

Notas de Cálculo 3 2014

Ana González

Índice general

1. Curvas paramétricas	5
1.1. Introducción	5
1.1.1. Velocidad y aceleración	5
1.2. Longitud de arco	6
1.2.1. Teoría local de curvas	8
1.3. Triedro de Frenet	9
2. Integrales de línea	13
2.1. Integrales de línea de campos escalares	13
2.2. Integrales de línea de campos vectoriales	14
2.2.1. Propiedades	16
3. Campos de gradientes	19
3.1. Integral de línea de un gradiente	19
4. Teorema de Green	23
5. Rotor y divergencia	31
5.1. Rotor y propiedades	31
5.2. Divergencia y propiedades	35
6. Superficies	37
6.1. Superficies parametrizadas	37
6.2. Superficies regulares	40
6.3. Plano tangente	41
6.3.1. Cálculo del plano tangente y de la recta normal	43
6.3.2. Primera forma fundamental	45

7. Integrales de superficies	49
8. Teorema de Stokes y de Gauss	57
8.1. Teorema de Stokes	57
8.1.1. Extensiones del teorema de Stokes	62
8.2. Reconstrucción de un campo vectorial a partir de su rotor	65
8.3. Teorema de Gauss	68
8.3.1. Interpretación intrínseca de la divergencia	71
8.3.2. Ley de Gauss del electromagnetismo	72
9. Formas diferenciales	75
9.1. Derivada exterior	78

Curvas paramétricas

1.1. Introducción

Definición 1.1.1. Una **curva paramétrica** es la imagen de una función $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ continua. La función γ se llama **parametrización** de la curva.

Ejemplo 1.1.1. 1. Sea $\gamma(t) = (a \cos t, a \sin t)$, $t \in \mathbb{R}$. La curva es la circunferencia de radio a y centro $(0, 0)$. Otra parametrización de la misma curva es $\beta(t) = (a \cos 2t, a \sin 2t)$, $t \in \mathbb{R}$. La diferencias entre estas dos parametrizaciones es la velocidad con la cual la recorren.

2. Hélice: $\gamma(t) = (a \cos t, a \sin t, bt)$, $t \in \mathbb{R}$.

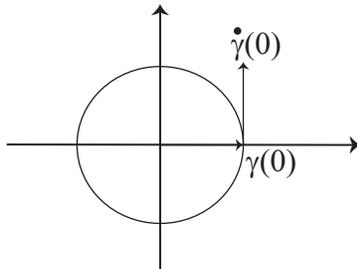
1.1.1. Velocidad y aceleración

Sea γ una curva diferenciable dada por $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$. La velocidad de la curva en un punto t es

$$\dot{\gamma}(t) = (\dot{x}(t), \dot{y}(t), \dot{z}(t))$$

Observación 1.1.2. Si existe el vector velocidad y es no nulo entonces es tangente a la curva con sentido que indica la orientación para t creciente.

Ejemplo 1.1.2. $\gamma(t) = (r \cos \omega t, r \sin \omega t)$ $0 \leq t \leq 2\pi$. Entonces $\dot{\gamma}(t) = (-r\omega \sin \omega t, r\omega \cos \omega t)$ en $t = 0$ tenemos $\gamma(0) = (r, 0)$ y $\dot{\gamma}(0) = (0, r\omega)$.



Definición 1.1.3. El **versor tangente** \vec{t} es el versor tangente a la curva (si existe) con sentido que indica la orientación de la curva. Si existe $\dot{\gamma}(t)$ y es $\neq 0$, entonces

$$\vec{t} = \frac{\dot{\gamma}(t)}{\|\dot{\gamma}(t)\|}.$$

La aceleración de la curva en un punto t es

$$\ddot{\gamma}(t) = (\ddot{x}(t), \ddot{y}(t), \ddot{z}(t))$$

Ejemplo 1.1.3. Para el círculo tenemos que

$$a(t) = \ddot{\gamma}(t) = -r\omega^2(\cos \omega t, \sin \omega t) = -\omega^2\gamma(t).$$

1.2. Longitud de arco

Considerar una trayectoria dada $\alpha(t)$. Podemos pensar $\alpha(t)$ como la trayectoria de una partícula con rapidez $s(t) = \|\alpha'(t)\|$, esta trayectoria traza una curva en el espacio. ¿Cuál es la longitud de esta curva conforme t varía de, digamos, a a b ? Intuitivamente, esto debiera ser precisamente el total de la distancia recorrida, esto es $\int_a^b S(t)dt$. Esto nos conduce a lo siguiente.

Definición 1.2.1. Sea $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ una trayectoria de clase C^1 . La **longitud** de α está definida como

$$l(\alpha) = \int_a^b \|\dot{\alpha}(t)\| dt.$$

Para curvas en \mathbb{R}^3 Si notamos a la curva $\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t))$, la fórmula es

$$l(\alpha) = \int_a^b \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2} dt,$$

y para curvas en \mathbb{R}^2 , $\alpha(t) = (x(t), y(t))$, la fórmula es

$$l(\alpha) = \int_a^b \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} dt.$$

Ejemplo 1.2.1. La longitud de arco de la curva $\alpha(t) = (r \cos t, r \sin t)$, para $0 \leq t \leq 2\pi$, es

$$l = \int_0^{2\pi} \sqrt{(-r \sin t)^2 + (r \cos t)^2} dt = 2\pi r,$$

lo cual no es más que la circunferencia de un círculo de radio r . Si permitimos que $0 \leq t \leq 4\pi$, hubiéramos obtenido $4\pi r$, pues la trayectoria recorrería dos veces el mismo círculo.

Ejemplo 1.2.2. Hallar la longitud de arco de la hélice definida por $\rho : [0, 4\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$, $t \mapsto (\cos 2t, \sin 2t, \sqrt{5}t)$.

El vector velocidad es $\dot{\rho}(t) = (-2 \sin 2t, 2 \cos 2t, \sqrt{5})$ que tiene módulo

$$\|\dot{\rho}(t)\| = \sqrt{4(\sin 2t)^2 + 4(\cos 2t)^2 + 5} = \sqrt{9} = 3.$$

Entonces la longitud de arco de ρ es

$$l(\rho) = \int_0^{4\pi} \|\dot{\rho}(t)\| dt = \int_0^{4\pi} 3 dt = 12\pi.$$

Definición 1.2.2. Sea $\gamma(t)$ una curva regular. Definimos la **función de longitud de arco** $s(t)$ como

$$s(t) = \int_a^t \|\dot{\gamma}(\tau)\| d\tau.$$

La función $s(t)$ nos da la longitud del arco recorrido entre los tiempos a y t . Observar que s es una función continua, con derivada

$$\dot{s}(t) = \|\dot{\gamma}(t)\|$$

continua y positiva. Entonces, por el teorema de la función inversa, existe una función $t(s)$ diferenciable con derivada

$$\dot{t}(s) = \frac{dt}{ds} = \frac{1}{\dot{s}} = \frac{1}{\|\dot{\gamma}\|}.$$

Consideremos la reparametrización de la curva γ por $\alpha(s) = \gamma(t(s))$, donde el nuevo parámetro es la longitud de arco. Aplicando la regla de la cadena tenemos que

$$\alpha'(s) = \frac{d\alpha}{ds} = \dot{\gamma}(t)\dot{t}(s) = \frac{\dot{\gamma}}{\|\dot{\gamma}\|} \Rightarrow \|\alpha'(s)\| = 1, \forall s.$$

Parametrizar una curva por longitud de arco equivale a recorrer la curva con velocidad de módulo constante igual a 1.

Ejemplo 1.2.3. Consideremos la hélice $\gamma(t) = (a \cos t, a \sin t, bt)$. Hallar la parametrización por longitud de arco de esta curva.

$$\dot{\gamma}(t) = (-a \sin t, a \cos t, b) \Rightarrow \|\dot{\gamma}(t)\| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Entonces

$$s(t) = \int_0^t \sqrt{a^2 + b^2} d\tau = \sqrt{a^2 + b^2}t \Rightarrow t(s) = \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

La parametrización de la hélice por longitud de arco es

$$\alpha(s) = \left(a \cos \left(\frac{s}{c} \right), a \sin \left(\frac{s}{c} \right), b \frac{s}{c} \right),$$

donde $c = \sqrt{a^2 + b^2}$.

1.2.1. Teoría local de curvas

Estudio desde el punto de vista geométrico. Queremos definir parámetros locales que describan propiedades geométricas de las curvas.

Vamos a considerar curvas parametrizadas por longitud de arco.

Lema 1.2.3. Sea $\beta : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ diferenciable tal que $\|\beta(s)\| = c$ para todo $s \in I$. Entonces $\beta'(s) \perp \beta(s)$ para todo $s \in I$.

Definición 1.2.4. $\|\beta(s)\| = c \Rightarrow \beta(s) \cdot \beta(s) = c^2$. Derivando obtenemos que

$$\beta'(s) \cdot \beta(s) + \beta(s) \cdot \beta'(s) = 0 \Rightarrow \beta'(s) \cdot \beta(s) = 0 \Rightarrow \beta'(s) \perp \beta(s) \forall s \in I.$$

Definición 1.2.5. Sea α parametrizada por longitud de arco. El versor $\vec{t}(s) = \alpha'(s)$ se llama **versor tangente** a la curva. El número $k(s) = \|\alpha''(s)\|$ se llama **curvatura** de α en s .

Observación 1.2.6. Veamos que $k(s)$ nos da una idea de la rapidez con que la curva cambia su dirección. Sean $s_0, s \in I$ y $\varphi(s)$ el ángulo que forman $\vec{t}(s)$ y $\vec{t}(s_0)$. Como $\|\vec{t}(s)\| = \|\vec{t}(s_0)\| = 1$ tenemos que $\|\vec{t}(s) - \vec{t}(s_0)\| = 2 \sin\left(\frac{\varphi(s)}{2}\right)$.

Si tomamos el límite cuando $s \rightarrow s_0$ tenemos que $\varphi(s) \rightarrow 0$ y $\|\vec{t}(s) - \vec{t}(s_0)\| \sim \varphi(s) = \varphi(s) - \varphi(s_0)$. Entonces

$$\|\alpha''(s_0)\| = \lim_{s \rightarrow s_0} \frac{\|\vec{t}(s) - \vec{t}(s_0)\|}{s - s_0} = \lim_{s \rightarrow s_0} \frac{\varphi(s) - \varphi(s_0)}{s - s_0} = \varphi'(s_0).$$

Entonces $k(s_0) = \varphi'(s_0)$ mide la rapidez con que cambia el ángulo de la tangente en el punto s_0 .

Teorema 1.2.7. Sea $\beta : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ diferenciable tal que $\|\alpha'(s)\| = 1$ para todo $s \in I$. Entonces

$$k(s) = 0 \text{ en } I \Leftrightarrow \alpha(I) \text{ está contenida en una recta.}$$

Demostración. (\Rightarrow) $\alpha''(s) = 0$ en I entonces integrando $\alpha'(s) = \text{cte} = \mathbf{v}$ en $I \Rightarrow \alpha(s) = \mathbf{v}s + \mathbf{u}$, con \mathbf{u}, \mathbf{v} constantes. Las ecuaciones $\alpha(s) = \mathbf{v}s + \mathbf{u}$, $s \in \mathbb{R}$ definen una recta en el espacio.

