b}})$, $R^{+-}(\hat{\mathbf{a}}, \hat{\mathbf{b}})$, $R^{-+}(\hat{\mathbf{a}}, \hat{\mathbf{b}})$ y $R^{--}(\hat{\mathbf{a}}, \hat{\mathbf{b}})$. Normalizando por el número total de coincidencias observadas,

$$R_0 \equiv R^{++}(\hat{\mathbf{a}}, \hat{\mathbf{b}}) + R^{+-}(\hat{\mathbf{a}}, \hat{\mathbf{b}}) + R^{-+}(\hat{\mathbf{a}}, \hat{\mathbf{b}}) + R^{--}(\hat{\mathbf{a}}, \hat{\mathbf{b}}), \quad (4.6)$$

se obtienen las probabilidades de detección conjunta

$$p_{12}^{kl}(\hat{\mathbf{a}}, \hat{\mathbf{b}}) = \frac{R^{kl}(\hat{\mathbf{a}}, \hat{\mathbf{b}})}{R_0} \equiv \tilde{R}^{kl}(\hat{\mathbf{a}}, \hat{\mathbf{b}}) \quad \text{para } k, l = \pm. \quad (4.7)$$

De modo que la correlación en términos de las tasas obtenidas experimentalmente es

$$E_{exp}(\hat{\mathbf{a}}, \hat{\mathbf{b}}) = \tilde{R}^{++}(\hat{\mathbf{a}}, \hat{\mathbf{b}}) + \tilde{R}^{--}(\hat{\mathbf{a}}, \hat{\mathbf{b}}) - \tilde{R}^{+-}(\hat{\mathbf{a}}, \hat{\mathbf{b}}) - \tilde{R}^{-+}(\hat{\mathbf{a}}, \hat{\mathbf{b}}). \quad (4.8)$$

La identidad entre las tasas de detección conjunta y las probabilidades de detección conjunta, expresada en la ec. (4.7), implica suponer que el ensemble de pares detectados configura un muestreo equitativo de todos los pares generados por la fuente. Esta suposición, muy razonable por cierto, da lugar al “Fair Sampling loophole” que discutiremos en la siguiente sección.

Elijiendo cuatro orientaciones coplanares de acuerdo con la ec. (3.30) con $\phi = 22,5^\circ$ se realizan cuatro experimentos, correspondientes a las cuatro orientaciones relativas, de un par de minutos cada una. Repitiéndolas luego para tener una estadística, se obtienen las correlaciones $E(\hat{\mathbf{a}}, \hat{\mathbf{b}})$ y finalmente un estimativo experimental para el parámetro de Bell S ,

$$S_{exp} = 2,697 \pm 0,015$$

que viola la desigualdad (4.4) por mas de 40σ . La predicción cuántica para la correlación se obtiene a partir de una versión modificada de la ec. (B.10),

$$E_{MC}(\hat{\mathbf{a}}, \hat{\mathbf{b}}) = F \left(\frac{\epsilon_-^2}{\epsilon_+^2} \right) \cos(2\theta_{ab}) \quad (4.9)$$

⁹El primer superíndice corresponde al valor observado de A y el segundo al valor de B .

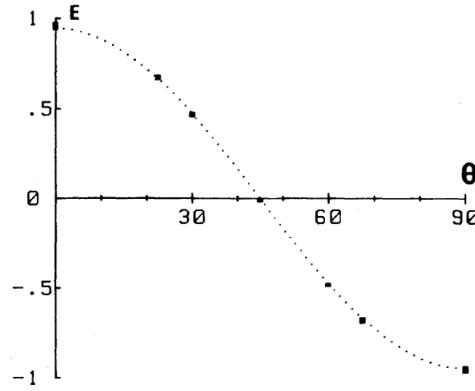


Figura 4.6: Correlación observada para varios valores de la orientación relativa de los polarímetros, $\theta = \text{acos}(\hat{\mathbf{a}} \cdot \hat{\mathbf{b}})$. Las incertezas indicadas corresponden a ± 2 desviaciones estándar. La curva punteada corresponde a la predicción cuántica, ec. (4.9).

donde θ_{ab} es la orientación relativa de los ejes de los polarímetros y $F = 0,984$ es una corrección por el ángulo sólido de detección finito. Las cantidades ϵ_{\pm} se relacionan con los coeficientes de transmisión T^{\parallel}, T^{\perp} (en las direcciones paralela y perpendicular al eje principal) de los polarizadores

$$\epsilon_{\pm}^2 \equiv (T_1^{\parallel} \pm T_1^{\perp})(T_2^{\parallel} \pm T_2^{\perp}).$$

Con esta expresión y los valores medidos $T_1^{\parallel} = 0,950$, $T_2^{\parallel} = 0,930$ y $T_1^{\perp} = T_2^{\perp} = 0,007$, se obtiene la predicción cuántica,

$$S_{MC} = 2,70 \pm 0,05$$

consistente con la medida anterior. Además se compara la correlación observada con la predicción cuántica para varias orientaciones relativas θ_{ab} , como se muestra en la Fig. 4.6, coincidiendo con la predicción cuántica con un error relativo menor a 1% [AGR82a].

Esta experiencia resultó ser la más precisa hasta el momento de su realización, prescindiendo además de las hipótesis adicionales asociadas a otras desigualdades de Bell. Tomadas en conjunto, las tres experiencias del grupo de Aspect representan un avance impresionante con respecto a la implementación práctica del Teorema de Bell y proporcionan evidencia muy fuerte en favor de la Mecánica Cuántica y en contra del realismo local. Sin embargo, como los propios autores hacen notar en sus conclusiones, persisten algunas

suposiciones (loopholes) a ser eliminadas: los mas importantes son el llamado “efficiency loophole” y el “Fair Sampling loophole”¹⁰. En la siguiente sección discutiremos estos problemas.

4.2.3. Loopholes

En el contexto de la comprobación experimental de las desigualdades de Bell, se denomina genéricamente “loophole” a problemas experimentales que pueden afectar la interpretación de los resultados de una o varias experiencias. Muchas de las experiencias recientes apuntan a cerrar uno o más de estos huecos, lo cual llevaría al descarte definitivo, aún por los más escépticos, de de las teorías locales realistas como alternativa a la Mecánica Cuántica.

Los siguientes son los loopholes que consideramos en éste trabajo:

1. Invariancia rotacional

La forma de Freedman de la desigualdad de Bell (Sección 3.3.2), usada en las experiencias de primera generación, asume una simetría de rotación con respecto al eje que une los polarizadores con la fuente de fotones. Pequeñas imperfecciones en la alineación del experimento pueden causar desvíos con respecto a la invariancia rotacional. Este loophole fue cerrado por las dos primeras experiencias del grupo de Aspect [AGR81, AGR82a] que observan violaciones de desigualdades de Bell que no asumen la invariancia rotacional.

2. No Enhancement

Las experiencias basadas en esquemas de detección de un canal (las de primera generación y la primera y tercera del grupo de Aspect) usan la versión de Clauser y Horne de la desigualdad de Bell (Sección 3.3) que se basa en la hipótesis de “No Enhancement” (Sección 3.3.2) según la cual, al retirar un polarizador del aparato no aumenta el número de detecciones observadas. La experiencia de dos canales de Aspect,

¹⁰Como hemos hecho hasta aquí, mantendremos las denominaciones en inglés en uso corriente en la literatura, evitando algunas traducciones algo forzadas.

[AGR82a], cierra este loophole verificando directamente la segunda desigualdad de Bell.

3. Localidad (Lightcone loophole)

En el experimento de polarización de fotones propuesto por Bohm y Aharonov para testear la paradoja EPR [BA57], se enfatizaba que la elección de la dirección de medida debía ser tomada al azar, una vez que las partículas estaban creadas y en vuelo. Con esto se aseguraba que no podía haber comunicación física entre los aparatos de medida de Alice y de Bob. Mas tarde, John Bell, al derivar la primer versión de su desigualdad [Bel65], reiteró la importancia de la separación de tipo espacial entre los observadores, para excluir una relación causal entre ambas medidas. Todas las experiencias con analizadores fijos sufren de este problema, ya que existe la posibilidad de que la orientación del analizador de Alice sea comunicada de algún modo al analizador de Bob o a la fuente. El primer intento por acercarse a la propuesta original de Bohm y Aharonov fue realizado en la tercer experiencia de Aspect [AGR82b], que usa analizadores cuya orientación varía en el tiempo de vuelo de los fotones.

Para cerrar este loophole hace falta cumplir con dos requerimientos:

- i) Los dos eventos de medida (Alice y Bob) deben tener separación de tipo espacial, en sentido relativista¹¹.
- ii) La elección de las orientaciones de los analizadores debe ser hecha al azar (mientras las partículas están en vuelo) y éstos eventos deben tener separación espacial.

El primer requerimiento evita la conexión causal entre las medidas de Alice y Bob (la medida de uno de ellos queda fuera del “cono de luz” del otro). El segundo requerimiento evita que se puedan establecer correlaciones en las orientaciones de los analizadores mediante alguna comuni-

¹¹Dos eventos en el espacio de Minkowsky, $\mathcal{R}_1 = (ct_1, \vec{r}_1)$ y $\mathcal{R}_2 = (ct_2, \vec{r}_2)$, tienen una separación $(\Delta s)^2 \equiv c(t_2 - t_1)^2 - (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)^2$. Los eventos con $(\Delta s)^2 \geq 0$ tienen separación temporal (o lumínica) y pueden estar causalmente conectados. Los eventos con $(\Delta s)^2 < 0$ tienen separación espacial y no admiten una relación causal entre si.

cación (sublumínica) entre ambos analizadores. Al estar las partículas ya en vuelo al elegir la orientación de los analizadores, se evita que esta información pueda de lagunar manera llegar a la la fuente y quedar incorporada a la descripción de variable oculta que cada fotón llevaría consigo al ser creado.

La experiencia [AGR82b] cumple el primer requisito, pero no el segundo ya que la orientación de los analizadores es variada periódicamente¹². De modo que esta experiencia no cierra completamente este problema. Fue necesario esperar a una experiencia de tercera generación, realizada en 1998 en Innsbruck [WJWZ98], sobre una distancia de 400 m, para cerrarlo definitivamente. Discutiremos en detalle esta experiencia en la Sección 4.3.1.

4. Eficiencia de detección (Fair Sampling)

Debido a limitaciones en la eficiencia de los detectores de fotones, solo una pequeña fracción de los pares emitidos es detectada. Por ejemplo, en [AGR81] se reporta que la tasa típica de decaimiento de la fuente de fotones es de $40 \times 10^6 \text{ s}^{-1}$. Por otra parte la tasa de detecciones coincidentes “verdaderas” es de $\sim 150 \text{ s}^{-1}$, con lo cual sólo cuatro de cada millón de pares emitidos es detectado.

Para vincular las tasas observadas con las probabilidades conjuntas de detección es necesario asumir que

la fracción de coincidencias detectada es una muestra representativa (es decir, no sesgada) del total de pares emitidos por la fuente.

Esta suposición, conocida como “Fair Sampling”, esta detrás de todas las experiencias tipo EPR realizadas en base a detección de fotones (es decir, la inmensa mayoría). Si bien los experimentalistas toman todas las precauciones para que esta resulte una hipótesis razonable, el hecho es que las conclusiones terminan basándose en una estadística realizada con una pequeña fracción de los pares generados.

¹²El tiempo disponible para la acción de cada interruptor y la electrónica disponible en la época, no permitieron variar la orientación en forma aleatoria de acuerdo a la prescripción original.

Desde el punto de vista lógico, se puede pensar que si esta es, por alguna razón, una muestra sesgada del total de pares emitidos, cuando todos los pares son tenidos en cuenta en el cálculo de correlaciones bien podría ocurrir que las mismas satisfagan la desigualdad de Bell.

Existen dos enfoques para atacar este problema. Uno de ellos consiste en intentar mejorar la eficiencia de detección de fotones hasta que la fracción de pares detectados sea incuestionablemente representativa¹³ del total [Asp99]. Este enfoque no ha producido resultados concluyentes hasta el momento. El otro enfoque consiste en usar partículas materiales en estados enredados, de acuerdo a la propuesta original de Bohm, ya que es posible alcanzar eficiencias de detección altas con partículas masivas. Recientemente se ha realizado una experiencia de este tipo usando iones de Berilio [RKM⁺01], que prescinde de la hipótesis de Fair Sampling para interpretar sus resultados (claramente consistentes con la Mecánica Cuántica). Esta experiencia, la primera en resolver el problema de la eficiencia de detección [Gra01], será discutida en detalle en la siguiente sección.

Las experiencias de Aspect et al. han recibido alguna crítica debido a la alta tasa de coincidencias accidentales¹⁴ observadas (de acuerdo a los resultados publicados, entre 25 % y 45 % del total de coincidencias, dependiendo de la experiencia y de la orientación de los polarizadores, son accidentales). En lo que es una práctica experimental estándar, las experiencias de detección de coincidencias prevén un mecanismo para determinar el número de coincidencias accidentales en paralelo con el número total de coincidencias y las coincidencias verdaderas se determinan por sustracción. Existen varios experimentos de tercera generación que reportan violación de la desigualdad

¹³Bajo ciertas suposiciones, se puede ver que se requiere $\eta \gtrsim 0,85$ para poder descartar la suposición de Fair Sampling [GM87].

¹⁴Cuando se cuentan detecciones coincidentes es necesario separar las coincidencias “verdaderas” de las coincidencias “accidentales”. Las coincidencias verdaderas son aquellas debidas a fotones provenientes del mismo átomo y que tienen sus polarizaciones correlacionadas. Las coincidencias accidentales se deben a fotones de cualquier otro origen, cuyas polarizaciones no están correlacionadas. Si no fueran descontadas, esto afecta la correlación observada.

de Bell por decenas de desviaciones estándar *aún antes* de corregir los datos por las detecciones accidentales [TBZG98, TBG⁺98, WJWZ98], por lo que en este trabajo optamos por no incluir este problema en la lista de loopholes.