(\Leftarrow) $\alpha(I)$ contenido en una recta, puedo escoger dos versores \mathbf{u}, \mathbf{v} perpendiculares a la recta y entre sí. Se cumple

$$(\alpha(s) - \alpha(s_0)) \cdot \mathbf{u} = 0$$

$$(\alpha(s) - \alpha(s_0)) \cdot \mathbf{v} = 0$$

Derivando, obtenemos que $\alpha'(s) \cdot \mathbf{u} = 0$, $\alpha'(s) \cdot \mathbf{v} = 0$. Entonces $\alpha'(s) \perp \mathbf{u}$, $\alpha'(s) \perp \mathbf{v} \Rightarrow \alpha'(s)$ es colineal con $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$

$$\alpha'(s) = \lambda(s)(\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}), \lambda \in \mathbb{R}.$$

Como $\|\alpha'(s)\| = |\lambda(s)| = 1$ entonces $\lambda(s) = \mp 1$ para todo $s \in I$. Como $\lambda(s)$ es continua sólo se puede tomar uno de los dos valores, entonces $\lambda(s)$ es constante. Por lo tanto $\lambda'(s) = 0$ para todo $s \in I$. Entonces

$$\alpha''(s) = \lambda'(s)(\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}) = 0 \Rightarrow \kappa(s) = 0.$$

□

Ejemplo 1.2.4. Sea $\gamma(t) = (R \cos t, R \sin t)$ la circunferencia de centro $(0,0)$ y radio R . La parametrización por longitud de arco es

$$\alpha(s) = \left(R \cos \left(\frac{s}{R} \right), R \sin \left(\frac{s}{R} \right) \right)$$

Entonces

$$\alpha''(s) = -\frac{1}{R} \left(\cos \left(\frac{s}{R} \right), \sin \left(\frac{s}{R} \right) \right) \Rightarrow \kappa(s) = \frac{1}{R}.$$

Cuanto mayor es el radio de la circunferencia más lentamente se curva y menor es la curvatura.

Definición 1.2.8. Sea α parametrizada por longitud de arco, $\kappa(s) \neq 0$. El número $\rho(s) = \frac{1}{\kappa(s)}$ se llama **radio de curvatura**.

Definición 1.2.9. Sea α parametrizada por longitud de arco, $\kappa(s) \neq 0$. El vector $\vec{\mathbf{n}}(s) = \frac{\alpha''(s)}{\kappa(s)}$ se llama vector **normal** a la curva.

Observación 1.2.10. Como $\vec{\mathbf{t}}(s) = \alpha'(s)$ tiene módulo constante deducimos que $\alpha' \perp \alpha''$. Entonces $\vec{\mathbf{t}}(s) \perp \vec{\mathbf{n}}(s)$. El vector tangente a la curva y el normal son ortogonales.

Ejemplo 1.2.5. Consideremos la curva $\alpha(s) = (R \cos(\frac{s}{R}), R \sin(\frac{s}{R}))$. Entonces

$$\alpha''(s) = -\frac{1}{R} \left(\cos \left(\frac{s}{R} \right), \sin \left(\frac{s}{R} \right) \right),$$

entonces $\kappa(s) = \frac{1}{R}$ y $\vec{\mathbf{n}}(s) = -\left(\cos \left(\frac{s}{R} \right), \sin \left(\frac{s}{R} \right) \right)$.

Definición 1.2.11. El plano que pasa por $\alpha(s)$ determinado por los vectores $\vec{\mathbf{t}}$ y $\vec{\mathbf{n}}$ se llama **plano osculador**. Al punto $Q = \alpha(s) + \rho(s)\vec{\mathbf{n}}(s)$ se llama **centro de curvatura**.

La circunferencia en plano osculador de centro Q y radio $\rho(s)$ se llama **circunferencia osculatriz**.

1.3. Triedro de Frenet

Definición 1.3.1. Dada una curva α tal que $\kappa(s) \neq 0$ definimos $\vec{\mathbf{b}}(s) = \vec{\mathbf{t}}(s) \wedge \vec{\mathbf{n}}(s)$ que completa una terna ortonormal. A este vector se lo llama **binormal** y al conjunto $\{\vec{\mathbf{t}}, \vec{\mathbf{n}}, \vec{\mathbf{b}}\}$ se lo llama **triedro de Frenet** de la curva en s .

El plano por $\alpha(s)$ con vectores $\vec{\mathbf{b}}$ y $\vec{\mathbf{n}}$ se llama **plano normal** a la curva y el plano por $\alpha(s)$ con vectores $\vec{\mathbf{t}}$ y $\vec{\mathbf{b}}$ se llama **plano rectificante**.

Proposición 1.3.2. Sea α tal que $\|\alpha'(s)\| = 1$ y $k(s) \neq 0$ para todo s . Entonces el vector $\mathbf{b}'(s)$ es colineal con $\mathbf{n}(s)$.

Demostración. Como $\|\mathbf{b}(s)\| = 1$ tenemos que $\mathbf{b}' \perp \mathbf{b}$. Además $\mathbf{b} = \mathbf{t} \wedge \mathbf{n}$, entonces $\mathbf{b}' = \mathbf{t}' \wedge \mathbf{n} + \mathbf{t} \wedge \mathbf{n}' = k\mathbf{n} \wedge \mathbf{n} + \mathbf{t} \wedge \mathbf{n}' = \mathbf{t} \wedge \mathbf{n}'$ por lo tanto $\mathbf{b}' \perp \mathbf{t}$. de estas dos propiedades concluimos que \mathbf{b}' es colineal con \mathbf{n} . \square

Definición 1.3.3. Como $\mathbf{b}'(s)$ es colineal con $\mathbf{n}(s)$ existe $\tau(s)$ escalar tal que

$$\mathbf{b}'(s) = -\tau(s)\mathbf{n}(s),$$

$\tau(s)$ se llama **torsión** de α en s .

Observar que la variación de \mathbf{b} con s corresponde a la variación del plano osculador (perpendicular a \mathbf{b}). Por lo tanto $\tau(s)$ mide la rapidez con la cual la curva $\alpha(s)$ “se sale” de un plano.

Teorema 1.3.4. Sea $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $\|\alpha'(s)\| = 1$, $k(s) \neq 0$ para todo s . Entonces $\tau(s) = 0$ en $I \Leftrightarrow \alpha(I)$ está contenida en un plano.

Demostración. (\Rightarrow) $\tau = 0$ entonces $\mathbf{b}'(s) = 0$ entonces $\mathbf{b}(s) = \mathbf{b}_0$ constante. Consideremos

$$(\alpha(s) \cdot \mathbf{b}_0)' = \alpha'(s) \cdot \mathbf{b}_0 + \alpha(s) \cdot \mathbf{b}'_0 = \alpha'(s) \cdot \mathbf{b}_0 = \mathbf{t} \cdot \mathbf{b}_0 = 0.$$

Entonces $\alpha(s) \cdot \mathbf{b}_0 = d$ (constante), de lo cual deducimos que $\alpha(s) \cdot \mathbf{b}_0 - \alpha(s_0) \cdot \mathbf{b}_0 = 0 \Rightarrow (\alpha(s) - \alpha(s_0)) \cdot \mathbf{b}_0 = 0$ para todo $s \in I$. Entonces $\alpha(s)$ está en el plano ortogonal a \mathbf{b}_0 pasando por $\alpha(s_0)$.

(\Leftarrow) Supongamos $\alpha(s)$ pertenece a un plano π para todo $s \in I$. Sea \mathbf{u} un versor normal al plano π . Entonces $\alpha(s) - \alpha(s_0) \perp \mathbf{u}$ para todo $s \in I$. Por lo tanto $(\alpha(s) - \alpha(s_0)) \cdot \mathbf{u} = 0$, para todo $s \in I$.

Derivando esta igualdad obtenemos que $\alpha'(s) \cdot \mathbf{u} = 0 \Rightarrow \mathbf{t}(s) \cdot \mathbf{u} = 0$ ($\mathbf{t} \perp \mathbf{u}$). Derivando nuevamente obtenemos que $\mathbf{n} \cdot \mathbf{u} = 0$ por lo cual $\mathbf{n} \perp \mathbf{u}$. De estas dos condiciones deducimos que \mathbf{u} es colineal con $\mathbf{b}(s)$ para todo $s \in I$. Entonces $\mathbf{b}(s) = \pm \mathbf{u}$ para todo $s \in I$. Como $\mathbf{b}(s)$ es continua tenemos que $\mathbf{b}(s)$ es constante y por lo tanto $\mathbf{b}'(s) = 0$, de lo cual deducimos que $\tau(s) = 0$ para todo $s \in I$. \square

Fórmulas de Frenet: Las siguientes fórmulas nos dan las derivadas de los versores del triedro de Frenet

$$\begin{cases} \mathbf{t}' = k\mathbf{n} \\ \mathbf{n}' = -k\mathbf{t} + \tau\mathbf{b} \\ \mathbf{b}' = -\tau\mathbf{n} \end{cases} \quad \text{o también} \quad \begin{pmatrix} \mathbf{t}' \\ \mathbf{n}' \\ \mathbf{b}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & k & 0 \\ -k & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{t} \\ \mathbf{n} \\ \mathbf{b} \end{pmatrix}.$$

La primera fórmula es la definición de k ($\mathbf{t}' = k\mathbf{n}$) la última es la definición de τ . Veamos como deducir la segunda fórmula.

Recordemos que $\mathbf{n} = \mathbf{b} \wedge \mathbf{t}$, si derivamos esta ecuación obtenemos que

$$\mathbf{n}' = \mathbf{b}' \wedge \mathbf{t} + \mathbf{b} \wedge \mathbf{t}' = -\tau(\mathbf{n} \wedge \mathbf{t}) + \mathbf{b} \wedge (k\mathbf{n}) = \tau(\mathbf{t} \wedge \mathbf{n}) - k(\mathbf{n} \wedge \mathbf{b}) = \tau\mathbf{b} - k\mathbf{t}.$$

Cálculo explícito de la torsión:

$$\tau(s) = \frac{(\alpha'(s), \alpha''(s), \alpha'''(s))}{k(s)^2}.$$

Recordar que $(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) = (\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w}$.

Para probar esto usaremos la segunda fórmula de Frenet:

$$\mathbf{b} \cdot \mathbf{n}' = \mathbf{b} \cdot (-k\mathbf{t} + \tau\mathbf{b}) = -k\mathbf{b} \cdot \mathbf{t} + \tau\mathbf{b} \cdot \mathbf{b} = \tau.$$

$$\begin{aligned} \tau(s) = \mathbf{b} \cdot \mathbf{n}' &= (\mathbf{t} \wedge \mathbf{n}) \cdot \left(\frac{\alpha''}{k}\right)' = \left(\alpha' \wedge \frac{\alpha''}{k}\right) \cdot \left(\frac{\alpha'''}{k} + \alpha'' \left(\frac{-k'}{k^2}\right)\right) \\ &= \left(\alpha' \wedge \frac{\alpha''}{k}\right) \cdot \frac{\alpha'''}{k} - \left(\alpha' \wedge \frac{\alpha''}{k}\right) \cdot \alpha'' \left(\frac{k'}{k^2}\right) \\ &= \left(\alpha' \wedge \frac{\alpha''}{k}\right) \cdot \frac{\alpha'''}{k} = \frac{(\alpha' \wedge \alpha'') \cdot \alpha'''}{k^2} \\ &= \frac{(\alpha', \alpha'', \alpha''')}{k^2}. \end{aligned}$$

Ejemplo 1.3.1. Consideremos la hélice parametrizada por longitud de arco

$$\alpha(s) = \left(a \cos\left(\frac{s}{c}\right), a \sin\left(\frac{s}{c}\right), b \frac{s}{c}\right),$$

donde $c = \sqrt{a^2 + b^2}$.

$$\mathbf{t}(s) = \alpha'(s) = \left(-\frac{a}{c} \sin\left(\frac{s}{c}\right), \frac{a}{c} \cos\left(\frac{s}{c}\right), \frac{b}{c}\right),$$

$$\alpha''(s) = -\frac{a}{c^2} \left(\cos\left(\frac{s}{c}\right), \sin\left(\frac{s}{c}\right), 0\right) \Rightarrow k(s) = \frac{a}{c^2} = \frac{a}{a^2 + b^2}.$$

$$\mathbf{n}(s) = -\left(\cos\left(\frac{s}{c}\right), \sin\left(\frac{s}{c}\right), 0\right) \quad \text{paralelo al plano } xy,$$

$$\mathbf{b}(s) = \mathbf{t}(s) \wedge \mathbf{n}(s) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -\frac{a}{c} \sin\left(\frac{s}{c}\right) & \frac{a}{c} \cos\left(\frac{s}{c}\right) & \frac{b}{c} \\ -\cos\left(\frac{s}{c}\right) & -\sin\left(\frac{s}{c}\right) & 0 \end{vmatrix} = \left(-\frac{b}{c} \sin\left(\frac{s}{c}\right), -\frac{b}{c} \cos\left(\frac{s}{c}\right), \frac{a}{c}\right),$$

$$\mathbf{b}'(s) = \frac{b}{c^2} \left(\cos\left(\frac{s}{c}\right), \sin\left(\frac{s}{c}\right), 0\right) = -\frac{b}{c^2} \mathbf{n}(s),$$

Entonces

$$\tau(s) = \frac{b}{c^2} = \frac{b}{a^2 + b^2}.$$

En este ejemplo tanto la torsión como la curvatura son constantes.

Caso en que el parámetro no es la longitud de arco Sea $\gamma(t)$ una curva cualquiera, el camino para hallar \mathbf{t} , \mathbf{n} , \mathbf{b} , \mathbf{k} , τ sería reparametrizar la curva por longitud de arco y luego aplicar las fórmulas anteriores. Es más cómodo, sin embargo, tener fórmulas explícitas.

$$\begin{aligned}\vec{\mathbf{t}} &= \frac{\dot{\gamma}}{\|\dot{\gamma}\|}, & \vec{\mathbf{b}} &= \frac{\dot{\gamma} \wedge \ddot{\gamma}}{\|\dot{\gamma} \wedge \ddot{\gamma}\|}, & \vec{\mathbf{n}} &= \mathbf{b} \wedge \mathbf{t} = \frac{(\dot{\gamma} \wedge \ddot{\gamma}) \wedge \dot{\gamma}}{\|(\dot{\gamma} \wedge \ddot{\gamma}) \wedge \dot{\gamma}\|}, \\ & & \mathbf{k} &= \frac{\|\dot{\gamma} \wedge \ddot{\gamma}\|}{\|\dot{\gamma}\|^3}, & \tau &= \frac{(\dot{\gamma}, \ddot{\gamma}, \ddot{\gamma})}{\|\dot{\gamma} \wedge \ddot{\gamma}\|^2}.\end{aligned}$$

Veamos como deducir estas fórmulas: $\gamma(t) = \alpha(s(t))$ donde s es la longitud de arco ($\dot{s}(t) = \|\dot{\gamma}(t)\|$). Derivando, usando la regla de la cadena, tenemos que

$$\dot{\gamma} = \alpha' \dot{s} = \vec{\mathbf{t}} \|\dot{\gamma}\| \Rightarrow \vec{\mathbf{t}} = \frac{\dot{\gamma}}{\|\dot{\gamma}\|}.$$

Derivando nuevamente tenemos que

$$\begin{aligned}\ddot{\gamma} &= \alpha'' \dot{s}^2 + \alpha' \ddot{s} = \mathbf{k} \vec{\mathbf{n}} \|\dot{\gamma}\|^2 + \vec{\mathbf{t}} \ddot{s} \\ \Rightarrow \dot{\gamma} \wedge \ddot{\gamma} &= \vec{\mathbf{t}} \|\dot{\gamma}\| \wedge (\mathbf{k} \vec{\mathbf{n}} \|\dot{\gamma}\|^2 + \vec{\mathbf{t}} \ddot{s}) = \mathbf{k} \|\dot{\gamma}\|^3 (\mathbf{t} \wedge \mathbf{n}) = \mathbf{k} \|\dot{\gamma}\|^3 \mathbf{b} \\ \Rightarrow \vec{\mathbf{b}} &= \frac{\dot{\gamma} \wedge \ddot{\gamma}}{\|\dot{\gamma} \wedge \ddot{\gamma}\|} \quad \text{y} \quad \|\dot{\gamma} \wedge \ddot{\gamma}\| = \mathbf{k} \|\dot{\gamma}\|^3\end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned}\mathbf{k} &= \frac{\|\dot{\gamma} \wedge \ddot{\gamma}\|}{\|\dot{\gamma}\|^3}, \\ (\dot{\gamma} \wedge \ddot{\gamma}) \wedge \dot{\gamma} &= \mathbf{k} \|\dot{\gamma}\|^3 \mathbf{b} \wedge \mathbf{t} \|\dot{\gamma}\| = \mathbf{k} \|\dot{\gamma}\|^4 \mathbf{b} \wedge \mathbf{t} = \mathbf{k} \|\dot{\gamma}\|^4 \mathbf{n} \\ \Rightarrow \vec{\mathbf{n}} &= \frac{(\dot{\gamma} \wedge \ddot{\gamma}) \wedge \dot{\gamma}}{\|(\dot{\gamma} \wedge \ddot{\gamma}) \wedge \dot{\gamma}\|} \quad \text{y} \quad \|(\dot{\gamma} \wedge \ddot{\gamma}) \wedge \dot{\gamma}\| = \mathbf{k} \|\dot{\gamma}\|^4.\end{aligned}$$

Para deducir la fórmula de τ hay que calcular $(\dot{\gamma}, \ddot{\gamma}, \ddot{\gamma})$ en función de $(\alpha', \alpha'', \alpha''')$.

Integrales de línea

2.1. Integrales de línea de campos escalares

Definición 2.1.1. Sea $f : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ un campo escalar continuo, $\alpha : [a, b] \rightarrow U$ un camino regular a trozos y sea $C = \text{Im}(\alpha)$ la curva descrita por α . La **integral de línea** de f a lo largo de C se representa

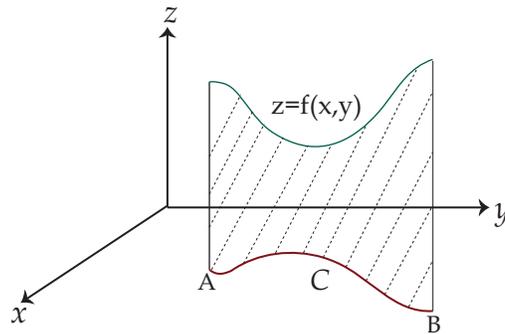
$$\int_C f ds$$

y se define por

$$\int_C f ds = \int_a^b f(\alpha(t)) \|\alpha'(t)\| dt.$$

Si el camino α es cerrado se suele indicar esta circunstancia con la utilización del símbolo \oint_C en vez de \int_C .

Interpretación geométrica: Si $f(x, y) \geq 0$ sobre los puntos de C , entonces la integral se puede interpretar como el área lateral de la porción de superficie que tiene como base en $z = 0$ la curva C y como altura $z = f(x, y)$ para los $(x, y) \in C$, como se muestra en la figura



Propiedades

1. **Linealidad:** Para cualesquiera escalares λ, μ ,

$$\int_C (\lambda f + \mu g) ds = \lambda \int_C f ds + \mu \int_C g ds.$$

2. **Aditividad:** Si C_1, C_2 son tales que $C = C_1 \cup C_2$, entonces

$$\int_C f ds = \int_{C_1} f ds + \int_{C_2} f ds$$

3. **Independencia de la parametrización:** Sean $(\alpha, [a, b])$ y $(\beta, [c, d])$ dos parametrizaciones equivalentes de la misma curva C y $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ campo escalar continuo, entonces

$$\int_a^b f(\alpha(t)) \|\alpha'(t)\| dt = \int_c^d f(\beta(t)) \|\beta'(t)\| dt.$$

Ejemplo 2.1.1. Consideremos el campo escalar $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ definido en todo \mathbb{R}^3 y la curva helicoidal dada por $\gamma(t) = (\cos t, \sin t, t)$ con $0 \leq t \leq 4\pi$. Hallar $\int_C f ds$.

$$f(\gamma(t)) = \cos^2 t + \sin^2 t + t^2 = 1 + t^2$$

y

$$\gamma'(t) = (-\sin t, \cos t, 1) \Rightarrow \|\gamma'(t)\| = \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t + 1} = \sqrt{2}.$$

Por lo tanto

$$\int_C f ds = \int_0^{4\pi} \sqrt{2}(1 + t^2) dt = \sqrt{2} \int_0^{4\pi} (1 + t^2) dt = \sqrt{2} \left(t + \frac{t^3}{3} \right) \Big|_0^{4\pi} = 4\sqrt{2}\pi \left(1 + \frac{16}{3}\pi^2 \right).$$

2.2. Integrales de línea de campos vectoriales

Definición 2.2.1. Sea $\vec{X}: U \rightarrow \mathbb{R}^3$ un campo vectorial continuo en un conjunto $U \subset \mathbb{R}^3$ y C una curva regular a trozos contenida en U (con parametrización $\alpha: [a, b] \rightarrow U$). Definimos la **integral de línea de \vec{X} a lo largo de C** como

$$\int_C \vec{X} \cdot ds = \int_a^b \vec{X}(\alpha(t)) \cdot \alpha'(t) dt.$$

Ejemplo 2.2.1. Consideremos el campo vectorial en \mathbb{R}^3 definido por $X(x, y, z) = (x, y, z)$ y el camino helicoidal

$$x = \cos t, \quad y = \sin t, \quad z = t \quad (0 \leq t \leq 4\pi).$$

Tenemos entonces que $\vec{X}(\alpha(t)) \cdot \alpha'(t) = (\cos t, \sin t, t) \cdot (-\sin t, \cos t, 1) = t$. Por lo cual

$$\int_C \vec{X} \cdot ds = \int_0^{4\pi} t dt = \frac{1}{2} t^2 \Big|_0^{4\pi} = 8\pi^2.$$

Notación clásica: Sea $\vec{X} = (P, Q, R)$ un campo vectorial en el espacio continuo sobre una curva regular a trozos C , parametrizada por $\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t))$ con $a \leq t \leq b$. Se tiene por definición:

$$\int_C \vec{X} \cdot ds = \int_a^b [P(x(t), y(t), z(t))x'(t) + Q(x(t), y(t), z(t))y'(t) + R(x(t), y(t), z(t))z'(t)] dt.$$

lo que explica que frecuentemente se use la notación:

$$\int_C \vec{X} \cdot ds = \int_C P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz = \int_C Pdx + Qdy + Rdz.$$

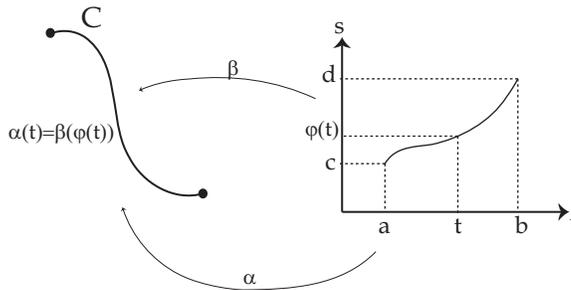
Las expresiones $\omega = Pdx + Qdy + Rdz$ se denominan **1-formas diferenciales** o **formas diferenciales de grado 1**.

Ejemplo 2.2.2. Consideremos la integral de línea $\int_C x^2 dx + xy dy + dz$ donde C tiene por ecuaciones $x = t, y = t^2, z = 1, 0 \leq t \leq 1$. Entonces $X(x, y, z) = (x^2, xy, 1)$ y

$$\int_C x^2 dx + xy dy + dz = \int_0^1 t^2 + 2t^4 dt = \frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{5}2t^5 \Big|_0^1 = \frac{1}{3} + \frac{2}{5} = \frac{11}{15}.$$

Independencia de la parametrización:

Definición 2.2.2. Dos parametrizaciones $(\alpha, [a, b])$ y $(\beta, [c, d])$ de la misma curva C son equivalentes si $\exists \varphi : [a, b] \rightarrow [c, d]$ de clase C^1 sobreyectiva con $\varphi'(t) > 0$ para todo $t \in [a, b]$ y tal que $\alpha(t) = \beta(\varphi(t))$ para todo $t \in [a, b]$.