4.3. Experiencias de 3^{ra} generación

Las fuentes de fotones correlacionados basadas en decaimiento en cascada tienen limitaciones principalmente asociadas al hecho de que, si bien los fotones emergentes tienen la misma polarización, no están bien correlacionados en su dirección de propagación. Si los fotones captados por la óptica se alejaran entre sí a lo largo de la misma dirección, sus polarizaciones estarían perfectamente correlacionadas. En realidad, se alejan en direcciones diferentes incluidas en el ángulo sólido Ω subtendido por la óptica de detección, que en general es pequeño comparado con 4π . La probabilidad de observar al segundo fotón de un par proveniente de la misma cascada es del orden de $\Omega/4\pi \ll 1$, por lo que la fracción de pares detectados es menor en este factor con respecto a los pares generados. En otras palabras, los decaimientos en cascada resultan en baja intensidad de pares aprovechables y requieren tiempos de conteo relativamente largos.

A partir de 1988 se realizan las primeras experiencias [OM88, SA88, KWW⁺99] que observan violaciones de las desigualdades de Bell usando pares de fotones generados en procesos de conversión paramétrica (PDC, Parametric Down Conversion). A lo largo de la década siguiente, la PDC de tipo II (vea el Apéndice D) se convierte en la fuente de fotones correlacionados más utilizada para generar pares de fotones enredados, debido a su alta estabilidad y relativa simplicidad. Además de hacer posible una nueva generación de experiencias EPR, esta fuente de fotones son de interés para comunicaciones ópticas y para el campo emergente del procesamiento cuántico de la información. Procesos como el codificado denso, la teleportación y la criptografía cuántica dependen de un suministro estable de pares de fotones enredados de alta calidad.

4.3.1. Experiencia de Innsbruck (1998)

Esta experiencia [WJWZ98] fue específicamente diseñada para cerrar el Loophole de localidad. En la Sección 4.2.3 mencionamos que para cerrar este loophole son necesarias dos condiciones:

- i) los dos eventos de medida (Alice y Bob) deben tener separación de tipo espacial.
- ii) la elección de las orientaciones de los analizadores debe ser hecha al azar (mientras las partículas están en vuelo) y los eventos deben tener separación espacial.

La única experiencia previa que intentó cerrar este loophole fue [AGR82b], donde los analizadores son orientados con los fotones en vuelo, tienen separación espacial y los eventos de medida en A y B también tienen separación espacial. Sin embargo, la dirección de cada analizador se cambia en forma determinista y periódica, lo cual no satisface¹⁵ el ítem (ii). La limitación de Aspect et al. fue debida a la corta distancia $D = 6,5$ m que separaba los analizadores de la fuente. Esto le dejaba un tiempo corto, $D/c = 43$ ns, para elegir la orientación del analizador con el par de fotones en vuelo. Con la tecnología de la época, no fue posible encontrar un dispositivo aleatorio que operase en un tiempo $\ll 40$ ns.

El experimento de Weihs et al. [WJWZ98] es una realización actualizada de [AGR82b], donde la separación (400 m) entre las estaciones de medida permite que las orientaciones de los analizadores se elijan en forma *verdaderamente aleatoria* mientras los fotones están en vuelo. Además se usa un esquema de detección de dos canales (vea el esquema de la Fig. 4.7), lo cual permite testear directamente la segunda desigualdad de Bell, ec. (3.13). Otra mejora importante es que se usan pares de fotones enredados generados por PDC-II y los tiempos de conteo son de pocos segundos.

En la siguiente descripción nos referimos a la Fig. 4.7. Los fotones, creados por conversión paramétrica degenerada de tipo II, están enredados y

¹⁵Si Alice conoce la fase y la frecuencia de cambio de Bob en $t = 0$, puede determinar la orientación del analizador B en cualquier instante posterior $t > 0$.

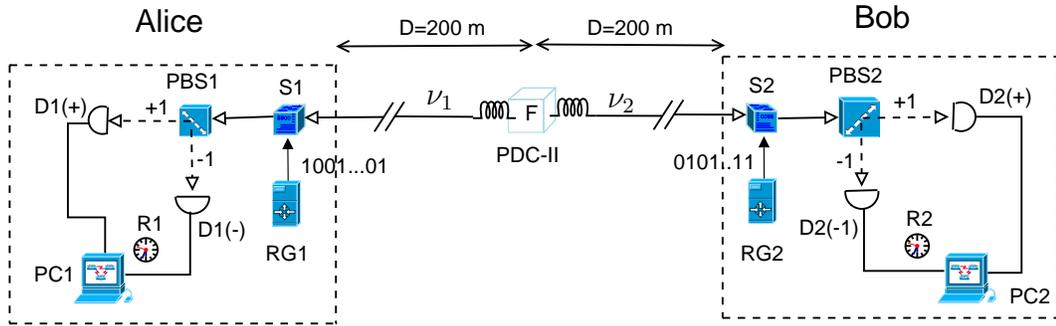


Figura 4.7: Esquema de la experiencia de Innsbruck. Los fotones, generados con polarizaciones ortogonales por PDC-II, son ingresados a fibras ópticas y enviados a estaciones de medida remotas A y B. El generador aleatorio RG1 alimenta el switch S1 con una secuencia de pulsos binarios. Con “1” S1 rota la polarización del fotón ν_1 en 45° y con “0” no la modifica. El fotón luego incide en el PBS1 (Polarizing Beam Splitter) de orientación fija, $\hat{\mathbf{a}}$, y es desviado de acuerdo a su componente de polarización +1 o -1 y detectado por uno de los detectores D1+ y D1-. El esquema es equivalente a orientar los PBS aleatoriamente en direcciones $\hat{\mathbf{a}}, \hat{\mathbf{a}}'$ que forman 45° entre si. El fotón ν_2 recorre un camino análogo hacia los detectores de Bob. Los datos de cada medida ± 1 se almacenan localmente, junto con una etiqueta temporal de relojes atómicos R, sincronizados al comienzo de la experiencia. Los datos se procesan *a posteriori*, como se explica en el texto.

anticorrelacionados en polarización. Se elige la fase relativa del estado singlete, ec. (A.13). Una característica muy conveniente de la PDC-II es que los fotones (ν_1 y ν_1) salen en dos haces finos (con polarizaciones ortogonales) que avanzan en diferentes direcciones (vea el Apéndice D), lo cual permite acoplarlos a dos fibras ópticas. La primer mitad de cada fibra óptica esta enrollada en la vecindad de la fuente donde los fotones son “demorados” en los espirales (vea la Fig. 4.8). Luego viajan a través de una distancia de 200 m a las estaciones de medida de Alice y Bob¹⁶. Cada estación de medida incluye: un generador aleatorio (RG) que describimos mas adelante, un switch S capaz de rotar la polarización del fotón en 45° o no, condicionalmente al valor del bit aleatorio que recibe de RG, un PBS (Polarizing Beam Splitter, separador de haz por polarización), dos detectores D(\pm) de fotones, un reloj atómico y un PC (que no esta en red) para registro local de los datos.

¹⁶La experiencia se realizó enteramente en el Campus de Ciencias de la Universidad de Innsbruck.

#	tiempo	medida	orientación
1	$t_A^{(1)}$	+	0
2	$t_A^{(2)}$	-	0
3	$t_A^{(3)}$	-	1
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
N_A	$t_A^{(N_A)}$	+	0

Cuadro 4.3: Aspecto de los registros locales de Alice. Las cantidades $t_A^{(i)}$ para $i = 1, 2, \dots, N_A$ indican los tiempos en que ocurrieron las medidas. En la última columna, 0 corresponde a una orientación efectiva $\hat{\mathbf{a}}$ del analizador y 1 a la orientación alternativa, $\hat{\mathbf{a}}'$.

El fotón ingresa al switch S y su polarización es rotada (o no) dependiendo del estado del RG (1 rota, 0 no rota). Luego el fotón incide en el PBS. El pasaje por el PBS equivale a una medida de la componente de polarización en la dirección de su eje principal. Si el resultado de la medida es -1 , el fotón es reflejado hacia el detector D(-). Nos referimos a todo este proceso, desde que el fotón ingresa al switch, incluyendo la generación de bits aleatorios, hasta que es detectado, como “la medida” de Alice o de Bob. El dato, correspondiente a la medida, \pm , se almacena en la PC junto con la orientación efectiva usada en la medida¹⁷ y la etiqueta temporal del evento con precisión de $\pm 0,5$ ns, según indica el reloj atómico R¹⁸. En el cuadro 4.3.1 mostramos el aspecto que tendría un conjunto típico de datos almacenado en la PC de Alice. La tercer y cuarta columnas del cuadro son secuencias completamente aleatorias con contenido nulo de información. Al finalizar la recolección (lo cual insume en total unos 10 segundos), los datos se trasladan a un PC central y se procesan para determinar la cantidad de eventos coincidentes. Dos eventos se consideran coincidentes si $|t_A - t_B| \leq \tau_c$, donde τ_c es la ventana de coincidencia. En este experimento se usa $\tau_c = 6$ ns. El resultado de éste

¹⁷Por ejemplo para Alice $0 \rightarrow \hat{\mathbf{a}}$ y $1 \rightarrow \hat{\mathbf{a}}'$, donde $(\hat{\mathbf{a}}, \hat{\mathbf{a}}')$ forman 45° entre sí.

¹⁸Los relojes son sincronizados antes de comenzar el experimento.

proceso son las coincidencias acumuladas

$$N_c^{++}(\hat{\mathbf{a}}, \hat{\mathbf{b}}), \quad N_c^{--}(\hat{\mathbf{a}}, \hat{\mathbf{b}}) \quad N_c^{+-}(\hat{\mathbf{a}}, \hat{\mathbf{b}}) \quad N_c^{-+}(\hat{\mathbf{a}}, \hat{\mathbf{b}}).$$

Como hay 4 combinaciones posibles de orientaciones (efectivas) de los polarizadores, resultan 16 coincidencias acumuladas. Dividendo las mismas por la duración ΔT del experimento, se obtienen las respectivas tasas de coincidencia.

La segunda desigualdad de Bell, ec. 3.13,

$$-2 \leq S \equiv E(\hat{\mathbf{a}}, \hat{\mathbf{b}}) - E(\hat{\mathbf{a}}, \hat{\mathbf{b}}') + E(\hat{\mathbf{a}}', \hat{\mathbf{b}}) + E(\hat{\mathbf{a}}', \hat{\mathbf{b}}') \leq 2 \quad (4.10)$$

requiere la determinación de 4 correlaciones diferentes. Como es usual, se usan los ángulos de Bell, (ecs. (3.30) con $\phi = 22,5^\circ$), para los cuales $S_{MC} = 2\sqrt{2}$ y se espera la máxima violación de la desigualdad de Bell. Las correlaciones $E(\hat{\mathbf{a}}, \hat{\mathbf{b}})$ correspondientes a las cuatro combinaciones posibles de orientaciones de los analizadores, se calculan en términos de las tasas relativas de coincidencias, usando las ecs. (4.6) y (4.8). Esto implica suponer que los eventos detectados (del orden de 5% del total emitido, en este caso) son una muestra *no sesgada* del total de pares emitidos (Fair Sampling), lo cual hace la experiencia susceptible al loophole # 5, como admiten Weihs et al. El resultado (obtenido a partir de un total de $N_c = 14700$ eventos coincidentes registrados en 10 s) es

$$S_{exp} = 2,73 \pm 0,02$$

lo cual implica una violación de la desigualdad (4.10) por 30σ .

Lo que hace a esta experiencia muy especial es haber logrado las dos condiciones de separación espacial requeridas para descartar la posibilidad del loophole # 4 (Localidad). En la Fig. 4.8 se muestra un diagrama de espacio-tiempo (diagrama de Minkowski) para el experimento. La condición (i) es casi automática, ya que ambos eventos de detección (Y, Z) son simultáneos (± 6 ns) y hay una distancia importante entre ellos. Para ver la restricción que impone la condición (ii), consideramos que en algún tiempo, $t < 0$, se emite un par de fotones que permanecen “demorados” en las espiras de la fibra óptica (lo que se representa en el diagrama por el cilindro vertical centrado

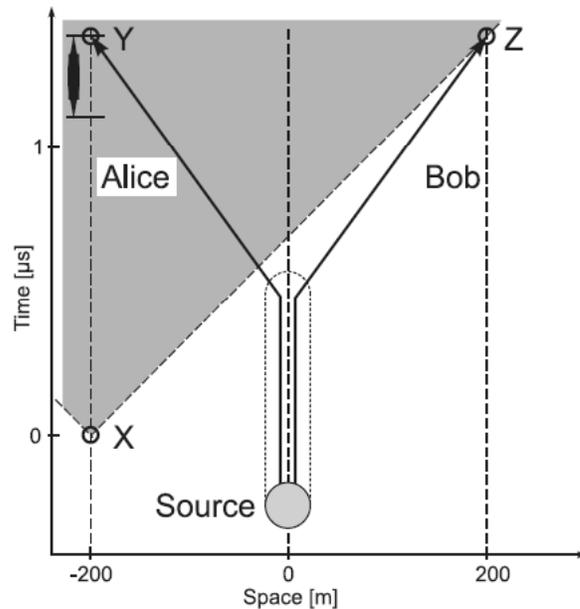


Figura 4.8: Diagrama de Minkowski para la experiencia de Innsbruck. X indica el vértice del cono de luz de Alice (zona sombreada) en $t = 0$, cuando el par de fotones aún circula por las espiras de fibra óptica en la vecindad de la fuente. Y (Z) indica la detección de un fotón del par por Alice (Bob). La franja vertical indica el tiempo de 100 ns requerido por todo el proceso de medida (seteo aleatorio del analizador+pasaje por polarizador+detección), que es una fracción del tiempo disponible. Figura tomada de [WJWZ98].