Proposición 2.2.3. Sean $(\alpha, [a, b])$ y $(\beta, [c, d])$ dos parametrizaciones equivalentes de la misma curva C y $\vec{X} : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ campo vectorial continuo, entonces

$$\int_a^b \vec{X}(\alpha(t)) \cdot \alpha'(t) dt = \int_c^d \vec{X}(\beta(t)) \cdot \beta'(t) dt.$$

Demostración. Como α y β son equivalentes $\exists \varphi : [a, b] \rightarrow [c, d]$ biyectiva creciente de clase C^1 tal que $\alpha(t) = \beta(\varphi(t))$, entonces

$$\vec{X}(\alpha(t)) \cdot \alpha'(t) = \vec{X}(\beta(\varphi(t))) \cdot (\beta(\varphi(t)))' = \vec{X}(\beta(\varphi(t))) \cdot \beta'(\varphi(t)) \varphi'(t).$$

Entonces

$$\int_a^b \vec{X}(\alpha(t)) \cdot \alpha'(t) dt = \int_a^b \vec{X}(\beta(\varphi(t))) \cdot \beta'(\varphi(t)) \varphi'(t) dt$$

Haciendo el cambio de variable $u = \varphi(t)$ ($du = \varphi'(t) dt$) tenemos que

$$\int_a^b \vec{X}(\alpha(t)) \cdot \alpha'(t) dt = \int_c^d \vec{X}(\beta(u)) \cdot \beta'(u) du.$$

□

2.2.1. Propiedades

Sea C la curva en \mathbb{R}^3 descrita por un camino regular a trozos α definido sobre $[a, b]$, y sean \vec{X}, \vec{Y} campos vectoriales definidos y acotados sobre C . Se verifica:

(i) (**Linealidad respecto del integrando**) Para cualesquiera escalares λ, μ ,

$$\int_C (\lambda \vec{X} + \mu \vec{Y}) \cdot ds = \lambda \int_C \vec{X} \cdot ds + \mu \int_C \vec{Y} \cdot ds.$$

(ii) (**Aditividad respecto al camino de integración**) Si C_1, C_2 son tales que $C = C_1 \cup C_2$ (si $\alpha(t)$ parametrización de C entonces al variar t en $[a, c]$ tenemos una parametrización de C_1 y al variar t en $[c, b]$ tenemos una parametrización de C_2 , con $a < c < b$), entonces

$$\int_C \vec{X} \cdot ds = \int_{C_1} \vec{X} \cdot ds + \int_{C_2} \vec{X} \cdot ds$$

(iii) (**Continuidad**) $\left| \int_C \vec{X} \cdot ds \right| \leq Ml(C)$. Donde $M = \max\{|\vec{X}(p)| : p \in C\}$ y $l(C)$ es la longitud de arco de la curva C .

$$\begin{aligned} \left| \int_C \vec{X} \cdot ds \right| &= \left| \int_a^b \vec{X}(\alpha(t)) \cdot \alpha'(t) dt \right| \leq \int_a^b |\vec{X}(\alpha(t)) \cdot \alpha'(t)| dt \\ &\leq \int_a^b \|\vec{X}(\alpha(t))\| \|\alpha'(t)\| dt \leq \int_a^b M \|\alpha'(t)\| dt = Ml(C). \end{aligned}$$

(iv) (**Cambio de orientación**) $\int_C \vec{X} \cdot ds = - \int_{-C} \vec{X} \cdot ds$, donde $-C$ es la misma curva pero recorrida en sentido contrario.

Sea $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ parametrización de C , entonces consideremos $\beta : [-b, -a] \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por $\beta(t) = \alpha(-t)$ esta es una parametrización de $-C$. Entonces

$$\begin{aligned} \int_{-C} \vec{X} \cdot ds &= \int_{-b}^{-a} \vec{X}(\beta(t)) \cdot \beta'(t) dt = \int_{-b}^{-a} -\vec{X}(\alpha(-t)) \cdot \alpha'(-t) dt \\ &= \int_b^a \vec{X}(\alpha(u)) \cdot \alpha'(u) du = - \int_a^b \vec{X}(\alpha(u)) \cdot \alpha'(u) du = - \int_C \vec{X} \cdot ds. \end{aligned}$$

Ejemplo 2.2.3. Consideremos el campo vectorial $X(x, y) = (\sqrt{y}, x^3 + y)$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $y \geq 0$. calcular la integral de línea de X desde $(0, 0)$ hasta $(1, 1)$ a lo largo de las siguientes curvas:

(a) La recta $x(t) = t$, $y(t) = t$ con $0 \leq t \leq 1$.

Parametrización $\alpha(t) = (t, t) \Rightarrow \alpha'(t) = (1, 1)$ y $X(\alpha(t)) \cdot \alpha'(t) = (\sqrt{t}, t^3 + t) \cdot (1, 1) = \sqrt{t} + t^3 + t$. Entonces

$$\int_C \vec{X} \cdot ds = \int_0^1 \sqrt{t} + t^3 + t dt = \frac{2}{3}t^{3/2} + \frac{1}{4}t^4 + \frac{1}{2}t^2 \Big|_0^1 = \frac{17}{12}.$$

1. El camino $x(t) = t^2$, $y(t) = t^3$, $0 \leq t \leq 1$.

Parametrización $\alpha(t) = (t^2, t^3) \Rightarrow \alpha'(t) = (2t, 3t^2)$ y $X(\alpha(t)) \cdot \alpha'(t) = (t^{3/2}, t^6 + t^3) \cdot (2t, 3t^2) = 2t^{5/2} + 3t^8 + 3t^5$. Entonces

$$\int_C \vec{X} \cdot ds = \int_0^1 2t^{5/2} + 3t^8 + 3t^5 dt = \frac{59}{42}.$$

Campos de gradientes

3.1. Integral de línea de un gradiente

El siguiente resultado puede entenderse como una versión de la Regla de Barrow para integrales de línea, o como una versión “vectorial” de dicha regla.

Definición 3.1.1. Sea $f : \Omega \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ un campo escalar de clase C^1 en un abierto $\omega \subset \mathbb{R}^3$. El **gradiente** de f en \mathbf{p} es el vector

$$\nabla_{\mathbf{p}} f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(\mathbf{p}), \frac{\partial f}{\partial y}(\mathbf{p}), \frac{\partial f}{\partial z}(\mathbf{p}) \right).$$

$\nabla f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ definido por $(\nabla f)(\mathbf{p}) = \nabla_{\mathbf{p}} f$ es un campo vectorial.

Definición 3.1.2. Un $\vec{X} : \Omega \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ campo vectorial continuo es un **campo de gradientes** si existe $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ de clase C^1 tal que $\vec{X} = \nabla f$ en Ω . Se dice que f es el **potencial escalar** de \vec{X} .

Observación 3.1.3. Si Ω es conexo entonces dos potenciales de un campo de gradientes difieren en una constante:

$\vec{X} = \nabla f$ y $\vec{X} = \nabla g$ en Ω entonces $\nabla(f - g) = 0$ en Ω , entonces $f - g = \text{cte}$ y por lo tanto $f = g + \text{cte}$.

Ejemplo 3.1.1 (Campo eléctrico de una carga puntual). El campo eléctrico generado por una carga puntual en el origen está dado por

$$E(x, y, z) = k \frac{q}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}(x, y, z).$$

De forma sencilla se deduce que la función

$$f(x, y, z) = -k \frac{q}{(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}}$$

verifica que $\nabla f = E$ de donde resulta que E es de gradientes.

El **potencial eléctrico** es la función V que verifica $E = \nabla V$ y $V(\infty) = 0$, con lo cual

$$V(x, y, z) = -k \frac{q}{(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}}.$$

Teorema 3.1.4 (Regla de Barrow para integrales de líneas). Sea $f : \Omega \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ un potencial escalar de un campo \vec{X} clase C^1 en un abierto $\omega \subset \mathbb{R}^3$ y C una curva contenida en Ω de origen A y extremo B . Entonces:

$$\int_C \vec{X} \cdot ds = f(B) - f(A).$$

En particular, si el camino C es cerrado, se tendrá:

$$\oint_C \vec{X} \cdot ds = 0.$$

Demostración. Sea $\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t))$, $a \leq t \leq b$ una parametrización de C . La integral de línea de \vec{X} entre a y b a lo largo de α viene dada por

$$\begin{aligned} \int_C \vec{X} \cdot ds &= \int_C \nabla f \cdot ds = \int_a^b \nabla f(\alpha(t)) \cdot \alpha'(t) dt = \int_a^b (f(\alpha(t)))' dt \\ &= f(\alpha(t)) \Big|_a^b = f(\alpha(b)) - f(\alpha(a)) = f(B) - f(A). \end{aligned}$$

En particular, si C es cerrada concluimos que

$$\oint_C \vec{X} \cdot ds = f(B) - f(A) = 0.$$

□

Teorema 3.1.5. Sea $\vec{X} : \Omega \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ continuo en Ω . Son equivalentes

1. Existe $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ de clase C^1 tal que $\nabla f = \vec{X}$. (\vec{X} es de gradientes).
2. $\oint_C \vec{X} \cdot ds = 0$ para toda curva cerrada simple regular a trozos en Ω .
3. $\int_{C_1} \vec{X} \cdot ds = \int_{C_2} \vec{X} \cdot ds$ para todo par de curvas C_1 y C_2 con el mismo origen y el mismo extremo. (\vec{X} es conservativo).

Demostración. (1) \Rightarrow (2) Sea C curva cerrada simple regular a trozos y $\alpha : [a, b] \rightarrow \Omega$ parametrización. Como \vec{X} es de gradientes tenemos que

$$\oint_C \vec{X} \cdot ds = f(\alpha(b)) - f(\alpha(a)) = 0.$$

(2) \Rightarrow (3) Sean C_1 y C_2 dos curvas con el mismo origen y el mismo extremo. Entonces consideremos la curva cerrada $C = C_1 - C_2$, y por la afirmación (2) tenemos que

$$0 = \oint_C \vec{X} \cdot ds = \int_{C_1} \vec{X} \cdot ds - \int_{C_2} \vec{X} \cdot ds \Rightarrow \int_{C_1} \vec{X} \cdot ds = \int_{C_2} \vec{X} \cdot ds.$$

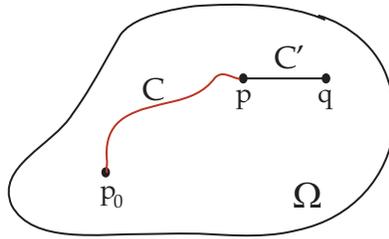
(3) \Rightarrow (1) Sea $p_0 \in \Omega$ fijo. definimos le campo escalar $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$f(x, y, z) = \int_C \vec{X} \cdot ds,$$

donde C es una curva cualquiera simple con origen p_0 y extremo $p = (x, y, z)$ contenida en Ω . (Dicha curva existe porque Ω es abierto y conexo).

Tenemos que probar que $\nabla f = \vec{X}$ de lo cual deducimos en particular que f es C^1 en Ω .

Sea $q = (x + h, y, z)$, con h suficientemente pequeño para garantizar que el segmento $pq \in \Omega$.



Tomemos la curva C' con parametrización $\alpha(t) = (x + th, y, z)$, si $\vec{X} = (P, Q, R)$ se tiene que

$$\begin{aligned} f(x + h, y, z) - f(x, y, z) &= \int_{C \cup C'} \vec{X} \cdot ds - \int_C \vec{X} \cdot ds = \int_{C'} \vec{X} \cdot ds = \int_0^1 \vec{X}(\alpha(t)) \cdot \alpha'(t) dt \\ &= h \int_0^1 P(x + th, y, z) dt = hP(x + \theta h, y, z), \quad \text{para algún } \theta \in (0, 1). \end{aligned}$$

El valor θ existe por el teorema de valor medio para integrales.