	Aspect et al. (1982)	Weih's et al. (1998)
fuelle de fotones	cascada 0 – 1 – 0, ⁴⁰ Ca	PDC-II
analizador-detector	1 canal	2 canales
desigualdad usada	CH72, ec. 3.31	Bell2, ec. 3.13
tiempo de recolección (s)	4000 + 4000 + 4000 (*)	5
τ_c (ns)	18	6
D (m)	6.5	200
L/c (ns)	43	1300
switching time (ns)	~ 10	~ 100
método switch	modulador acusto-óptico	modulador electro-óptico
fuelle aleatoria	frecuencias inconmensurables (determinista, cuasi-periódico)	generador aleatorio (50-50 Beam Splitter)
violación observada	5σ	30σ
Loopholes	3?,4	4

Cuadro 4.4: Comparación de algunos parámetros de las experiencias con analizadores variables de Aspect et al. [AGR82b] y de Weih's et al. [WJWZ98]. τ_c es la ventana de coincidencia, D la distancia fuente-analizador y $L = 2D$ la distancia entre Alice y Bob. Los loopholes se identifican en la Sección 4.2.3.

(*) Para cada orientación de los analizadores, con detección de un canal se requieren tres medidas para determinar además de la tasa relativa de coincidencia, las tasas relativas \tilde{R}_1, \tilde{R}_2 con uno u otro de los analizadores removidos.

en $x = 0$). Luego avanzan por la fibra óptica a velocidad sublumínica hasta las estaciones de detección de Alice $x = -200$ m y Bob $x = 200$ m. En cierto momento posterior a la emisión del par, indicado $t = 0$, Alice puede comenzar a preparar su aparato (evento X). Si la preparación fuese instantánea y Alice le avisa a Bob de su opción con una señal luminosa, la misma llegaría en un tiempo $2D/c = 1300$ ns, al mismo tiempo que el detecta el fotón enredado (evento Z). Esta condición fija al evento X en el diagrama. El cono de luz de este evento (región sombreada) representa eventos en el futuro de X. Alice detecta “su” fotón (evento Y) al mismo tiempo que Bob por simetría. Para satisfacer ambas restricciones de localidad, basta con que todo el proceso de medida (incluyendo la elección al azar de la dirección) de Alice tenga una duración $\Delta t < 1,3 \mu s$. En la experiencia, se determinó que la medida completa (incluyendo la selección al azar de la orientación) insume menos de 100 ns (indicado por la barrita oscura en $x = -200$ m), un orden de magnitud menor que el tiempo disponible.

La experiencia de Weihs et al. es, hasta el momento de redactar este trabajo, la que ha cerrado el loophole de Localidad en la forma mas cuidadosa. Con respecto a la distancia entre las estaciones de medida, esta experiencia fue una de las primeras en usar separaciones considerables.

4.3.2. Experiencia del NIST (2001)

Después del éxito de la experiencia de Innsbruck, el único loophole que nunca había sido cerrado era el referido al problema de la eficiencia de detección que genera la necesidad de asumir que el pequeño ensemble de pares detectados es una muestra no sesgada del total de pares emitidos por la fuente (hipótesis de Fair Sampling). Este problema afecta a todas las experiencias basadas en pares de fotones, sin excepción.

En el año 2001 se realizó una experiencia con características radicalmente diferentes¹⁹ en la trampa de iones del National Institute of Standards (NIST) en Boulder, USA. Esta experiencia [RKM⁺01] fue diseñada para evitar la

¹⁹El interés fundamental del grupo de Boulder, liderado por D. Wineland, es el desarrollo de técnicas de confinamiento y manipulación de iones, que sean escalables y puedan resultar la base de una futura computadora cuántica. La experiencia que discutimos aquí se puede considerar un subproducto de éste proyecto.

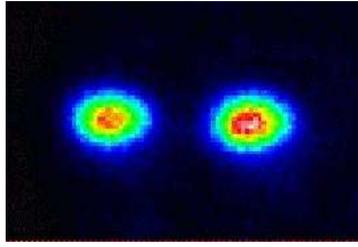


Figura 4.9: Dos iones de ${}^9\text{Be}^+$ observados en estados “brillantes”. Los iones están espacialmente bien localizados: la separación media entre los iones $\sim 3\mu\text{m}$ es mas de 100 veces el ancho característico de su paquete de ondas. Trampa de iones del NIST (<http://tf.nist.gov/ion/qucomp/intro.htm>)

necesidad de la hipótesis de Fair Sampling. El único antecedente previo de testeo de desigualdad de Bell usando partículas masivas es el experimento con pares de protones realizado en 1976 por Laméhi [LRM76], ya mencionado al comienzo de éste capítulo.

El experimento de Rowe et al. comienza preparando dos iones de Berilio, ${}^9\text{Be}^+$, en el estado maximamente enredado

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\uparrow\rangle - |\downarrow\downarrow\rangle). \quad (4.11)$$

Esta preparación se realiza usando una técnica óptica [Bla00] desarrollada poco antes por el mismo grupo [SKK⁺00]. Los iones se pueden considerar, a efectos de este experimento, como sistemas de dos estados que se indican $|\uparrow\rangle$ $|\downarrow\rangle$. Sobre el estado $|\Psi\rangle$ de dos partículas, se manipula ópticamente cada ion usando dos parámetros angulares (ϕ_1, ϕ_2) (vinculados a las fases de luz láser en la ubicación de cada ion) controlados experimentalmente. En este proceso el estado de dos partículas se transforma $|\Psi\rangle \rightarrow |\Psi'(\phi_1, \phi_2)\rangle$. Finalmente, se mide el estado de cada ion, usando técnicas ópticas²⁰.

²⁰Al ser iluminados los iones por un láser “de detección”, el estado $|\downarrow\rangle$, dispersa muchos fotones (unos 60 aproximadamente) en tanto que el estado $|\uparrow\rangle$ dispersa muy pocos. Se denomina “estado brillante” a $|\downarrow\rangle$ y estado oscuro a $|\uparrow\rangle$. Cuando dos iones son iluminados de esta manera, se observan del orden de ~ 120 fotones, correspondiendo a ambos iones en estados brillantes ($|\downarrow\downarrow\rangle$); ~ 60 fotones correspondiendo a uno de los iones en estado brillante ($|\uparrow\downarrow\rangle$ o bien $|\downarrow\uparrow\rangle$) o muy pocos fotones, cuando ambos iones están en el estado oscuro ($|\uparrow\uparrow\rangle$).

El procedimiento anterior (Preparación → Manipulación → Detección) se repite N_{tot} veces y se lleva la cuenta del número de veces que la medida resulta en (i) ambos iones están en estados brillantes, N_2 , (ii) un ion está en estado brillante, N_1 y (iii) ambos iones están en estado oscuro, N_0 . Para obtener el parámetro de Bell experimentalmente, no es necesario discriminar entre los dos casos posibles con uno de los iones en estado brillante. La medida es *completa* ya que todos los experimentos son tenidos en cuenta,

$$N_T = N_0 + N_1 + N_2.$$

Esto hace que se pueda obtener las probabilidades de que ambos iones estén en el mismo estado, p_{igual} , o en estados diferentes, p_{dif} ,

$$p_{igual} = \frac{N_0 + N_2}{N_T}, \quad p_{dif} = \frac{N_1}{N_T}, \quad (4.12)$$

al cabo de una serie de N_{tot} ciclos de Preparación → Manipulación → Detección. No es necesario invocar la hipótesis de Fair Sampling, porque *todos* los pares enredados están siendo detectados²¹.

Predicción Cuántica

En esta experiencia se usa la segunda desigualdad de Bell, ec. (3.13). El parámetro de Bell, S , se calcula a partir de las correlaciones para varios valores de los parámetros en la forma usual,

$$S = E(a, b) - E(a, b') + E(a', b) + E(a', b') \quad (4.13)$$

donde la correlación para un par de valores concretos de los parámetros es

$$E_{MC}(\phi_1, \phi_2) = \langle \Psi' | \hat{N}_{igual} - \hat{N}_{dif} | \Psi' \rangle. \quad (4.14)$$

Los proyectores que aparecen en esta expresión son

$$\hat{N}_{igual} = | \uparrow \uparrow \rangle \langle \uparrow \uparrow | + | \downarrow \downarrow \rangle \langle \downarrow \downarrow |, \quad (4.15)$$

$$\hat{N}_{dif} = | \uparrow \downarrow \rangle \langle \uparrow \downarrow | + | \downarrow \uparrow \rangle \langle \downarrow \uparrow |, \quad (4.16)$$

²¹Aunque los autores estiman que existen un 2% de detecciones erróneas por estados brillantes que pasan a ser oscuros debido a efectos ópticos inevitables, lo que es un problema de precisión, no de eficiencia de detección. Pese a este error sistemático se viola la desigualdad de Bell.

	ϕ_1	ϕ_2	$\phi_s = \phi_1 + \phi_2$	$E_{MC}(\phi_1, \phi_2)$	$E_{exp}(\phi_1, \phi_2)$
a, b	$3\pi/8$	$-\pi/8$	$\pi/4$	$1/\sqrt{2}$	0,557
a, b'	$3\pi/8$	$3\pi/8$	$3\pi/4$	$-1/\sqrt{2}$	-0,556
a', b	$-\pi/8$	$-\pi/8$	$-\pi/4$	$1/\sqrt{2}$	0,557
a', b'	$-\pi/8$	$3\pi/8$	$\pi/4$	$1/\sqrt{2}$	0,580

Cuadro 4.5: Elección de parámetros en la experiencia de Rowe et al. [RKM⁺01]. Con esta elección, la predicción cuántica para el parámetro de Bell es $S_{MC} = 2\sqrt{2}$, como se muestra en el texto. En la última columna se muestran los valores medidos (con desviación estándar $\pm 0,006$).

donde \hat{N}_{igual} proyecta en estados del mismo tipo y \hat{N}_{dif} en estados diferentes. El estado de dos partículas $|\Psi'\rangle$ con respecto al cual se calcula el valor esperado, es el resultado de la manipulación con parámetros (ϕ_1, ϕ_2) del estado inicial $|\Psi\rangle$. En [RKM⁺01] se indica que el resultado de la manipulación *sobre cada ion* es colocarlo en una superposición de ambos estados con una fase relativa que depende de ϕ_j , para $j = 1, 2$. Específicamente, para cada ion

$$|\uparrow_j\rangle \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow_j\rangle - ie^{-i\phi_j} |\downarrow_j\rangle) \quad (4.17)$$

$$|\downarrow_j\rangle \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} (|\downarrow_j\rangle - ie^{i\phi_j} |\uparrow_j\rangle). \quad (4.18)$$

Como resultado de la manipulación, el estado inicial de dos partículas se transforma en

$$|\Psi\rangle \rightarrow |\Psi'\rangle = \frac{1}{2\sqrt{2}} \left\{ (1 + e^{i\phi_s}) |\uparrow\uparrow\rangle - (1 + e^{-i\phi_s}) |\downarrow\downarrow\rangle + i(e^{i\phi_1} - e^{-i\phi_2}) |\uparrow\downarrow\rangle + i(e^{i\phi_2} - e^{-i\phi_1}) |\downarrow\uparrow\rangle \right\}, \quad (4.19)$$

donde $\phi_s \equiv \phi_1 + \phi_2$ es la suma de los parámetros aplicados. Los valores esperados necesarios para el cálculo de la correlación (4.14) son

$$\begin{aligned} \langle \Psi' | N_{igual} | \Psi' \rangle &= \frac{1}{2} (1 + \cos \phi_s), \\ \langle \Psi' | N_{dif} | \Psi' \rangle &= \frac{1}{2} (1 - \cos \phi_s). \end{aligned} \quad (4.20)$$

Por lo que la predicción cuántica para la correlación (4.14) se evalúa simplemente a

$$E_{MC} = \cos(\phi_1 + \phi_2). \quad (4.21)$$

Durante la etapa de manipulación se aplica luz láser a los iones. Los parámetros $\phi_{1,2}$ están asociados a la fase de esta luz en la posición de cada ion. Los dos pares de valores elegidos para estos parámetros son, en la notación usual de las experiencias EPR,

$$a = 3\pi/8, \quad b = -\pi/8, \quad a' = -\pi/8, \quad b' = 3\pi/8 \quad (4.22)$$

donde los dos primeros (a, b) son dos valores alternativos de la fase ϕ_1 y los dos últimos (a', b') son dos valores alternativos de la fase ϕ_1 . Con esta elección, resulta (vea el cuadro)

$$S_{MC} = E(a, b) - E(a, b') + E(a', b) + E(a', b') = 2\sqrt{2} > 2, \quad (4.23)$$

es decir, una violación máxima de la desigualdad de Bell.

Resultados experimentales

Los resultados experimentales acumulados luego de 20000 iteraciones con el estado inicial (4.11) se muestran en la Fig. 4.10. Para un conjunto dado de parámetros, partir de los eventos con cero $N_0 = 2200$, uno $N_1 = 15500$ o dos $N_2 = 2300$ estados brillantes, se obtiene la correlación

$$E(\phi_1, \phi_2) = \frac{N_{same} - N_{dif}}{N_T} = \frac{N_0 + N_2 - N_1}{N_0 + N_2 + N_1}. \quad (4.24)$$

Los valores de correlación medidos para cuatro conjunto de parámetros se indican en la última columna del Cuadro 4.6. Combinando estos valores de acuerdo a (), se obtiene la estimación experimental del parámetro de Bell

$$S_{exp} = 2,25 \pm 0,03 \quad (4.25)$$

que viola la desigualdad de Bell en más de 8 desviaciones estándar.