Entonces $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h, y, z) - f(x, y, z)}{h} = P(x, y, z)$. de donde se deduce que $\frac{\partial f}{\partial x} = P$ en Ω .

De forma análoga se prueba que $\frac{\partial f}{\partial y} = Q$ y $\frac{\partial f}{\partial z} = R$ en Ω . \square

Observación 3.1.6. Si $\oint_C \vec{X} \cdot ds \neq 0$ para alguna curva cerrada, entonces \vec{X} no es de gradientes.

Por otra parte, no es suficiente que $\oint_C \vec{X} \cdot ds = 0$ para infinitas curvas para concluir que el campo es de gradientes como veremos en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 3.1.2. Sea $\vec{X}(x, y) = (x, xy)$ y C_r la circunferencia de centro $(0, 0)$ y radio r parametrizada por $\alpha_r(t) = (r \cos t, r \sin t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$. Entonces

$$\begin{aligned} \oint_{C_r} \vec{X} \cdot ds &= \int_0^{2\pi} (r \cos t, r^2 \sin t \cos t) (-r \sin t, r \cos t) dt = \int_0^{2\pi} (-r^2 \cos t \sin t + r^3 \sin t \cos^2 t) dt \\ &= -\frac{r^2}{2} \int_0^{2\pi} \sin 2t dt + r^3 \int_0^{2\pi} \sin t \cos^2 t dt = \frac{r^2}{4} \cos 2t \Big|_0^{2\pi} - \frac{r^3}{3} \cos^3 t \Big|_0^{2\pi} = 0. \end{aligned}$$

Sin embargo $\frac{\partial xy}{\partial x} = y \neq 0 = \frac{\partial x}{\partial y}$, que es una condición necesaria para que sea de gradientes (como veremos en el siguiente teorema).

Teorema 3.1.7. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ un abierto y $\vec{X} = (P, Q, R)$ un campo vectorial de clase C^1 en Ω . Si \vec{X} es de gradientes en Ω entonces

$$\frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z}, \quad \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \quad \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}.$$

Demostración. Como $\vec{X} = (P, Q, R)$, campo vectorial de clase C^1 , es de gradientes existe $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ de clase C^2 tal que $\nabla f = \vec{X}$. Entonces

$$P = \frac{\partial f}{\partial x}, \quad Q = \frac{\partial f}{\partial y}, \quad R = \frac{\partial f}{\partial z}.$$

De lo cual se deduce que

$$\frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} = \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z}.$$

Para garantizar que las derivadas segundas cruzadas de f coinciden estamos usando que f es de clase C^2 y el teorema de Schwartz. De igual forma se deducen las otras dos igualdades. \square

El siguiente ejemplo muestra que las condiciones del teorema previo no siempre son suficientes para que un campo vectorial sea de gradientes.

Ejemplo 3.1.3. Sea $S = \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$ y $X : S \rightarrow \mathbb{R}^2$ el campo vectorial dado por

$$X(x, y) = \left(\frac{-y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2} \right).$$

Veamos que las derivadas cruzadas coinciden pero sin embargo X no es de gradientes.

$$P(x, y) = \frac{-y}{x^2 + y^2} \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{-x^2 + y^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$Q(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2} \Rightarrow \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{-x^2 + y^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

Entonces $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ para todo $(x, y) \in S$.

Para ver que X no es de gradientes en S calculemos la integral de línea de X a lo largo de la circunferencia unidad dada por $\alpha(t) = (\cos t, \sin t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

$$\oint_C \vec{X} \cdot ds = \int_0^{2\pi} X(\alpha(t)) \cdot \alpha'(t) dt = \int_0^{2\pi} (-\sin t, \cos t) \cdot (-\sin t, \cos t) dt = \int_0^{2\pi} (\sin^2 t + \cos^2 t) dt = 2\pi \neq 0.$$

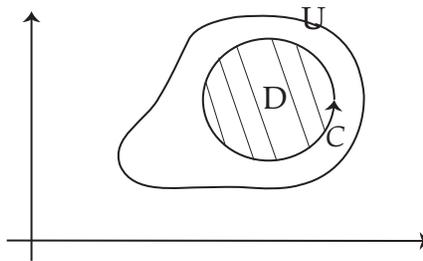
Entonces X no es de gradientes.

Teorema de Green

Teorema 4.0.8 (Teorema de Green). *Sea C una curva cerrada simple regular a trozos orientada en sentido antihorario en \mathbb{R}^2 y sea D la unión de la región interior a C con la curva C . Sea $\vec{X} = (P, Q) : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ un campo vectorial de clase C^1 definido en un abierto que contenga a D .*

$$\oint_C \vec{X} \cdot ds = \iint_D (Q_x - P_y) dx dy. \quad (4.1)$$

Demostración.



Probar (9.1) es equivalente a probar las dos siguientes igualdades

$$\oint_C P dx = - \iint_D \frac{\partial P}{\partial y} dx dy. \quad (4.2)$$

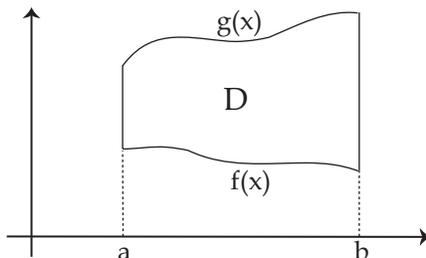
$$\oint_C Q dy = \iint_D \frac{\partial Q}{\partial x} dx dy. \quad (4.3)$$

En efecto, si estas fórmulas son válidas, obtenemos (9.1) sumándolas. Recíprocamente, si (9.1) es cierta podemos obtener (9.2) tomando $Q = 0$ en (9.1), y de forma análoga obtenemos (4.3), tomando $P = 0$ en (9.1).

Veamos (9.2) para una clase especial de regiones D

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, f(x) \leq y \leq g(x)\}$$

donde f y g son funciones reales de clase C^1 a trozos.



Esta región D está limitada por una curva cerrada simple $C = \partial D$ regular a trozos que puede expresarse como concatenación de cuatro caminos regulares a trozos:

$$C = C_1 + C_2 - C_3 - C_4,$$

(como es costumbre, los signos negativos que preceden a un camino denotan que se recorre el camino en sentido opuesto al especificado); aquí, C_1 está parametrizado por $\gamma_1(t) = (t, f(t))$, $a \leq t \leq b$; C_2 lo está por $\gamma_2(t) = (b, t)$, con $f(b) \leq t \leq g(b)$; C_3 es $\gamma_3(t) = (t, g(t))$, $a \leq t \leq b$; y C_4 viene dado por $\gamma_4(t) = (a, t)$, $f(a) \leq t \leq g(a)$. Nótese que, a lo largo de C_2 y de C_4 , $x = x(t)$ es constante, luego $dx = 0$ sobre estos caminos, y las correspondientes integrales de línea se anularán, mientras que sobre los restantes caminos es $dx = 1$. Entonces se tiene que

$$\begin{aligned} \oint_{\partial D} P dx &= \int_{C_1} P dx + \int_{C_2} P dx - \int_{C_3} P dx - \int_{C_4} P dx = \\ &= \int_{C_1} P dx - \int_{C_3} P dx = \int_a^b P(t, f(t)) dt - \int_a^b P(t, g(t)) dt, \end{aligned}$$

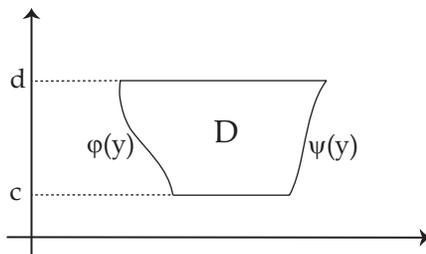
y por otra parte, aplicando el teorema de Fubini y el teorema fundamental del cálculo,

$$\begin{aligned} - \iint_D \frac{\partial P}{\partial y} dx dy &= - \int_a^b \left[\int_{f(x)}^{g(x)} \frac{\partial P}{\partial y} dy \right] dx = \int_a^b [P(x, g(x)) - P(x, f(x))] \\ &= \int_a^b P(t, f(t)) dt - \int_a^b P(t, g(t)) dt. \end{aligned}$$

Combinando estas igualdades se obtiene (9,2).

Ahora probaremos (4.3) para otra clase especial de región D , limitada por las gráficas de dos funciones $x = \varphi(y)$, $x = \psi(y)$, con $\varphi \leq \psi$. Es decir, ahora tenemos que

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : c \leq y \leq d, \varphi(y) \leq x \leq \psi(y)\},$$



con φ, ψ funciones reales de clase C^1 a trozos. Como antes, D está limitado por una curva cerrada simple $C = \partial D$ regular a trozos que puede expresarse como concatenación de cuatro caminos regulares a trozos:

$$C = -C_1 + C_2 + C_3 - C_4,$$

donde C_1 está parametrizado por $\gamma_1(t) = (\varphi(t), t)$, $c \leq t \leq d$; C_2 es $\gamma_2(t) = (t, c)$, con $\varphi(c) \leq t \leq \psi(c)$; C_3 es $\gamma_3(t) = (\psi(t), t)$, $c \leq t \leq d$; y C_4 es $\gamma_4(t) = (t, d)$, con $\varphi(d) \leq t \leq \psi(d)$. A lo largo de C_2 y de C_4 , $y = y(t)$ es constante, luego $dy = 0$ sobre estos caminos, y las correspondientes integrales de línea son cero; para C_1 y C_3 se tiene $dy = 1$. Entonces,

$$\begin{aligned} \oint_{\partial D} Q dy &= - \int_{C_1} Q dy + \int_{C_2} Q dy + \int_{C_3} Q dy - \int_{C_4} Q dy = \\ &= - \int_{C_1} Q dy + \int_{C_3} Q dy = - \int_c^d Q(\varphi(t), t) dt + \int_c^d Q(\psi(t), t) dt, \end{aligned}$$

y por otro lado,

$$\begin{aligned} \iint_D \frac{\partial Q}{\partial x} dx dy &= \int_c^d \left[\int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} \frac{\partial Q}{\partial x} dx \right] dy = \int_c^d [Q(\psi(y), y) - Q(\varphi(y), y)] dy \\ &= \int_c^d Q(\psi(t), t) dt - \int_c^d Q(\varphi(t), t) dt; \end{aligned}$$

luego, juntando estas igualdades, obtenemos (4.3).

Con lo probado en los pasos 1 y 2, la fórmula de Green es válida para toda región D que sea a la vez de tipo I y de tipo II. Todos los círculos, los rectángulos y los triángulos constituyen ejemplos de regiones que son de tipo I y II simultáneamente. Por tanto, el teorema de Green es válido para todos estos tipos de curvas. \square

Corolario 4.0.9 (Cálculo de Áreas). Si $\vec{X} = (P, Q)$ tales que $Q_x - P_y = 1$ entonces $\iint_D (Q_x - P_y) dx dy = \iint_D dx dy = A(D)$ y por lo tanto (aplicando Green)

$$A(D) = \oint_{\partial D} \vec{X} \cdot ds.$$

Podemos considerar cualquiera de los siguientes campos para hallar el área de D .

- (i) $\vec{X}(x, y) = (0, x)$ para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.
- (ii) $\vec{X}(x, y) = (-y, 0)$ para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.
- (iii) $\vec{X}(x, y) = \frac{1}{2}(-y, x)$ para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Entonces

$$A(D) = \int_{\partial D} x dy = - \int_{\partial D} y dx = \frac{1}{2} \int_{\partial D} x dy - y dx.$$

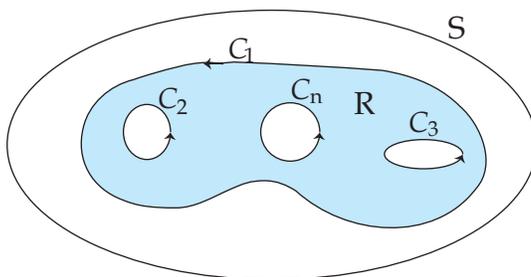
Ejemplo 4.0.4. Hallar el área de la elipse $D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \right\}$, con $a, b > 0$. Consideremos la siguiente parametrización $\alpha(t) = (a \cos t, b \sin t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

$$A(D) = \frac{1}{2} \oint_{\partial D} x dy - y dx = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} ab \cos^2 t + ab \sin^2 t dt = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} ab dt = \pi ab.$$

Definición 4.0.10. Una curva es de **Jordan** si es plana, cerrada, simple y regular a trozos.

Teorema 4.0.11 (Teorema de Green generalizado). Sean C_1, \dots, C_n n curvas de Jordan, satisfaciendo:

- (i) Dos curvas cualesquiera no se cortan.
- (ii) Todas las curvas C_2, \dots, C_n están en el interior de C_1 .
- (iii) Cada C_i está en el exterior de C_j ($i \neq j, i, j = 2, \dots, n$).



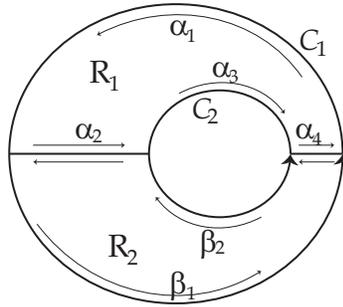
Sea R la unión de C_1 con la porción interior a C_1 que no está dentro de ninguna C_j ($j = 2, \dots, n$). Si $\vec{X} = (P, Q)$ es de clase C^1 en un abierto S que contiene a R , se verifica:

$$\iint_R (Q_x - P_y) dx dy = \oint_{C_1} \vec{X} \cdot ds - \sum_{j=2}^n \oint_{C_j} \vec{X} \cdot ds,$$

donde las curvas se consideran con orientación antihoraria.

Demostración. Se introducen cortes que transformen R en una reunión finita de regiones simplemente conexas limitadas por curvas de Jordan, se aplica a cada una el teorema de

Green, y se suman miembro a miembro los resultados. Este procedimiento puede justificarse fácilmente para $n = 2$; el caso general sigue por inducción.



Sea C la curva dada por $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4$ y R_1 la región limitada por C . Como R_1 es simplemente conexa podemos aplicar el teorema de Green y obtenemos

$$\oint_C \vec{X} \cdot ds = \iint_{R_1} (Q_x - P_y) dx dy$$

La integral del lado izquierdo se descompone en cuatro integrales, usando al parametrización de C :

$$\oint_C \vec{X} \cdot ds = \int_{\alpha_1} \vec{X} \cdot ds + \int_{\alpha_2} \vec{X} \cdot ds + \int_{\alpha_3} \vec{X} \cdot ds + \int_{\alpha_4} \vec{X} \cdot ds.$$

Sea C' la curva dada por $\beta_1 - \alpha_4 + \beta_2 - \alpha_2$ y R_2 la región limitada por ella. Nuevamente, aplicando Green tenemos que

$$\oint_{C'} \vec{X} \cdot ds = \iint_{R_2} (Q_x - P_y) dx dy$$

La integral del lado izquierdo se descompone en cuatro integrales, usando al parametrización de C' :

$$\oint_{C'} \vec{X} \cdot ds = \int_{\beta_1} \vec{X} \cdot ds - \int_{\alpha_4} \vec{X} \cdot ds + \int_{\beta_2} \vec{X} \cdot ds - \int_{\alpha_2} \vec{X} \cdot ds.$$

Sumando ambas igualdades obtenemos que:

$$\int_{\alpha_1} \vec{X} \cdot ds + \int_{\beta_1} \vec{X} \cdot ds + \int_{\alpha_3} \vec{X} \cdot ds + \int_{\beta_2} \vec{X} \cdot ds = \iint_{R_1} (Q_x - P_y) dx dy + \iint_{R_2} (Q_x - P_y) dx dy$$

Entonces

$$\oint_{C_1} - \oint_{C_2} \vec{X} \cdot ds = \iint_R (Q_x - P_y) dx dy.$$

□

Teorema 4.0.12. Sea $\vec{X} = (P, Q)$ de clase C^1 en un abierto conexo $S \subset \mathbb{R}^2$, y supongamos que $\text{rot } \vec{X} = 0$ en S .

Sean C_1 y C_2 dos curvas de Jordan contenidas en S , satisfaciendo:

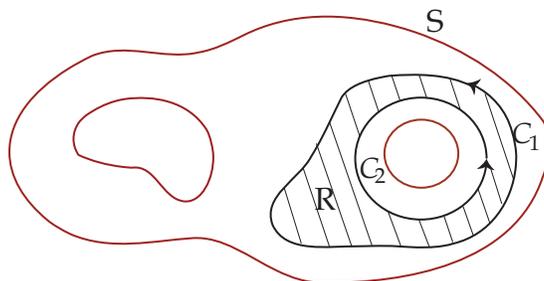
(i) C_2 está en el interior de C_1 .

(ii) Los puntos interiores a C_1 que son exteriores a C_2 están en S .

Si ambas curvas se recorren en el mismo sentido, entonces

$$\oint_{C_1} \vec{X} \cdot ds = \oint_{C_2} \vec{X} \cdot ds.$$

Demostración.



Basta aplicar el teorema de Green generalizado con $n = 2$ a la región R constituida por los puntos situados entre C_1 y C_2 junto con las propias curvas:

$$\oint_{C_1} - \oint_{C_2} \vec{X} \cdot ds = \iint_R (Q_x - P_y) dx dy = \iint_R 0 dx dy = 0$$

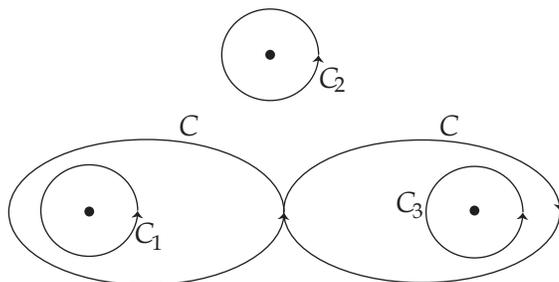
Entonces

$$\oint_{C_1} \vec{X} \cdot ds = \oint_{C_2} \vec{X} \cdot ds.$$

□

Este resultado se puede expresar diciendo que si $\partial P/\partial y = \partial Q/\partial x$ en S entonces el valor de una integral de línea a lo largo de una curva de Jordan contenida en S no varía cuando ésta se deforma en otra curva de Jordan en S de manera que todas las curvas intermedias permanezcan dentro de S .

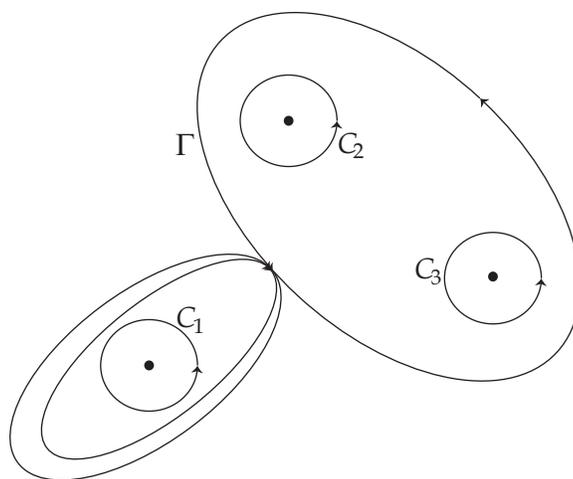
Ejemplo 4.0.5. Sean P, Q dos campos escalares de clase C^1 que satisfacen $\partial P/\partial y = \partial Q/\partial x$ en todo el plano excepto en tres puntos. Sean C_1, C_2, C_3 las tres circunferencias centradas en dichos puntos y C la curva que rodea a C_1 y C_3 que se muestran en la siguiente figura, y sea $I_k = \oint_{C_k} P dx + Q dy$ ($k = 1, 2, 3$). Supongamos que $I_1 = 12$, $I_2 = 10$ e $I_3 = 15$.



- (i) Hallar $\oint_C Pdx + Qdy$.
- (ii) Dibujar una curva cerrada Γ a lo largo de la cual $\oint_{\Gamma} Pdx + Qdy = 1$.
- (iii) Si $I_1 = 12$, $I_2 = 9$ e $I_3 = 15$, ¿puede existir alguna curva cerrada Γ tal que $\oint_{\Gamma} Pdx + Qdy = 1$?

$$(i) \oint_C Pdx + Qdy = \oint_{C_1} Pdx + Qdy - \oint_{C_3} Pdx + Qdy = I_1 - I_3 = 12 - 15 = -3.$$

- (ii) Basta considerar Γ como se muestra en la siguiente figura



$$\oint_{\Gamma} Pdx + Qdy = I_2 + I_3 - I_1 - I_1 = 10 + 15 - 12 - 12 = 1.$$

- (iii) Si existe tal curva entonces deben existir $a, b, c \in \mathbb{Z}$ tales que $aI_1 + bI_2 + cI_3 = 12a + 9b + 15c = 1$, entonces $4a + 3b + 5c = \frac{1}{3}$, donde el primer término está en \mathbb{Z} y el segundo en $\mathbb{Q} - \mathbb{Z}$ lo cual no admite solución. Entonces no existe una curva Γ con esa propiedad.

Rotor y divergencia

5.1. Rotor y propiedades

Definición 5.1.1. Sea $\vec{X} : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ un campo vectorial de clase C^1 . Definimos el **rotor** de \vec{X} como el campo vectorial $\text{rot } \vec{X} : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ dado por

$$\text{rot } \vec{X} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}, \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right)$$

si $\vec{X} = (P, Q, R)$.

Para recordar la fórmula usaremos la notación de “operador”. Símbolo nabla: $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$. Utilizando este operador podemos considerar el siguiente producto vectorial que coincide con el rotor de \vec{X} :

$$\nabla \wedge \vec{X} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ P & Q & R \end{vmatrix}.$$

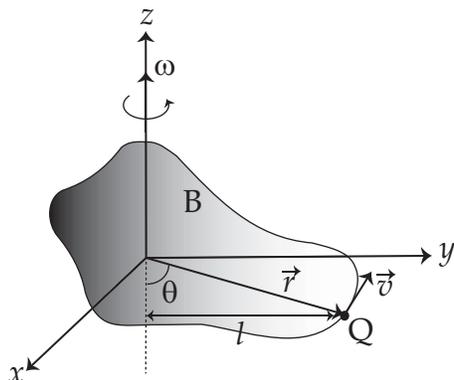
Entonces $\text{rot } \vec{X} = \nabla \wedge \vec{X}$.

Ejemplo 5.1.1. Sea $\vec{X}(x, y, z) = (xz, y, z)$ definido en todo el espacio. Hallar $\text{rot } \vec{X}$.

$$\text{rot } \vec{X} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ xz & y & z \end{vmatrix} = (0, x, 0).$$

Entonces $\text{rot } \vec{X} = (0, x, 0)$.

Observación 5.1.2 (Interpretación física del rotor).



Consideremos un rígido B que gira alrededor del eje z. La rotación se puede describir mediante un vector $\vec{\omega}$ a lo largo del eje de rotación, la dirección se escoge de manera que el cuerpo gire alrededor de $\vec{\omega}$ como en la figura, con longitud $\omega = \|\vec{\omega}\|$, velocidad angular del cuerpo B, esto es, la velocidad tangencial de cualquier punto en B dividida entre su distancia al eje z de rotación. Sea Q cualquier punto en B y sea l la distancia de Q a z

$$l = \|\vec{r}\| \sin \theta,$$

donde \vec{r} es el vector cuyo punto inicial es el origen y cuyo punto final es Q. La velocidad tangencial \vec{v} de Q se dirige en sentido antihorario, a lo largo de la tangente a un círculo paralelo al plano xy con radio l, con magnitud

$$\begin{aligned} \|\vec{v}\| \sin \theta &= \omega l = \omega \|\vec{r}\| \sin \theta = \|\vec{\omega}\| \|\vec{r}\| \sin \theta \\ \Rightarrow \vec{v} &= \vec{\omega} \wedge \vec{r}. \end{aligned}$$

Debido a la selección de ejes, podemos escribir $\vec{\omega} = \omega \vec{k}$, $\vec{r} = x \vec{i} + y \vec{j} + z \vec{k}$, de modo que

$$\vec{v} = \vec{\omega} \wedge \vec{r} = -\omega y \vec{i} + \omega x \vec{j}$$

y más aún

$$\text{rot } \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ -\omega y & \omega x & 0 \end{vmatrix} = 2\omega \vec{k} = 2\vec{\omega}.$$

Por lo tanto, para la rotación de un cuerpo rígido, el rotacional del campo vectorial de velocidad es un campo vectorial dirigido paralelo al eje de rotación con magnitud igual al doble de la velocidad angular.