Como los propios autores hacen notar, esta experiencia usando correlaciones entre los grados de libertad internos de dos iones de Berilio, es completamente análoga a una experiencia con partículas de spin 1/2 y detectores

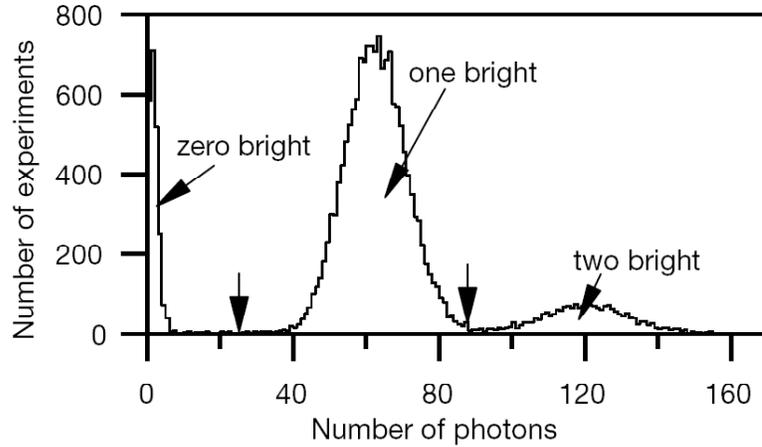


Figura 4.10: Distribución de resultados de la experiencia de Rowe et al. después de 20000 repeticiones que insumieron un total de 4 minutos. El área bajo las distribuciones corresponde a $N_0 = 2200$, $N_1 = 15500$ y $N_2 = 2300$. Las flechas verticales indican donde se separan las distribuciones. Figura tomada de [RKM⁺01]

tipo Stern-Gerlach o a una experiencia con fotones correlacionados con detección de dos canales. Si bien este experimento ha cerrado el loophole de detección (y es la única que puede afirmar esto), el loophole de localidad está abierto, como reconocen los propios autores [RKM⁺01]. No hay variación aleatoria y con separación espacial de los parámetros (ϕ_1, ϕ_2) . Los eventos de medida tampoco están separados espacialmente. Los iones en la trampa tienen una separación de $3\mu\text{m}$ e interactúan fuertemente debido a su carga eléctrica, aunque, según los autores del experimento, esta interacción no afecta a los estados internos de los iones ni a las correlaciones observadas. Una experiencia similar, en la cual los iones tengan una apreciable separación espacial y en la cual las fases (ϕ_1, ϕ_2) se seleccionen al azar podría llegar a cerrar ambos loopholes simultáneamente. Hay propuestas recientes en este sentido [SI03].

Ref.	Lugar	Fuente	Desig.	Mag.	Loophole			
					1	2	3	4
[FC72]	Berkeley	CAS Ca	F72	6σ	X	X	X	X
[AGR81]	Orsay	CAS ⁴⁰ Ca	F72,CH74	$9\sigma, 14\sigma$		X	X	X
[AGR82b]	Orsay	CAS ⁴⁰ Ca	CH74	5σ			x?	X
[AGR82a]	Orsay	CAS ⁴⁰ Ca	Bell2	40σ			X	X
[WJWZ98]	Innsbruck	PDC-II	Bell2	30σ				X
[RKM ⁺ 01]	NIST	iones Be ⁺	Bell2	8σ			X	

Cuadro 4.6: Experiencias principales realizadas para observar violaciones a las desigualdades de Bell. Bajo “fuente” indicamos el origen del par correlacionado: CAS es decaimiento en cascada, PDC indica Parametric Down Conversion. La columna “desig.” indica la desigualdad de Bell testada: F72 (Freedman, ec. (3.38), CH74 (Clauser y Horne, ec. (3.31)), Bell2 (segunda desigualdad de Bell, ec. (4.4)). La columna “mag.” indica la magnitud de la violación observada, en desviaciones estándar σ . Los loopholes están numerados de acuerdo a la descripción de la Sección 4.2.3. Una X indica que la experiencia es susceptible a ese problema. La experiencia [KMWZ95] usa detección de un canal y, para poder testear la segunda desigualdad de Bell, usan una versión mas restrictiva que lo usual de la suposición de Fair Sampling.

4.3.3. Otras experiencias recientes

El gran potencial de las comunicaciones por vía óptica (ya sea por fibras ópticas o por aire) y el campo emergente de la criptografía cuántica, han motivado la realización de varias experiencias con pares de fotones enredados, detectados a largas distancias de la fuente. Estos experimentos típicamente usan interferometría en los extremos de un largo recorrido por fibra óptica para detectar la presencia de correlaciones tiempo-energía [Fra36]. Con estos métodos se ha confirmado la presencia de enredo a 5 km [TRO94], 10 km [TBZG98, TBG⁺98] y más recientemente 50 km [MdRT⁺04] de la fuente. Estas últimas experiencias reportan violaciones de desigualdades de Bell por un amplio margen ($\sim 15\sigma$).

Recientemente se ha comenzado a enviar fotones enredados *directamente a través de la atmósfera*. La motivación declarada de estos experimentos es lograr desarrollar un sistema de comunicación óptica global (via satélite) que permita la distribución de fotones correlacionados por aire. En un primer experimento de este tipo [AB03], realizado en Wien (Austria) se enviaron fotones por aire a través de distancias de 150 m y 500 m (la experiencia fue asimétrica) con una separación entre las estaciones de detección de 600 m. Los fotones utilizados provienen de PDC-II degenerado a 810 nm. La experiencia se realiza de noche, para reducir el ruido a niveles manejables. Se reporta una violación (modesta) de una desigualdad de Bell por 4σ . Muy recientemente en China [PBZ⁺05] se enviaron fotones correlacionados de 702 nm por aire a través de una distancia de 13 km. Los fotones fueron producidos por PDC-II y se reporta una violación de una desigualdad de Bell por 5σ , como señal de que un nivel de enredo apreciable persiste al llegar a destino. Los mismos fotones se usan para distribuir una clave segura – por aire – con el protocolo criptográfico BB84.

Actualmente, la constatación de violaciones de desigualdades de Bell en éste tipo de experiencias ha pasado a segundo plano, lo cual habla de lo convincente de resultan las experiencias que hemos analizado (vea el Cuadro 4.5). En los experimentos mas recientes, el interés se ido desplazando hacia el desarrollo de las nuevas capacidades tecnológicas vinculadas con a las comunicaciones y procesamiento de información por medios ópticos. Sin embargo,

4.3. Experiencias de 3^{ra} generación 4. Buscando un veredicto experimental

se continúa reportando el nivel de violación de la desigualdad de Bell para demostrar la persistencia de enredo en el par de fotones, aún separados por considerables distancias. En cierto modo, se está utilizando la magnitud de la violación de la desigualdad de Bell como un testigo de enredo (Entanglement Witness).

Capítulo 5

Conclusión

“He had a right to that failure... He spent years in trying to prove that the quantum theory had inconsistencies in it. No one could have been more ingenious in thinking up unexpected and clever examples, but it turned out that the inconsistencies were not there: and often their resolution could be found in earlier work of Einstein himself. When that did not work, after repeated efforts, Einstein had simply to say that he did not like the theory. He did not like the elements of indeterminacy. He did not like the abandonment of continuity or of causality. These were things that he had grown up with, saved by him, and enormously enlarged; and to see them lost, even though he had put the dagger in the hand of their assassin by his own work, was very hard on him. He fought with Bohr in a noble and furious way, and he fought with the theory which he had fathered but which he hated.”

*Robert Oppenheimer, director del IAS
(Instituto de Estudios Avanzados de Princeton),
comentando, poco después de la muerte de Einstein en 1955,
sobre su larga lucha contra la interpretación de Copenhagen.
Citado en [Cla71], pag. 534.*

Después de más de 40 años de experimentación cuidadosa y cada vez más refinada, es muy grande el cuerpo de evidencia acumulada en favor de la Mecánica Cuántica y en contra de las teorías realistas locales. Sin embargo, aparte de la cantidad (hay varias decenas de experimentos en la literatura que reportan violaciones de desigualdades de Bell por varias desviaciones estándar), importa la calidad.

En este trabajo hemos catalogado los principales problemas asociados a la interpretación de las medidas obtenidas en experiencias EPR en cuatro tipos (loopholes):

- i) *Invariancia rotacional*. Esta suposición permite expresar la desigualdad CH74 en una forma más compacta (desigualdad de Freedman).
- ii) *No Enhancement*. Afecta a las experiencias basadas en esquemas de detección de un canal que usan la versión de CH74 de la desigualdad de Bell.
- iii) *Localidad*. Afecta la mayoría de las experiencias realizadas con analizadores o polarizadores estacionarios.
- iv) *Eficiencia de detección (Fair Sampling)*
Debido a limitaciones en la eficiencia de los detectores de fotones, solo una pequeña fracción de los pares emitidos es detectada.

El loophole (i) está asociado específicamente a la desigualdad de Freedman usada en las experiencias de primera generación y no afecta a experimentos posteriores. El loophole (ii) está asociado a la desigualdad CH72, donde se requieren tasas de medidas coincidentes con uno o ambos analizadores fuera del aparato. Fue cerrado por primera vez en la segunda experiencia de Aspect [AGR82a] cuando midió una amplia violación de la segunda desigualdad de Bell usando un esquema de detección de dos canales. La mayoría de las experiencias de tercera generación se basan en la segunda desigualdad de Bell y no son afectadas por este problema.

Los restantes loopholes (iii- Localidad) y (iv- Eficiencia de detección) han sido la preocupación principal algunos experimentos de tercera generación. El

primer intento por cerrar el loophole (iii) fue realizado por Aspect en su tercer experimento [AGR82b], donde usó analizadores variables cuyos parámetros eran seteados con los fotones en vuelo. Separó los analizadores-detectores 13 m entre sí, lo cual permite excluir la posibilidad de intercambio de información entre ambos durante la medida. Sin embargo, el seteo de los parámetros se realizó en forma periódica, no aleatoria. En la experiencia de Weihs et al. [WJWZ98], que apunta a resolver el mismo problema, se mejoraron varios aspectos: separaron las estaciones de analizador-detector por 400 m usando fibras ópticas para transportar los fotones. Esto les dio tiempo suficiente para setear los analizadores en forma aleatoria, con separación espacial entre ambos seteos. Finalmente, usaron un esquema de detección de dos canales, con registro de datos local (no se envían a un acumulador de coincidencias central) con etiqueta temporal dada por dos relojes atómicos sincronizados al inicio. Al procesar, a posteriori, las series de datos aparentemente aleatorios, las correlaciones entre los mismos violan la segunda desigualdad de Bell por 30 desviaciones estándar. Hay acuerdo en la literatura en que esta cuidadosa experiencia cierra el loophole de localidad¹. Sin embargo, con una eficiencia de detección del orden de 5 %, se ve afectada por el loophole (iv).

Conviene aclarar que el aspecto no local de la Mecánica Cuántica, confirmado por la experiencia de Innsbruck, no entra en conflicto con la causalidad relativista. Como en la Teleportación [NC00], la no localidad asociada a estados enredados no puede usarse para enviar información instantáneamente. La experiencia de Innsbruck muestra esto claramente. La lista de medidas de Alice es una secuencia aleatoria binaria y lo mismo para Bob. Si Bob quisiera enviar un mensaje a Alice controlando la orientación de su analizador... Alice seguiría viendo una secuencia binaria aleatorio con contenido de información nulo. Es recién cuando, usando un canal clásico a velocidad sublumínica, comparan las respectivas orientaciones de sus analizadores que “emergen” las correlaciones cuánticas.

El problema asociado a la eficiencia de detección afecta a todas las experiencias con fotones. Para atacar este loophole fue necesario un enfoque

¹Es difícil, después de haber recorrido esta aventura intelectual desde sus inicios en 1935 hasta el presente, no preguntarse... ¿cual sería la opinión de Einstein sobre de la experiencia de Innsbruck?

radicalmente diferente. En el 2001, en la trampa de iones del NIST, se verificó una violación de la segunda desigualdad de Bell usando los estados internos de dos partículas masivas como observables [RKM⁺01]. Dos iones de ${}^9\text{Be}^+$ fueron usados como sistemas de dos niveles, preparados en un estado enredado, manipulados con dos parámetros (ϕ_1, ϕ_2) y luego medidos, todo por medios ópticos. El proceso es análogo a una experiencia de polarización de fotones con detección de dos canales o a una experiencia con partículas de spin 1/2 y analizadores de Stern-Gerlach. Rowe et al. logran realizar una medida completa: es decir observar *todos* los estados enredados creados, de modo que no necesitan usar la hipótesis de Fair Sampling. Si bien esta experiencia cierra el loophole (iv) esta afectada por el loophole de localidad, ya que los iones están próximos entre si e interactúan a través de la interacción de Coulomb.

No existe por lo tanto, hasta el momento, la experiencia ideal que cierre simultáneamente ambos loopholes (iii) y (iv). Las propuestas para ello siguen dos caminos: (i) mejorar la experiencia de Innsbruck alcanzando una detección de fotones lo bastante eficiente como para no requerir asumir el Fair Sampling y (ii) mejorar la experiencia del NIST separando los iones luego de la etapa de manipulación, lo suficiente como para eliminar la posibilidad de interacción mutua. Sin embargo, no hay cuestionamientos realmente serios a la hipótesis de Fair Sampling, como si los hubo con respecto al problema de localidad. En palabras del propio Bell:

“...it is hard for me to believe that quantum mechanics works so nicely for inefficient practical set-ups and yet it is going to fail badly when sufficient refinements are made.”

En los experimentos mas recientes con pares de fotones enredados, la preocupación por cerrar los loopholes (iii) y (iv) esta siendo desplazada por las posibilidades de generar, manipular, transportar y detectar estados enredados de dos o mas partículas. El interés se esta desplazando gradualmente al desarrollo de nuevas tecnologías de comunicación y encriptación segura transmitiendo fotones en estados enredados, por fibra óptica y por aire a través de varios kilómetros. Las violación a desigualdades de Bell siguen siendo repor-

tadas, pero no como afirmación de la Mecánica Cuántica, sino como “testigos de enredo” en las medidas realizadas en sitios remotos. Implícitamente, los autores de estos experimentos parecen asumir que la Mecánica Cuántica es la mejor descripción de la realidad que tenemos y - como se ha hecho durante los últimos 100 años - la ponen a trabajar.

Apéndices

Apéndice A

Partículas con Spin 1/2

En este apéndice se reúnen algunos resultados asociados a la descripción cuántica de sistemas de espín 1/2 que son relevantes para los temas tratados en éste trabajo. Esta basado en material estándar de buenos textos de Mecánica Cuántica, por ejemplo [Sak85, Mes65, CTDL77].

A.1. Una partícula

Las componentes cartesianas del espín, \vec{S} , satisfacen¹ las relaciones de conmutación características de un momento angular

$$[S_x, S_y] = iS_z \quad [S_z, S_x] = iS_y \quad [S_y, S_z] = iS_x. \quad (\text{A.1})$$

Es decir que S_x, S_y, S_z son observables conjugados entre si y solo se puede determinar una componente a la vez. Las medidas de las mismas están ligadas entre si por relaciones de incertidumbre. De acuerdo a la Mecánica Cuántica, sólo es posible asignar un valor concreto a *una* de las tres componentes y en ese caso, la ignorancia sobre las otras dos es máxima. En los términos de EPR, si una componente se conoce con certeza, las otras dos componentes no tienen realidad física.

Para el caso de espín $S = 1/2$, la componente de espín a lo largo de cualquier dirección puede tomar dos valores, $\pm 1/2$. Por lo tanto, el estado de espín es un sistema de dos estados (un qubit) y existe en un espacio de

¹En este apéndice se trabaja con $\hbar = 1$.

Hilbert de dimensión 2. Tomando los autovectores de S_z como base,

$$|+\rangle_z \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad |-\rangle_z \leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (\text{A.2})$$

donde

$$S_z|+\rangle_z = \frac{1}{2}|+\rangle_z \quad S_z|-\rangle_z = -\frac{1}{2}|-\rangle_z \quad (\text{A.3})$$

En esta representación, los operadores asociados a las tres componentes de spin son proporcionales a las matrices de Pauli.

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (\text{A.4})$$

de modo que $S_k = \frac{1}{2}\sigma_k$ para $k = x, y, z$. Los autoestados de S_x y S_y se expresan en términos de autoestados de S_z como sigue

$$S_x|\pm\rangle_x = \pm\frac{1}{2}|\pm\rangle_x \implies |\pm\rangle_x = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle_z \pm |-\rangle_z) \quad (\text{A.5})$$

$$S_y|\pm\rangle_y = \pm\frac{1}{2}|\pm\rangle_y \implies |\pm\rangle_y = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle_z \pm i|-\rangle_z) \quad (\text{A.6})$$

A partir de (A.5) se obtiene la relación recíproca, que expresa los autoestados de S_z en la base de autoestados de S_x ,

$$|\pm\rangle_z = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle_x \pm |-\rangle_x). \quad (\text{A.7})$$

Evidentemente, existe una relación análoga en términos de autoestados de S_y .

La relación de incertidumbre ya está presente en la estructura de estos autoestados. Supongamos que intentamos determinar el valor de más de una componente de \vec{S} . Para ello, partiendo de un autoestado de S_y , se realiza una medida de S_z , seguida de una medida de S_x .

A partir de (A.6) vemos que la probabilidad de obtener $+1/2$ al medir S_z es $1/2$. El sistema queda en uno de los estados $|\pm\rangle_z$ y ya no hay información de la componente S_y . Para explorar el resultado de la segunda medida (S_x), expresamos $|+\rangle_z$ en términos de autoestados de S_x , ec. (A.7), y vemos que, nuevamente, la probabilidad de obtener $+1/2$ es $1/2$. El nuevo estado es uno de $|\pm\rangle_x$ y se ha perdido toda información sobre la componente S_z .

A.2. Dos partículas

Estados Enredados

Dado que el espacio de Hilbert para dos espines es $\mathcal{E}_2 = \mathcal{E}_1 \otimes \mathcal{E}_1$, los estados base de dos partículas se obtienen a partir del producto tensorial de $|\pm\rangle_z$,

$$|+, +\rangle, \quad |+, -\rangle, \quad |-, +\rangle, \quad |-, -\rangle \quad (\text{A.8})$$

donde $|+, +\rangle \equiv |+\rangle \otimes |+\rangle$, etc. y omitimos los subíndices zz para no recargar la notación. En éstos estados, la componente S_z de cada espin individual esta bien definida. Sin embargo, en un estado genérico de \mathcal{E}_2

$$|\Psi\rangle = \alpha|+, +\rangle + \beta|+, -\rangle + \gamma|-, +\rangle + \delta|-, -\rangle \quad (\text{A.9})$$

con $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ constantes complejas arbitrarias² esto no es así. En general, las componentes individuales de espin estarán bien definidas si el estado se construye como un producto. Si el primer espin esta descrito por $a|+\rangle + b|-\rangle$ y el segundo por $c|+\rangle + d|-\rangle$, donde a, b, c, d son constantes complejas arbitrarias que satisfacen el requisito de normalización, el estado conjunto será

$$(a|+\rangle + b|-\rangle) \otimes (c|+\rangle + d|-\rangle) = ac|+, +\rangle + ad|+, -\rangle + bc|-, +\rangle + bd|-, -\rangle \quad (\text{A.10})$$

Es claro que el estado genérico (A.9) tiene esta forma, sólo en el caso de que sus coeficientes satisfacen la relación adicional

$$\alpha\delta = \beta\gamma. \quad (\text{A.11})$$

En los estados en que no se satisface esta relación (la mayoría) no es posible asignar estados bien definidos a las partículas individuales. Denominamos a estos estados, estados enredados.

Espin total

En un sistema de dos partículas de spin 1/2, es conveniente usar autoestados de spin total $\vec{S} = \vec{S}_1 + \vec{S}_2$, ya que las componentes de spin de cada partícula $S_{1,z}$ y $S_{2,z}$ no conmutan con S^2 . Sin embargo, su suma $S_z = S_{1,z} + S_{2,z}$ si

²En realidad, satisfacen la relación de normalización $|\alpha|^2 + |\beta|^2 + |\gamma|^2 + |\delta|^2 = 1$.

lo hace. Es decir que puede ocurrir que en un estado de dos espins, no estén bien definidas las componentes individuales, pero la suma S_z siempre tiene un valor bien definido.

Los autoestados simultáneos de $\{S^2, S_z\}$ son

$$S^2|s, m_s\rangle = s(s+1)|s, m_s\rangle \quad S_z|s, m_s\rangle = m_s|s, m_s\rangle \quad (\text{A.12})$$

De acuerdo a las reglas de suma de momentos angulares, los números cuánticos s, m_s toman los valores $s = 0, 1$ y $m_s = 0, \pm 1$. Los autoestados de estos operadores se expresan en la representación (A.8) como

$$|0, 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+, -\rangle - |-, +\rangle) \quad (\text{A.13})$$

$$|1, +1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|+, +\rangle$$

$$|1, 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+, -\rangle + |-, +\rangle) \quad (\text{A.14})$$

$$|1, -1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|-, -\rangle.$$

Estos cuatro estados conforman en \mathcal{E}_2 una representación alternativa a (A.8). El estado con $s = 0$ es el *singlete* de espín y tiene carácter antisimétrico frente al intercambio de las dos partículas. Los otros tres estados son simétricos y conforman el *triplete* ($s = 1$). Si un par de partículas es producido con espín total nulo, como en el caso de la formulación de Bohm de la paradoja EPR, entonces están en el estado singlete (A.13). Ambos estados con $m_s = 0$ están enredados (no se cumple la ec. A.11). En los mismos no es posible asociar valores definidos a las componentes de espín individuales.

Singlete de espín:

valor esperado de componentes de espín en direcciones arbitrarias

El caso del singlete de espín

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+, -\rangle - |-, +\rangle) \quad (\text{A.15})$$

es de particular interés, ya que es el usualmente utilizado en experiencias tipo EPR.

Las componentes cartesianas del operador de spin (en unidades de $\hbar/2$) son las matrices de Pauli. Si $\hat{\mathbf{a}}$ y $\hat{\mathbf{b}}$ son dos versores que representan direcciones espaciales arbitrarias, interesa el valor esperado del operador $S_a \otimes S_b$, donde $S_a \equiv \vec{S}_1 \cdot \hat{\mathbf{a}}$ y $S_b \equiv \vec{S}_2 \cdot \hat{\mathbf{b}}$ son las componentes de spin, en dirección $\hat{\mathbf{a}}$ para la partícula 1 y en dirección $\hat{\mathbf{b}}$ para la partícula 2. El valor esperado $\langle S_a \otimes S_b \rangle$ representa el resultado medio de una serie de medidas simultáneas del espín 1 en la dirección $\hat{\mathbf{a}}$ y del spin 2 en la dirección $\hat{\mathbf{b}}$, para un ensemble de pares de partículas preparadas en el estado $|\Psi\rangle$.

Para calcularlo, se puede usar la representación (A.8), en la cual el operador densidad asociado a $|\Psi\rangle$ es

$$\rho = |\Psi\rangle\langle\Psi| = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.16})$$

Los operadores asociados a las componentes de spin en las direcciones de interés son $S_a = \sum_{i=1}^3 a_i \sigma_i$ y $S_b = \sum_{j=1}^3 b_j \sigma_j$, respectivamente, donde a_i y b_j son las componentes cartesianas de los versores $\hat{\mathbf{a}}$, $\hat{\mathbf{b}}$. El operador conjunto dado por $S_a \otimes S_b = \sum_{i,j=1}^3 \alpha_{ij} \sigma_i \otimes \sigma_j$, donde $\alpha_{ij} \equiv a_i b_j$, se puede calcular en forma explícita³,

$$S_a \otimes S_b = \begin{pmatrix} \alpha_{33} & \alpha_{31} + i\alpha_{32} & \alpha_{13} + i\alpha_{23} & \alpha_{11} - \alpha_{22} + i(\alpha_{12} + \alpha_{21}) \\ \cdot & -\alpha_{33} & \alpha_{11} + \alpha_{22} + i(\alpha_{21} - \alpha_{12}) & -\alpha_{13} - i\alpha_{23} \\ \cdot & \cdot & -\alpha_{33} & -\alpha_{31} - i\alpha_{32} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \alpha_{33} \end{pmatrix}. \quad (\text{A.17})$$

A partir de las expresiones (A.16) y (A.17) obtenemos el operador $(S_a \otimes S_b) \cdot \rho$, al cual tomamos la traza para tener el resultado buscado,

$$\langle\Psi|S_a \otimes S_b|\Psi\rangle = \text{traza}(S_a \otimes S_b \cdot \rho) = -\sum_{i=1}^3 \alpha_{ii} = -\hat{\mathbf{a}} \cdot \hat{\mathbf{b}} = -\cos \theta_{ab}. \quad (\text{A.18})$$

³Por razones de espacio no incluimos el triángulo inferior de la matriz. La información es innecesaria, dado que el operador es hermítico y sus componentes γ_{ij} satisfacen $\gamma_{ij} = \gamma_{ji}^*$.

Apéndice B

Polarización y Spin

Este apéndice explora la analogía existente entre dos sistemas de dos estados: pares de partículas con spin $1/2$ y pares de fotones linealmente polarizados. Su contenido es de carácter elemental [Sak85], pero relevante ya que la gran parte de la discusión teórica se realiza en el contexto de partículas de spin $1/2$, pero la inmensa mayoría de las medidas refiere a las correlaciones en la polarización de pares de fotones.

B.1. Experiencia de Stern-Gerlach

La experiencia de 1922 Stern y Gerlach aportó evidencia empírica incuestionable sobre la existencia de un momento angular intrínseco cuantizado asociado a los electrones (Spin). Hasta hoy se utiliza en los cursos introductorios de Física para introducir y justificar la noción cuántica de Spin. En la propuesta original de Bhom y Aharonov se utilizan dos analizadores de spin orientables, que no son otra cosa que aparatos de Stern-Gerlach. En esta sección presentamos una descripción sucinta del resultado de las medidas de un spin $1/2$.

La experiencia de Stern-Gerlach se realizó originalmente usando un haz colimado de átomos de Ag (Plata) que se hacía pasar a través de un campo magnético inhomogéneo en la dirección \hat{z} , vea la Fig. B.1.

Los átomos de plata fueron elegidos por tener, en su estado fundamental, 46 electrones formando capas llenas y un único electron en el nivel 5s. Es

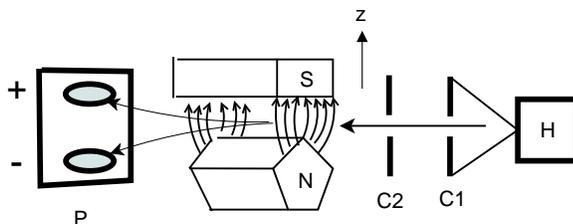


Figura B.1: Aparato de Stern-Gerlach. Los átomos de Ag salen del horno H, pasan por dos colimadores C1 y C2 e inciden en una región con campo magnético inhomogeneo en dirección \hat{z} . Los átomos inciden en la región de detección P separados en dos haces por su componente de spin.

decir que el momento magnético $\vec{\mu}$ de un átomo de Ag es proporcional al spin (momento angular intrínseco) del electrón ubicado en el nivel $5s$ [Sak85],

$$\vec{\mu} = \frac{e}{m} \vec{S},$$

donde e/m es la relación carga-masa del electrón ($e < 0$). La energía de interacción del campo magnético con un momento magnético es $-\vec{\mu} \cdot \vec{B}$, de modo que (despreciando las componentes transversales del campo \vec{B}) cada átomo experimenta una fuerza en dirección \hat{z}

$$F_z = -\mu_z \frac{\partial B_z}{\partial z}.$$

Desde el punto de vista clásico, la componente μ_z del momento magnético puede tomar cualquier valor (talque $|\mu_z| \leq \|\vec{\mu}\|$, claro) ya que los átomos no tienen dirección privilegiada en el espacio y se esperaría observar una distribución uniforme, centrada en $z = 0$, en la pantalla de detección P. Por el contrario, lo que se observa son dos regiones bien localizadas (que nombramos (\pm)) correspondientes a los dos valores de spin del electrón $5s$.