Si un campo vectorial \vec{X} representa el flujo de un fluido, entonces $\text{rot } \vec{X} = \vec{0}$ en P significa físicamente que el fluido no tiene rotaciones o es irrotacional en P; esto es, no tiene remolinos.

Definición 5.1.3. Un campo vectorial \vec{X} es **irrotacional** si $\text{rot } \vec{X} = \vec{0}$.

Propiedades

1. $\text{rot}(\mathbf{a}\vec{X} + \mathbf{b}\vec{Y}) = \mathbf{a}\text{rot}\vec{X} + \mathbf{b}\text{rot}\vec{Y}$, $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}$.
2. $\text{rot}(f\vec{X}) = f\text{rot}\vec{X} + \nabla f \wedge \vec{X}$, f campo escalar.
3. $\text{rot}(\nabla f) = 0$ si f es de clase C^2 .

Demostración. 1. $\text{rot}(\mathbf{a}\vec{X} + \mathbf{b}\vec{Y}) = \nabla \wedge (\mathbf{a}\vec{X} + \mathbf{b}\vec{Y}) = \mathbf{a}\nabla \wedge \vec{X} + \mathbf{b}\nabla \wedge \vec{Y} = \mathbf{a}\text{rot}\vec{X} + \mathbf{b}\text{rot}\vec{Y}$.

$$\begin{aligned}
 2. \text{rot}(f\vec{X}) &= \nabla \wedge (f\vec{X}) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ fP & fQ & fR \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial fR}{\partial y} - \frac{\partial fQ}{\partial z}, \frac{\partial fP}{\partial z} - \frac{\partial fR}{\partial x}, \frac{\partial fQ}{\partial x} - \frac{\partial fP}{\partial y} \right) \\
 &= \left(f_y R + f \frac{\partial R}{\partial y} - f_y P - f \frac{\partial Q}{\partial z}, f_z P + f \frac{\partial P}{\partial z} - f_x R - f \frac{\partial R}{\partial x}, f_x Q + f \frac{\partial Q}{\partial x} - f_y P - f \frac{\partial P}{\partial y} \right) \\
 &= (f_y R - f_z Q, f_z P - f_x R, f_x Q - f_y P) + f \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}, \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \\
 &= \nabla f \wedge \vec{X} + f \text{rot}\vec{X}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 3. \text{rot}(\nabla f) &= \nabla \wedge \nabla f = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ \partial f/\partial x & \partial f/\partial y & \partial f/\partial z \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \right) \\
 &= (0, 0, 0) \text{ porque } f \text{ es de clase } C^2.
 \end{aligned}$$

□

Corolario 5.1.4. Si \vec{X} es de gradientes entonces es irrotacional.

El recíproco no se cumple, basta considerar el siguiente ejemplo.

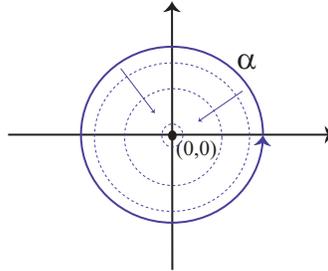
Ejemplo 5.1.2. Sea $\vec{X}(x, y) = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2} \right)$. entonces $\text{rot}\vec{X} = Q_x - P_y = 0$ porque $Q_x = P_y$. Entonces \vec{X} es irrotacional. Pero ya vimos que este campo no es de gradientes.

Definición 5.1.5. Una curva C cerrada (parametrizada por $\alpha : [a, b] \rightarrow U$) contenida en U es **homotópica a un punto** P en U si existe $H : [0, 1] \times [a, b] \rightarrow U$ continua tal que $H(s, a) = H(s, b)$ para todo $s \in [0, 1]$, $H(0, t) = \alpha(t) : [a, b] \rightarrow U$ y $H(1, t) = P$ para todo $t \in [a, b]$.

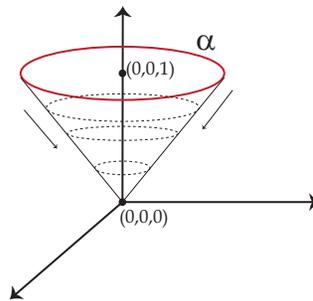
Intuitivamente, esto quiere decir que C puede deformarse continuamente a un punto P .

Ejemplo 5.1.3. 1. Si consideramos $\alpha(t) = (\cos t, \sin t)$ la circunferencia de centro $(0, 0)$ y radio 1, veamos que es homotópica a $(0, 0)$. Definimos $H : [0, 1] \times [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$ como $H(s, t) = ((1-s)\cos t, (1-s)\sin t)$, fijando s tenemos que $H(s, 0) = ((1-s)$

$s), 0) = H(s, 2\pi)$, además $H(0, t) = (\cos t, \sin t) = \alpha(t)$ y $H(1, t) = (0, 0)$. Entonces H es una homotopía entre la cfa. unidad y el origen del plano.



2. Consideremos $\mathbb{R}^3 - (0, 0, 1)$ y sea $\alpha(t) = (\cos t, \sin t, 1)$ curva que rodea a la singularidad. Definimos $H: [0, 1] \times [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3 - (0, 0, 1)$ por $H(s, t) = ((1-s)\cos t, (1-s)\sin t, 1-s)$, es una función continua y verifica que $H(s, 0) = (1-s, 0, 1-s) = H(s, 2\pi)$, $H(0, t) = \alpha(t)$ y $H(1, t) = (0, 0, 0)$. entonces H es una homotopía entre la circunferencia y el origen del espacio.



Definición 5.1.6. Un conjunto U es **simplemente conexo** si es abierto, conexo y toda curva cerrada contenida en U es homotópica a un punto en U .

Ejemplo 5.1.4. 1. \mathbb{R}^2 es simplemente conexo. Basta generalizar la construcción que vimos en el ejemplo anterior, para probar que toda curva cerrada del plano se puede contraer a un punto.

2. $\mathbb{R}^2 - \{P\}$ no es simplemente conexo. Si tomamos una curva cerrada que encierre al punto P no vamos a poder construir una homotopía que la lleve a un punto ya que la singularidad nos obstruye el proceso.
3. $\mathbb{R}^3 - \{P\}$ es simplemente conexo. Al tener una dimensión más podemos evitar la singularidad y contraer cualquier curva cerrada a un punto, repitiendo el razonamiento visto en el ejemplo anterior.

Teorema 5.1.7. Si $\vec{X}: U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ es un campo irrotacional y U es simplemente conexo, entonces \vec{X} es un campo de gradientes.

Demostración. Veremos la demostración para $\vec{X} = (P, Q)$ plano. Para ver que es de gradientes vamos a probar que $\oint_C \vec{X} \cdot ds = 0$ para toda curva cerrada simple regular a trozos en U .

Sea D la unión de C con la región interior a C . Como U es simplemente conexo resulta que $D \subset U$. Aplicando el teorema de Green tenemos que

$$\oint_C \vec{X} \cdot ds = \iint_D (Q_x - P_y) dx dy$$

Como \vec{X} es irrotacional tenemos que $\text{rot } \vec{X} = (Q_x - P_y) \vec{k} = \vec{0}$, entonces $Q_x - P_y = 0$. de lo cual deducimos que

$$\iint_D (Q_x - P_y) dx dy = 0 \Rightarrow \oint_C \vec{X} \cdot ds = 0.$$

□

5.2. Divergencia y propiedades

Definición 5.2.1. Sea $\vec{X} : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ un campo vectorial de clase C^1 . Definimos la **divergencia** de \vec{X} como el campo escalar $\text{div } \vec{X} : U \rightarrow \mathbb{R}$ dado por

$$\text{div } \vec{X} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z},$$

siendo $\vec{X} = (P, Q, R)$.

Notación: $\text{div } \vec{X} = \nabla \cdot \vec{X}$.

Propiedades

1. $\text{div}(a\vec{X} + b\vec{Y}) = a \text{div } \vec{X} + b \text{div } \vec{Y}$, $a, b \in \mathbb{R}$.
2. $\text{div}(f\vec{X}) = f \text{div } \vec{X} + \nabla f \cdot \vec{X}$, f campo escalar.
3. $\text{div}(\text{rot } \vec{X}) = 0$ si \vec{X} es de clase C^2 .

Demostración. 1. $\text{div}(a\vec{X} + b\vec{Y}) = \nabla \cdot (a\vec{X} + b\vec{Y}) = a\nabla \cdot \vec{X} + b\nabla \cdot \vec{Y} = a \text{div } \vec{X} + b \text{div } \vec{Y}$.

$$2. \text{div}(f\vec{X}) = \frac{\partial}{\partial x}(fP) + \frac{\partial}{\partial y}(fQ) + \frac{\partial}{\partial z}(fR) = f_x P + f \frac{\partial P}{\partial x} + f_y Q + f \frac{\partial Q}{\partial y} + f_z R + f \frac{\partial R}{\partial z} = (f_x P + f_y Q + f_z R) + f \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) = \nabla f \cdot \vec{X} + f \text{div } \vec{X}.$$

$$\begin{aligned}
3. \operatorname{div}(\operatorname{rot} \vec{X}) &= \nabla \cdot \nabla \wedge \vec{X} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \\
&= \frac{\partial^2 R}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 Q}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 P}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 R}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 Q}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 P}{\partial z \partial y} = 0, \text{ porque } \vec{X} \text{ es de clase } C^2.
\end{aligned}$$

□

Definición 5.2.2. Un campo vectorial $\vec{X} : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ de clase C^1 es **solenoidal** si $\operatorname{div} \vec{X} = 0$.

Teorema 5.2.3. Sea $\vec{X} : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ solenoidal de clase C^2 en una “buena región” U . Entonces existe $\vec{Y} : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $\vec{X} = \operatorname{rot} \vec{Y}$.

Capítulo 6

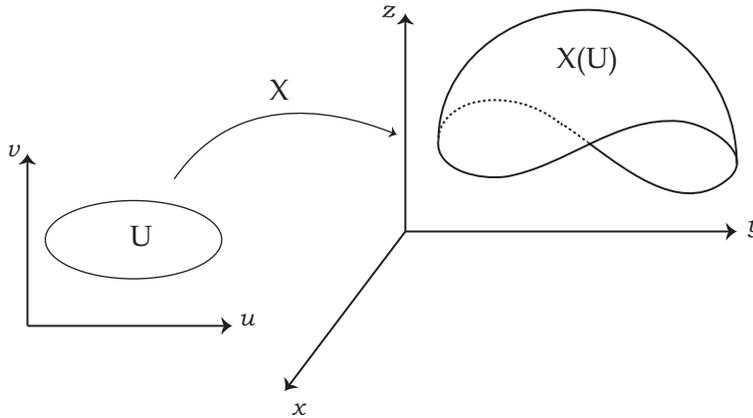
Superficies

6.1. Superficies parametrizadas

Definición 6.1.1. Sea U un conjunto conexo de \mathbb{R}^2 . Una **parametrización** es una función continua

$$\begin{aligned} X : U &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u, v) &\mapsto (x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \end{aligned}$$

0 su imagen $\text{Im}X$ se llama **superficie parametrizada (sin borde)** en \mathbb{R}^3 .