Las observaciones de la Fig. B.1 son consistentes con el hecho de que el electrón es una partícula de spin $s = 1/2$ y una medida de una de sus componentes (a lo largo de cualquier dirección espacial) resulta en $m_s \hbar = \pm \hbar/2$, ya que $m_s = \pm 1/2$. Con estas consideraciones, $\mu_z = \pm \frac{e\hbar}{2m}$ y la fuerza sobre los electrones solo toma dos valores opuestos.

Los aparatos de Stern-Gerlach como el descrito en la Fig. B.1 son analizadores de dos canales, como los usados en muchas experiencias EPR con

poolarización de fotones. La naturaleza cuántica del spin se pone en evidencia a través del Gedankenexperiment mostrado en la Fig. B.2 con analizadores de Stern-Gerlach colocados secuencialmente. Los analizadores se pueden orientar en una de dos direcciones (\hat{z} , \hat{x}) ortogonales entre si. En (A), el primer analizador divide el haz en dos componentes (de igual intensidad) que indicamos $|\pm, z\rangle$, correspondientes a las dos posibilidades $m_s = \pm 1/2$. Si se bloquea el haz $|-, z\rangle$, la mitad que incide en el segundo analizador (orientado igual que el primero) es un haz de partículas en el estado $|+, z\rangle$, por lo que todas salen por el canal correspondiente. En (B), el segundo analizador se coloca en una dirección *ortogonal* con la del primero. En este caso, emergen dos haces del segundo analizador, cada uno con 25% de los átomos originales. Si pensamos en términos clásicos (como si el spin fuera el momento angular de un trompo, por ejemplo), podríamos estar tentados de explicar esto suponiendo que los átomos del haz tienen las componentes de spin S_x y S_z bien definidas *simultáneamente*. Si suponemos además que los valores \pm de cada componente están equidistribuidos, explicamos (B): la mitad de las partículas originales emergen dos haces correspondientes a $(S_z, S_x) = (+, +)$ y $(S_z, S_x) = (+, -)$. Pero consideremos el caso (C), donde se agrega un tercer analizador SG orientado en dirección \hat{z} y se observan *dos haces* a la salida. De acuerdo a la interpretación clásica esbozada arriba, solo hay átomos con componente $S_z = +$ en el haz incidente en el tercer aparato. Como es posible que aparezca a la salida una componente $S_z = -$ que no está a la entrada?

La experiencia anterior muestra dramáticamente lo inadecuado de la descripción clásica para tratar grados de libertad cuánticos. El spin es un momento angular, pero no es como el momento angular de un trompo.

Es inmediato explicar el Gedankenexperiment de la Fig. B.2 usando la descripción cuántica del spin (nos referiremos al formalismo en la Sección A). Al ser un momento angular, las componentes de spin las relaciones de conmutación (A.1). Por lo tanto, en un autoestado $|\pm z\rangle$, las componentes (S_x, S_y) no conmutan entre si (son observables conjugados) y están vinculadas por una relación de Incertidumbre. Como allí se menciona, la determinación de una componente de spin implica la indeterminación de las otras dos.

Al pasar por el primer analizador los átomos están en un autoestado de

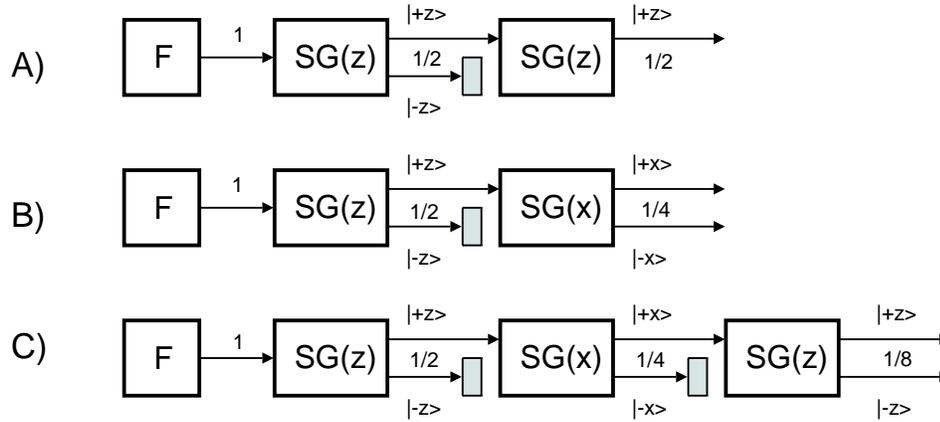


Figura B.2: Analizadores de Stern-Gerlach secuenciales. Los bloques oscuros bloquean el haz que incide sobre ellos. Se indica la fracción de los átomos originales que integra cada haz.

S_z que puede expresarse, ec (A.7), en términos de los autoestados de S_x

$$|+z\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|+x\rangle \pm |-x\rangle).$$

El segundo analizador opera como un aparato de medida del observable $P_{+x} = |+x\rangle\langle+x|$, que tiene autovalores 1 (si la medida resulta en (+) o cero si resulta en (-). De acuerdo al postulado de medida (Apéndice A), la probabilidad de observar la componente + es

$$p(+x) = \langle+z|P_{+x}|+z\rangle = \frac{1}{2}$$

y lo mismo para la componente -. Además, luego de la medida, las partículas quedan en el autoestado correspondiente. El haz que no es bloqueado queda por tanto en el autoestado $|+x\rangle$ que puede expresarse, ec. (A.5), en términos de autoestados de S_z ,

$$|+x\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|+z\rangle + |-z\rangle) ..$$

El tercer analizador, orientado según \hat{z} , realiza una medida del observable $P_{+z} = |+z\rangle\langle+z|$, de modo que la probabilidad de obtener el resultado (-) es

$$p(+x) = \langle+x|P_{-z}|+x\rangle = \frac{1}{2}.$$

Después de las tres medidas, $1/8$ de las partículas del haz inicial emerge en el estado $| - z \rangle$. El segundo analizador, $SG(x)$, ha destruido la información previa sobre S_z .

B.2. Analogía con luz polarizada

Los primeros en proponer la polarización de los fotones como una analogía del spin de las partículas masivas, fueron Bohm y Aharonov en 1957 [BA57]. La polarización de la luz está íntimamente relacionada con el spin de un fotón¹. Quizás la mejor forma de introducir la analogía en forma intuitiva es a través de la experiencia con filtros polarizadores (Polaroid) ilustrada en la Fig. B.3. Un filtro polarizador tiene un eje principal orientado en cierta dirección. Sólo luz linealmente polarizada en esa dirección lo atraviesa. En la figura se muestra una fuente F de luz no polarizada que incide en un polarizador orientado según \hat{x} . Como toda la luz que lo atraviesa está polarizada en esa dirección, si se coloca a continuación un filtro orientado perpendicularmente al primero (dirección \hat{y} , vea la Fig. B.4), no habrá luz a la salida. Sin embargo, si incluimos en medio un tercer polarizador orientado en dirección \hat{x}' que forma 45° con \hat{x} , a la salida hay luz linealmente polarizada según \hat{x}' . Al intercalar el tercer filtro se ha borrado la información previa sobre la polarización ortogonal a \hat{y} .

Matemáticamente, se puede describir la polarización usando un espacio vectorial complejo de dimensión 2. Usando los vectores de Jones, describimos los estados de luz linealmente polarizada en dos direcciones ortogonales (\hat{x}, \hat{y}) como

$$|+\rangle_x \equiv \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad |-\rangle_x \equiv \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

El estado $|+\rangle_x$ corresponde a polarización lineal paralela a \hat{x} y $|-\rangle_x$ a una

¹El fotón es una partícula de spin $s = 1$, pero algo especial, en tanto no tiene masa. De las tres posibles componentes de spin $m_s = -1, 0, +1$, solo se observan dos $m_s = \pm 1$, las cuales el spin es $\pm\hbar$ a lo largo de la dirección de propagación \vec{k} del fotón. La luz circularmente polarizada está compuesta de fotones $|R\rangle$ (derechos) y $|L\rangle$ (izquierdos). En la descripción ondulatoria esto corresponde al sentido de rotación del vector campo eléctrico. Los estados de polarización circular $|R\rangle, |L\rangle$ son autoestados de spin con autovalores $\pm\hbar$.

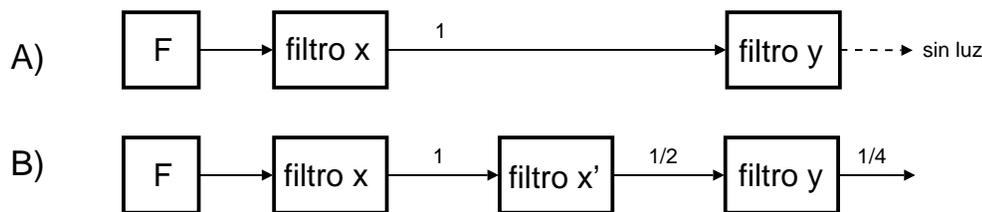


Figura B.3: A) Una fuente de luz F no polarizada incide en un filtro polarizador orientado en dirección \hat{x} . Solo luz linealmente polarizada en esta dirección lo atraviesa. Si a continuación se coloca otro filtro polarizador orientado perpendicularmente al primero (\hat{y}), no hay luz a la salida. B) Si se intercala un tercer filtro polarizador entre los dos primeros, orientado en dirección \hat{x}' a 45° con \hat{x} , $1/4$ de los fotones que emergen del primer analizador salen del último analizador con polarización lineal (\hat{y}).

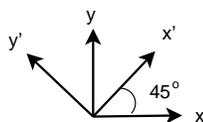


Figura B.4: Direcciones de los ejes principales de los analizadores de polarización.

polarización lineal ortogonal a \hat{x} (es decir paralela a \hat{y}). Las polarizaciones asociadas a una dirección arbitraria \hat{a} , que forma un ángulo θ con \hat{x} , se describen en la base (x, y) por²

$$\begin{aligned} |+\rangle_a &= \cos \theta |+\rangle_x + \sin \theta |-\rangle_x, \\ |-\rangle_a &= -\sin \theta |+\rangle_x + \cos \theta |-\rangle_x. \end{aligned} \quad (\text{B.1})$$

Podemos interpretar los resultados de la experiencia de la Fig. B.3 en forma análoga a como se hizo para el caso del spin $1/2$: A) Los fotones que pasan el primer analizador están en el estado $|+\rangle_x$. Ya que ${}_x\langle + | - \rangle_x = 0$, no hay salida del segundo analizador. B) Para ver el efecto de intercalar un analizador orientado en \hat{x}' es necesario expresar la polarización $|+\rangle_x$ en la base (x', y') . Invertiendo (B.1) con $a = x'$ ($\theta = \pi/4$) se tiene,

$$|\pm\rangle_x = \frac{1}{\sqrt{2}} (|+\rangle_{x'} \mp |-\rangle_{x'}). \quad (\text{B.2})$$

²Usamos esta notación para enfatizar la analogía con partículas de spin $1/2$.

Donde es claro que la polarización x tiene una amplitud $-1/\sqrt{2}$ en la dirección y' . La mitad de los fotones pasan el filtro y salen en el estado $|-\rangle_{x'}$, que a su vez tiene amplitud $-1/\sqrt{2}$ en la dirección x (ecs. (B.1) con $\theta = \pi/4$). Es decir que intercalando el analizador en dirección x' y usando el postulado de la medida, obtenemos una salida de $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ de los fotones que emergen del primer analizador.

Para completar la analogía podemos establecer la correspondencia entre observables de spin y observables de polarización. Una medida de S_z se puede asociar a medidas de polarización en la base (x, y) . En ese caso, una medida de S_x corresponde a medidas de polarización en la base rotada (x', y') . El correspondiente de una medida de S_y es una medida de los estados de polarización circular, que en la base (x, y) se pueden expresar como

$$|R\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix} \quad |L\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix}. \quad (\text{B.3})$$

En la luz circularmente polarizada, el vector \vec{E} tiene dos componentes en el plano de polarización desfasadas en $\pi/2$. Como se sabe, un estado de polarización circular se puede expresar como una combinación lineal de estados de polarización lineal (y recíprocamente ya que los vectores (B.3) son también una base).

B.3. Correlaciones de polarización

B.3.1. Medidas de un canal

En una medida ideal de polarización de un canal (Fig. B.5), un fotón incide en un filtro polarizador orientado en cierta dirección $\hat{\mathbf{a}}$ y, si lo atraviesa, es detectado por el detector D. Esto corresponde a una medida de polarización con resultado en la dirección $\hat{\mathbf{a}}$. Si el fotón no es detectado (y el detector se supone ideal) la polarización del fotón resultó ser ortogonal a $\hat{\mathbf{a}}$.

Como en la sección anterior, consideramos dos direcciones ortogonales $(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}})$ en el plano de polarización (es decir, el plano transversal a la dirección $\hat{\mathbf{z}}$ de propagación del fotón). En esta representación, consideramos un estado con polarización en dirección arbitraria, $\hat{\mathbf{a}}$, formando un ángulo $a \in [0, 2\pi]$

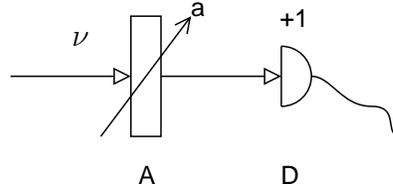


Figura B.5: Un fotón pasa por un filtro polarizador ideal A y luego es detectado por el detector ideal D. Esto corresponde a una medida de polarización en la dirección $\hat{\mathbf{a}}$. Si no hay detección, la polarización es ortogonal a $\hat{\mathbf{a}}$.

con $\hat{\mathbf{x}}$. Como ya mencionamos en la sección anterior, el ket asociado a la polarización $\hat{\mathbf{a}}$ es $|+\rangle_a = (\cos a, \sin a)^T$ y el asociado a la polarización transversal es $|-\rangle_a = (-\sin a, \cos a)^T$. El operador $Q(a)$ que proyecta la polarización en dirección $\hat{\mathbf{a}}$ es

$$Q(a) = \begin{pmatrix} \cos^2 \theta_a & \sin \theta_a \cos \theta_a \\ \sin \theta_a \cos \theta_a & \sin^2 \theta_a \end{pmatrix}. \quad (\text{B.4})$$

Es inmediato chequear que $|\pm\rangle_a$ son autoestados de este operador con autovalores $+1, 0$ respectivamente,

$$Q(a)|+\rangle_a = |+\rangle_a \quad Q(a)|-\rangle_a = 0.$$

Es decir que una medida del observable $Q(a)$ resulta en $+1$ si la polarización es en dirección $\hat{\mathbf{a}}$ o 0 si es ortogonal a esta dirección.

Para medir correlaciones se realizan medidas de polarización de dos fotones en forma coincidente. En este caso, se usa una estación análoga a la de la Fig. B.5 para medir la polarización del segundo fotón, pero con otra orientación $\hat{\mathbf{b}}$ en el filtro polarizador. Supongamos que el par de fotones correlacionados se prepara en un estado³

$$|\Psi_t\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|++\rangle + |--\rangle) \quad (\text{B.5})$$

donde $|++\rangle = |+\rangle \otimes |+\rangle$, etc. Los decaimientos electrónicos en la cascada $J = 0 \rightarrow 1 \rightarrow 0$ del Calcio, usados como fuente de fotones por muchas experiencias EPR de primera y segunda generación [KC67, FC72, AGR81,

³Omitimos el subíndice cuando la expresión es válida en cualquier dirección.

AGR82a, AGR82b], producen fotones en este estado. Cada fotón del par se aleja de la fuente en direcciones opuestas.

Interesa obtener una expresión para el valor esperado de medidas coincidentes de polarización, en direcciones $\hat{\mathbf{a}}, \hat{\mathbf{b}}$ para los fotones 1 y 2 respectivamente. La probabilidad de detección conjunta (correlación entre ambas medidas de polarización) es,

$$p_t^{++}(a, b) = \langle \Psi_t | Q(a) \otimes Q(b) | \Psi_t \rangle = \frac{1}{2} \cos^2(\theta_{ab}) \quad (\text{B.6})$$

En esta expresión $\theta_{ab} \equiv |\theta_a - \theta_b|$ es la orientación relativa de ambos analizadores y $Q(b)$ esta dado por una expresión análoga a la ec. (B.4).

En algunas experiencias de primera generación [HP73, FT76, Cla76] se ha usado como fuente de fotones la cascada $J = 1 \rightarrow J = 1 \rightarrow J = 0$ en átomos de Mercurio. En este caso, los fotones se emiten anticorrelacionados, en el estado singlete

$$|\Psi_s\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+-\rangle - |-+\rangle). \quad (\text{B.7})$$

Un cálculo análogo muestra que en este caso la probabilidad

$$p_s^{++}(a, b) = \langle \Psi_s | Q(a) \otimes Q(b) | \Psi_s \rangle = \frac{1}{2} \sin^2(\theta_{ab}) \quad (\text{B.8})$$

Las ecs. (B.6) y (B.8) son la base de las predicciones cuánticas para experimentos EPR con fotones y detección de un canal. Obsérvese que difiere de la predicción cuántica para medidas de componentes de spin en el estado singlete, ec. (A.18), ya que éstas están asociadas a detecciones de dos canales.

B.3.2. Medidas de dos canales

En medidas de dos canales se obtienen cuatro tipos de correlaciones entre las medidas de Alice y Bob. Para un estado positivamente correlacionado como (B.5), resulta

$$\begin{aligned} p_t^{++}(a, b) &= \langle \Psi_t | Q(a) \otimes Q(b) | \Psi_t \rangle = \frac{1}{2} \cos^2(\theta_{ab}) \\ p_t^{--}(a, b) &= \langle \Psi_t | P(a) \otimes P(b) | \Psi_t \rangle = \frac{1}{2} \cos^2(\theta_{ab}) \\ p_t^{+-}(a, b) &= \langle \Psi_t | Q(a) \otimes P(b) | \Psi_t \rangle = \frac{1}{2} \sin^2(\theta_{ab}) \\ p_t^{-+}(a, b) &= \langle \Psi_t | P(a) \otimes Q(b) | \Psi_t \rangle = \frac{1}{2} \sin^2(\theta_{ab}), \end{aligned}$$

donde $P(a) \equiv 1 - Q(a)$ es el operador complementario de $Q(a)$. Es decir, el proyector sobre estados de polarización ortogonales a la dirección $\hat{\mathbf{a}}$. Con una similar definición para $P(b) = 1 - Q(b)$. Estas probabilidades de detección conjunta (observe que suman 1) se combinan con los resultados de las medidas $A, B = \pm 1$ para tener el coeficiente de correlación

$$E_t(a, b) = p_t^{++}(a, b) + p_t^{--}(a, b) - p_t^{+-}(a, b) - p_t^{-+}(a, b) = \cos(2\theta_{ab}) \quad (\text{B.9})$$

Para el estado anticorrelacionado de singlete, ec. (B.7), un cálculo exactamente análogo resulta en

$$\begin{aligned} p_s^{++}(a, b) &= \langle \Psi_t | Q(a) \otimes Q(b) | \Psi_t \rangle = \frac{1}{2} \sin^2(\theta_{ab}) \\ p_s^{--}(a, b) &= \langle \Psi_t | P(a) \otimes P(b) | \Psi_t \rangle = \frac{1}{2} \sin^2(\theta_{ab}) \\ p_s^{+-}(a, b) &= \langle \Psi_t | Q(a) \otimes P(b) | \Psi_t \rangle = \frac{1}{2} \cos^2(\theta_{ab}) \\ p_s^{-+}(a, b) &= \langle \Psi_t | P(a) \otimes Q(b) | \Psi_t \rangle = \frac{1}{2} \cos^2(\theta_{ab}), \end{aligned}$$

y el valor esperado de la correlación es

$$E_s(a, b) = p_s^{++}(a, b) + p_s^{--}(a, b) - p_s^{+-}(a, b) - p_s^{-+}(a, b) = -\cos(2\theta_{ab}). \quad (\text{B.10})$$

La cantidad correspondiente en el caso del spin⁴ esta dada por la ec. (A.18). Estas cantidades son la base de la predicción cuántica para el parámetro de Bell en experimentos con detección de dos canales.

⁴El factor 2 en el ángulo se debe a que una rotación de 4π en el espacio de spin 1/2 equivale a la identidad.

Apéndice C

Una desigualdad algebraica

En este apéndice reproducimos la demostración original [CH74] del lema usado en la formulación de la desigualdad CH74:

Si x, x', y, y', X, Y son números reales no negativos tales que $x, x' \in [0, X]$ y $y, y' \in [0, Y]$, entonces cumplen la desigualdad

$$-XY \leq U \equiv x(y - y') + x'(y + y') - Yx' - Xy \leq 0. \quad (\text{C.1})$$

Para demostrar que $U \leq 0$, consideramos dos casos:

i) Si $x \geq x'$, basta reescribir U en la forma

$$U = (x - X)y + (y - Y)x' + (x' - x)y' \leq 0$$

ya que es la suma de tres términos no positivos.

ii) Para el caso $x < x'$, podemos acotar U

$$\begin{aligned} U &= x(y - y') + (x' - X)y + x'(y' - Y) \\ &\leq x(y - y') + (x' - X)y + x(y' - Y) = (x' - X)y + x(y - Y) \leq 0. \end{aligned}$$

Con lo cual $U \leq 0$ queda demostrada.

Para demostrar la desigualdad $-XY \leq U$, consideramos tres casos:

i) Si $x' \geq x$, basta reescribir $U + XY$ en la forma

$$(X - x')(Y - y) + xy + y'(x' - x) \geq 0$$

que es la suma de tres términos no negativos.

ii) Si $y \geq y'$, reescribimos $U + XY$ en la forma

$$U + XY = (X - x')(Y - y) + x'y' + x(y - y') \geq 0$$

que también es la suma de tres términos no negativos.

iii) Si $x' < x$ y $y < y'$, escribimos $U + XY$ en la forma

$$U + XY = (X - x')(Y - y) - (x - x')(y' - y) + x'y \geq 0.$$

Como $(X - x')(Y - y) \geq (x - x')(y' - y)$, la suma de los dos primeros términos es no negativa. La desigualdad resulta porque el tercer término $(x'y)$ también es no negativo.

QED.

Apéndice D

Fotones por conversión paramétrica

En la conversión paramétrica se usan las propiedades no lineales de un cristal birrefringente¹ para producir dos fotones correlacionados en polarización a partir de un fotón incidente. Cuando un flujo de fotones incide (haz de bombeo, \vec{k}_p) sobre el cristal, una fracción del mismo da lugar a dos haces de fotones que emergen en direcciones diferentes (ver la Fig. D.1). El cristal no cambia de estado en el proceso, de modo que la cantidad de movimiento y energía de los fotones involucrados se conserva

$$\nu_p = \nu_i + \nu_s \quad \vec{k}_p = \vec{k}_i + \vec{k}_s \quad (\text{D.1})$$

donde ν_p es la frecuencia de los fotones incidentes (pumping, o de bombeo), $\nu_{s,i}$ las de los fotones emergentes. Este proceso se usa comúnmente de forma que los fotones emergentes tienen igual longitud de onda, $\lambda_i = \lambda_s = 2\lambda_p$ (PDC degenerada). Existen dos versiones del proceso PDC: Tipo I o de Tipo II. Es posible controlar experimentalmente el tipo del proceso a través de la orientación espacial del cristal² [KOW01].

¹En un cristal birrefringente las dos componentes de polarización recorren caminos ópticos diferentes.

²Esto cambia la forma en que se satisfacen los criterios de conservación (D.1) en el cristal (phase matching).

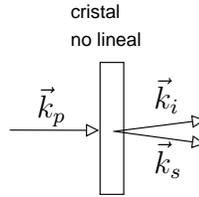


Figura D.1: En el proceso de conversión paramétrica, un fotón incidente de número de onda (momento) \vec{k}_p (pump) y frecuencia ν_p da lugar a dos fotones emergentes de momentos \vec{k}_i (idle) y \vec{k}_s (signal) y frecuencias ν_i, ν_s .

PDC tipo I

En PDC de tipo I los fotones emergentes tienen *la misma* polarización lineal, ortogonal a la polarización del haz incidente. De modo que los fotones se generan en un estado de polarización bien definida y el estado enredado debe ser generado a posteriori. Rotando 90° la polarización de uno de los haces (usando una placa de media onda, HWP) y haciendo coincidir ambos haces en un separador de haz (50-50 Beam Splitter) es posible generar estados enredados de dos fotones con polarizaciones ortogonales entre sí. Un esquema de una experiencia de este tipo se muestra en la Fig. D.2. Los fotones enredados inciden en analizadores orientables y luego son detectados (detección de un canal). Los detectores se conectan a un contador de coincidencias, lo cual descarta la mitad de los pares generados (solo aquellos pares que salen por lados opuestos del BS inciden en forma coincidente en los detectores). En [SA88] se utiliza este método para observar una violación de la desigualdad de Freedman por 3 desviaciones estándar. En una experiencia similar [OM88], se observa una violación de la desigualdad CH74, ec. (3.31), por 6σ . Mas recientemente, se ha propuesto un esquema basado en el uso de dos cristales birrefringentes con ejes ortogonales entre sí para producir, por PDC-I, pares de fotones colineales, enredados en polarización [KWW⁺99]. La intensidad de esta fuente es tan alta que, usando detección de un canal, se ha logrado una violación de una desigualdad de Bell por 242σ en menos de 3 minutos. Sin embargo, todas estas experiencias son susceptibles al menos a tres de los loopholes mencionados en la Sección pasada. Su interés principal reside en ser las primeras en mostrar que el proceso de conversión paramétrica es potencialmente útil como fuente de pares de fotones correlacionados

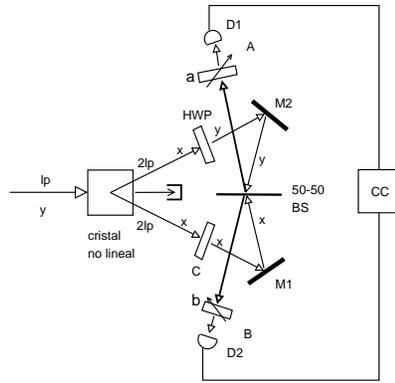


Figura D.2: Esquema de las experiencias [OM88, SA88] basadas en fotones generados por PDC de tipo I. Ambos fotones emergentes tienen polarizaci3n x . Con la HWP (placa de media onda) se rota la polarizaci3n del fot3n 2 (en el camino 1 hay un compensador C que no afecta la polarizaci3n). Ambos fotones interactúan en el separador (50-50 Beam Splitter, BS) y a la salida del BS est3n enredados. Luego inciden los filtros polarizadores orientables y son detectadas las coincidencias.

para experiencias EPR.

PDC tipo II

En la d6cada del 90 comienza una nueva generaci3n de experimentos para testear las desigualdades de Bell basados en PDC-II (Type II Parametric Down Conversion) como fuente de fotones enredados. En PDC de tipo II, ambos fotones emergen con direcciones de polarizaci3n *ortogonales* entre si, lo cual elimina la tarea de generar estados enredados a posteriori por medios 3pticos (como en PDC-I). En la Fig. D.3 (a), se muestra la geometría del proceso PDC-II. Los fotones emergentes est3n en dos conos con v6rtice com3n en el cristal. Un cono corresponde al rayo ordinario (o) con cierta polarizaci3n y el otro, al rayo extraordinario (e) con la polarizaci3n ortogonal al primero. En la intersecci3n de ambos conos los fotones est3n en un estado de superposici3n de ambas alternativas de polarizaci3n. Este estado se describe en la forma [KMWZ95],

$$\Psi = \frac{1}{\sqrt{2}} [|x_1, y_2\rangle + e^{i\alpha} |y_1, x_2\rangle] \quad (\text{D.2})$$

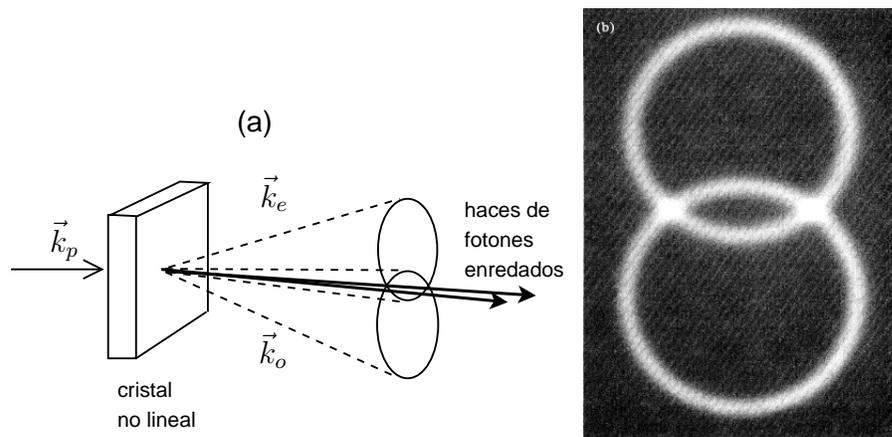


Figura D.3: (a) El haz ordinario (o) y el haz extraordinario (e) se distribuyen en conos a lados opuestos de la direcci3n de incidencia. Los fotonos en cada cono tienen polarizaciones ortogonales entre si. Las trayectorias de los fotonos enredados est3n dadas por la intersecci3n de los conos. (b) Fotografía de los fotonos generados por PDC-II, publicada en [KWW⁺99].

donde la fase relativa α puede ser ajustada experimentalmente. Los subíndices 1 y 2 corresponden a los diferentes caminos seguidos por los fotonos y las direcciones de polarizaci3n ortogonales se indican como (x, y) . Por ejemplo, seleccionando $\alpha = \pi$ se obtiene un estado singlete perfectamente anticorrelacionado, an3logo al originalmente propuesto por Bohm, ec. (2.5).

Algunas aplicaciones relevantes

La PDC-II fue usada (en el contexto de experiencias EPR) primero en [KSSA93] en forma colineal, de modo que ambos conos son tangentes y hay un solo haz emergente que contiene los fotonos enredados. El haz es separado en dos partes en un 50-50 BS (Beam Splitter) y cada una es enviada a los analizadores A y B conectados a un detector de coincidencias. En esta experiencia se observ3 una violaci3n de la desigualdad de Freedman por 22σ . En 1995 Kwiat et al. en Innsbruck [KMWZ95] usan el esquema no colineal mostrado en la Fig. D.3 para demostrar una violaci3n de la desigualdad de Bell por mas de 100σ en menos de 5 minutos. En estas experiencias, la novedad consisti3 en el mecanismo de generaci3n de pares enredados y se prest3 relativamente poca atenci3n al problema de los loopholes.

Bibliografía

- [AB03] M. Aspelmeyer and H.R. et al. Böhm. Long-distance free-space distribution of quantum entanglement. *Science*, 301:621, 2003.
- [AGR81] A. Aspect, P. Grangier, and R. Roger. Experimental tests of realistic local theories via Bell's theorem. *Phys. Rev. Lett.*, 47:460, 1981.
- [AGR82a] A. Aspect, P. Grangier, and R. Roger. Experimental realization of Einstein-Podolsky-Rosen-Bohm gedankenexperiment: a new violation of Bell's inequalities. *Phys. Rev. Lett.*, 49:91, 1982.
- [AGR82b] A. Aspect, P. Grangier, and R. Roger. Experimental test of Bell's inequalities using time-varying analyzers. *Phys. Rev. Lett.*, 49:1804, 1982.
- [Asp99] A. Aspect. Bell's inequality test: more ideal than ever. *Nature*, 398:189, 1999.
- [BA57] D. Bohm and Y. Aharonov. Discussion of experimental proof for the paradox of Einstein, Rosen and Podolsky. *Phys. Rev.*, 108:1070, 1957.
- [BB66] D. Bohm and J. Bub. A proposed solution of the measurement problem in quantum mechanics by a hidden variable theory. *Rev. Mod. Phys.*, 38:453, 1966.
- [BdM77] M. Bruno, M. d'Agostino, and C. Maroni. *Nuovo Cimento*, 40:B142–52, 1977.

- [Bel65] J.S. Bell. On the Einstein-Podolsky-Rosen paradox. *Physics*, 1:195–200, 1965. Reprinted in [Bel87].
- [Bel71] J.S. Bell. Introduction to the hidden-variable question. In *Foundations of Quantum Mechanics*, pages 171–181, New York, 1971. Proceedings of the International School of Physics “Enrico Fermi”, course IL, Academic Press. Reprinted in [Bel87].
- [Bel87] J.S. Bell. *Speakable and Unspeakable in Quantum Mechanics*. Cambridge University Press, Cambridge, 1987.
- [Bla00] R Blatt. Push-button entanglement. *Nature*, 404:231, 2000.
- [Boh35] N. Bohr. Can quantum-mechanical description of physical reality be considered complete? *Phys. Rev.*, 48:696, 1935.
- [Boh51] D. Bohm. *Quantum Theory*. Prentice Hall, New York, 1951.
- [Boh52] D. Bohm. A suggested interpretation of the quantum theory in terms of “hidden” variables. *Phys. Rev.*, 85:166–193, 1952.
- [Bor71] M. Born. *The Born-Einstein Letters, with comments by Max Born*. Walker and Co., New York, 1st edition, 1971.
- [CH74] J.F. Clauser and M.A. Horne. Experimental consequences of objective local theories. *Phys. Rev. D*, 10:526, 1974.
- [CHSH69] J.F. Clauser, M.A. Horne, A. Shimony, and R.A. Holt. Proposed experiment to test local hidden-variable theories. *Phys. Rev. Lett.*, 23:880, 1969.
- [Cla71] R.W. Clark. *Einstein: The life and times*. World Publishing Co., New York and Cleveland, 1971.
- [Cla76] J.F. Clauser. *Phys. Rev. Lett.*, 36:1223, 1976.
- [CS78] J.F. Clauser and A. Shimony. Bell’s theorem: experimental tests and implications. *Rep.Prog.Phys.*, 41:1881–1927, 1978.

- [CTDL77] C. Cohen-Tannoudji, B. Diu, and F. Laloë. *Quantum Mechanics*. John Wiley and Sons, New York, 1977.
- [Ein48] A. Einstein. Quantum mechanics and reality. *Dialectica*, page 320, 1948. Reprinted in [Bor71].
- [EPR35] A. Einstein, B. Podolsky, and N. Rosen. Can quantum-mechanical description of physical reality be considered complete? *Phys. Rev.*, 47:777, 1935.
- [F+74] G. Faraci et al. *Nuovo Cimento*, 9:607–11, 1974.
- [FC72] S.J. Freedman and J.F. Clauser. Experimental test of local hidden-variable theories. *Phys. Rev. Lett.*, 28:938, 1972.
- [Fra36] Note on the quantum-mechanical theory of measurement. *Phys. Rev.*, 49:393, 1936.
- [FT76] E.S. Fry and R.C. Thomson. Experimental test of local hidden-variable theories. *Phys. Rev. Lett.*, 37:465–8, 1976.
- [Fur36] W.H. Furry. Note on the quantum-mechanical theory of measurement. *Phys. Rev.*, 49:393, 1936.
- [GM87] A. Garg and N.D. Mermin. Detector efficiencies in the Einstein-Podolsky-Rosen experiment. *Phys. Rev. D*, 35:3831, 1987.
- [Gra01] P. Grangier. Count them all. *Nature*, 409:774, 2001.
- [HP73] R.A. Holt and F.M. Pipkin. Unpublished preprint, Harvard University. Holt, R.A. PhD thesis, Harvard University, 1973.
- [KC67] C.A. Kocher and E.D. Commins. Polarization correlation of photons emitted in atomic cascade. *Phys. Rev. Lett.*, 18:575, 1967.
- [KMWZ95] P.G. Kwiat, K. Mattle, H. Weinfurter, and A. Zeilinger. New high intensity source of polarization-entangled photon pairs. *Phys. Rev. Lett.*, 75:4337, 1995.

- [KOW01] C. Kuertsiefer, M. Oberparletier, and H. Weinfurter. Generation of correlated photon pairs in type-ii parametric down conversion – revisited. *J. Mod. Opt.*, 48:1997–2007, 2001.
- [KSSA93] T.E. Kiess, Y.H. Shih, A.V. Sergienko, and C.O. Alley. Einstein-Podolsky-Rosen-Bohm experiment using pairs of light quanta produced by Type-ii parametric down conversion. *Phys. Rev. Lett.*, 71:3893, 1993.
- [KUW75] L.R. Kasday, J.D. Ullman, and C.S. Wu. *Nuovo Cimento*, 25:B633–61, 1975.
- [KWW⁺99] P.G. Kwiat, E. Waks, A.G. White, I. Appelbaum, and P.H. Eberhard. Ultrabright source of polarizaton-entangled photons. *Phys. Rev. A*, 60:R773, 1999.
- [LRM76] M. Laméhi-Racht and W. Mittig. *Phys. Rev.*, 14:2543–55, 1976.
- [MdRT⁺04] I. Marcikic, H. de Riedmatten, W. Tittel, H. Zbinden, M. Legré, and N. Gisin. Distribution of time-bin entangled qubits over 50 km of optical fiber. *Phys. Rev. Lett.*, 93:180502, 2004.
- [Mes65] A. Messiah. *Mécanique Cuantique*. Dunod, Paris, 1965.
- [NC00] M.A. Nielsen and I. Chuang. *Quantum Computation and Quantum Information*. Cambridge University Press, Cambridge, 2000.
- [OM88] Z.Y. Ou and L. Mandel. Violation of Bell’s inequality and classical probability in a two-photon correlation experiment. *Phys. Rev. Lett.*, 61:50, 1988.
- [PBZ⁺05] C. Peng, X. Bao, J. Zhang, X. Jin, F. Feng, B. Yang, and J. Yang. Experimental free-space distribution of entangled photon pairs over 13 km: towards satellite-based global quantum communication. *Phys. Rev. Lett.*, 94:150501, 2005.
- [RKM⁺01] M.A. Rowe, D. Kielpinsky, V. Meyer, C.A. Sackett, W.M. Itano, C. Monroe, and D.J. Wineland. Experimental violation of a Bell’s inequality with efficient detection. *Nature*, 409:791, 2001.

- [SA88] Y.H. Shih and C.O. Alley. New type of Einstein-Podolsky-Rosen-Bohm experiment using pairs of light quanta produced by optical parametric down conversion. *Phys. Rev. Lett.*, 61:2921, 1988.
- [Sak85] J.J. Sakurai. *Modern Quantum Mechanics*. Adisson-Wesley Publishing co., Redwood City, CA, 1985.
- [SI03] C. Simon and W.T. Irvine. Robust long-distance entanglement and a loophole-free bell test with ions and photons. *Phys. Rev. Lett.*, 91, 2003.
- [SKK⁺00] C.A. Sackett, D. Kielpinski, B.E. King, C. Langer, V. Meyer, C.J. Myatt, M Rowe, Q.A. Turchette, W.M. Itano, D.J. Wineland, and C. Monroe. Experimental entanglement of four particles. 404:256, 2000.
- [TBG⁺98] W. Tittel, J. Brendel, B. Gisin, T. Herzog, H. Zbinden, and N. Gisin. Experimental demonstration of quantum correlations over more than 10 km. *Phys. Rev. A*, 57:3229, 1998.
- [TBZG98] W. Tittel, J. Brendel, H. Zbinden, and N. Gisin. Violation of bell inequalities by photons more than 10 km apart. *Phys. Rev. Lett.*, 81:3563, 1998.
- [TRO94] P.R. Tapster, J.G. Rarity, and P.C.M. Owens. Violation of bell's inequality over 4 km of optical fiber. *Phys. Rev. Lett.*, 73:1923, 1994.
- [WJWZ98] G. Weihs, T. Jennewein, H. Weinfurter, and A. Zeilinger. Violation of bell's inequality under strict Einstein locality conditions. *Phys. Rev. Lett.*, 81:5039, 1998.
- [WLB76] A.R. Wilson, J. Lowe, and D.K. Butt. *J. Phys. G: Nucl. Phys.*, 2:613–24, 1976.