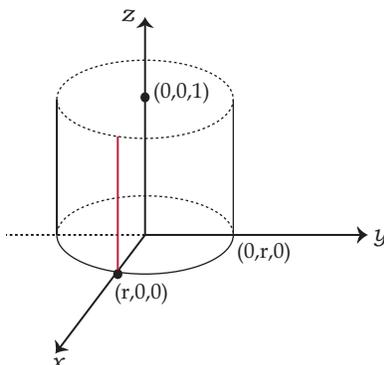
Definición 6.1.2. Si el conjunto U tiene frontera (∂U) y $X : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ es continua entonces decimos que $X(U)$ es una **superficie parametrizada con frontera**.

Ejemplo 6.1.1. Sea $X : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por $X(u, v) = (4 + 3u - v, 5 + 2u + 2v, u - v)$, claramente es continua. Observar que

$$\text{Im}X = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = 4 + 3u - v, y = 5 + 2u + 2v, z = u - v, \text{ para algún } (u, v) \in \mathbb{R}^2\}$$

Entonces $\text{Im}X$ es el plano por el punto $(4, 5, 0)$ y con dirección $(3, 2, 1)$ y $(-1, 2, -1)$. Los planos son superficies (sin borde) parametrizadas.

Ejemplo 6.1.2 (Cilindro). Consideremos el cilindro $x^2 + y^2 = r^2$, $0 < z < 1$.

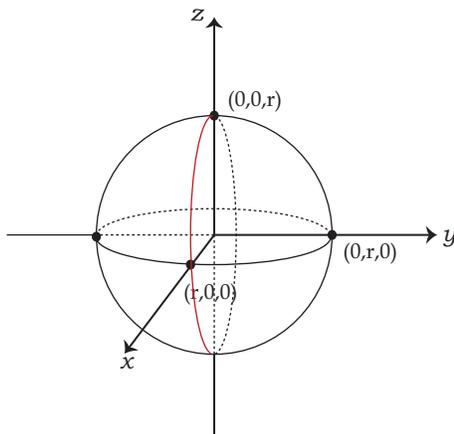


Sea $X : [0, 2\pi) \times [0, 1) \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \mapsto \begin{cases} x = r \cos u \\ y = r \sin u \\ z = v \end{cases}$$

Entonces $\text{Im}X = \text{Cilindro}$. y X es continua, por lo cual concluimos que el cilindro es una superficie parametrizada.

Ejemplo 6.1.3 (Esfera). Veamos que la esfera $S^2 : x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ es una superficie parametrizada.

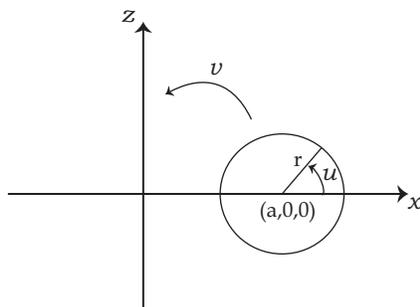


Consideremos la parametrización $X : [0, 2\pi) \times [0, \pi) \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \mapsto \begin{cases} x = r \cos u \sin v \\ y = r \sin u \sin v \\ z = r \cos v \end{cases}$$

$\text{Im}X = S^2$ y X es continua.

Ejemplo 6.1.4 (Toro T^2). Superficie generada al girar alrededor del eje Oz una circunferencia de centro $(a, 0, 0)$ y radio $r < a$.



Parametrizamos primero la circunferencia: un punto genérico de ella es de la forma $(a + r \cos u, 0, r \sin u)$ con $u \in [0, 2\pi)$. La matriz de giro de ángulo v en torno al eje Oz es

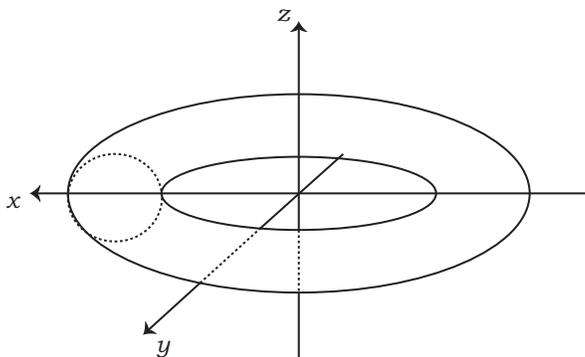
$$\begin{pmatrix} \cos v & -\sin v & 0 \\ \sin v & \cos v & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Entonces al girar la circunferencia en torno al eje Oz tenemos

$$\begin{pmatrix} \cos v & -\sin v & 0 \\ \sin v & \cos v & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a + r \cos u \\ 0 \\ r \sin u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (a + r \cos u) \cos v \\ (a + r \cos u) \sin v \\ r \sin u \end{pmatrix}$$

Entonces una parametrización del toro es

$$\begin{aligned} X : [0, 2\pi) \times [0, 2\pi) &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u, v) &\mapsto ((a + r \cos u) \cos v, (a + r \cos u) \sin v, r \sin u) \end{aligned}$$

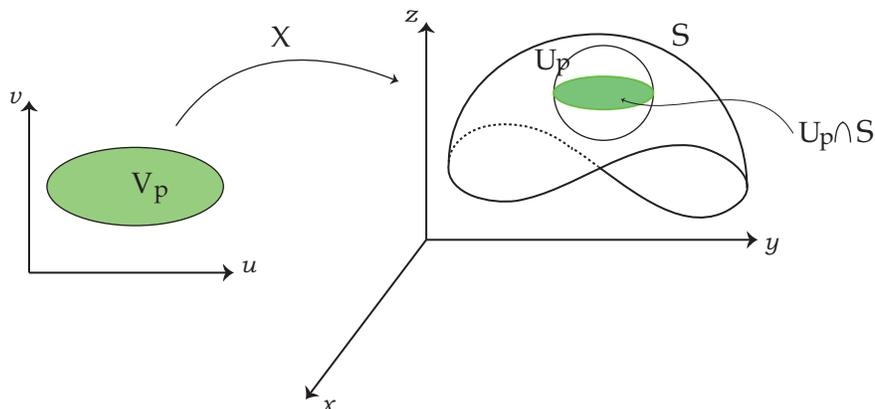


Observemos que $\text{Im}X = T^2$ Entonces T^2 es una superficie parametrizada.

6.2. Superficies regulares

Hay muchas superficies que no se pueden escribir como la imagen de una función definida en un abierto de \mathbb{R}^2 . Por tal motivo damos la siguiente definición.

Definición 6.2.1. Una **superficie (sin borde)** es un conjunto $S \subset \mathbb{R}^3$ tal que para todo $p \in S$ existe $U_p \ni p$ abierto de \mathbb{R}^3 tal que $U_p \cap S$ es una superficie parametrizada (sin borde). Es decir, $\forall p \in S \exists U_p \in \mathbb{R}^3$ y $X: V_p \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ continua tal que $\text{Im}X = U_p \cap S$.



Esto quiere decir que una superficie sin borde es el solapamiento de varias superficies parametrizadas.

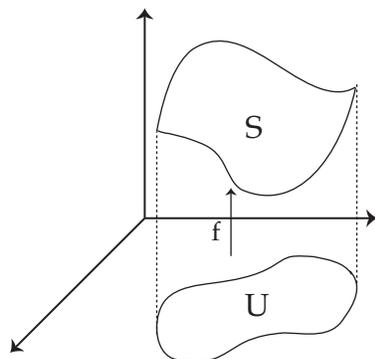
Definición 6.2.2. Una superficie es **regular** si cada parametrización es diferenciable con inversa diferenciable.

Teorema 6.2.3. Sea $U \subset \mathbb{R}^2$ abierto y $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable. Entonces su gráfico

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in U, z = f(x, y)\}$$

es una superficie regular.

Demostración.



Sea $X : \mathbf{U} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbf{S} \subset \mathbb{R}^3$ definida por $X(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = (\mathbf{u}, \mathbf{v}, f(\mathbf{u}, \mathbf{v}))$. X es diferenciable porque f es diferenciable. Claramente es biyectiva, la inversa está dada por

$$X^{-1} : \mathbf{S} \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbf{U} \subset \mathbb{R}^2, (x, y, f(x, y)) \mapsto (x, y)$$

es diferenciable por ser la restricción de la función proyección $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2, (x, y, z) \mapsto (x, y)$ que es diferenciable. Entonces el gráfico de f es una superficie regular. \square

6.3. Plano tangente

Teorema 6.3.1. *Sea $\mathbf{U} \subset \mathbb{R}^2$ abierto y $X : \mathbf{U} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ diferenciable e inyectivo. Sea $\mathbf{V} = X(\mathbf{U})$, entonces $X : \mathbf{U} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbf{V} \subset \mathbb{R}^3$ es un difeomorfismo $\Leftrightarrow d_q X : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ es inyectivo $\forall q \in \mathbf{U}$.*

Demostración. Veamos sólo el directo.

Sea $X^{-1} : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{U}$ la inversa de X entonces

$$\begin{array}{ccc} & \mathbf{V} \subset \mathbb{R}^3 & \\ \nearrow X & & \searrow X^{-1} \\ \mathbf{U} \subset \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{\text{Id}} & \mathbf{U} \subset \mathbb{R}^2 \end{array}$$

Aplicando el diferencial de X en $q \in \mathbf{U}$ tenemos que

$$\begin{array}{ccc} & \mathbb{R}^3 & \\ \nearrow d_q X & & \searrow d_{X(q)} X^{-1} \\ \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{\text{Id}} & \mathbb{R}^2 \end{array}$$

Entonces $d_{X(q)} X^{-1} \circ d_q X = \text{Id}$ biyección. Entonces $d_{X(q)} X^{-1}$ es sobreyectiva y $d_q X$ es inyectiva. \square

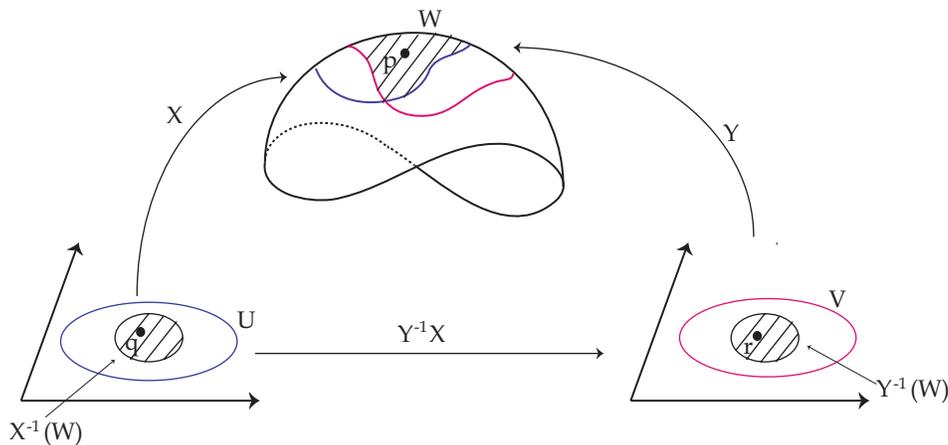
Definición 6.3.2. *Sera $\mathbf{S} \subset \mathbb{R}^3$ una superficie regular y $\mathbf{p} \in \mathbf{S}$. Consideremos $X : \mathbf{U} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbf{S}$ una parametrización tal que $q \in \mathbf{U}$ y $\mathbf{p} = X(q)$. Definimos el **plano tangente** en \mathbf{p} a \mathbf{S} como*

$$T_{\mathbf{p}} \mathbf{S} = \text{Im}(d_q X) \subset \mathbb{R}^3.$$

Observación 6.3.3. Como el diferencial es una transformación lineal tenemos que $T_{\mathbf{p}} \mathbf{S}$ es un subespacio de \mathbb{R}^3 . Por lo visto en el teorema anterior sabemos que $d_q X$ es inyectivo, entonces por el teorema de las dimensiones concluimos que $\dim T_{\mathbf{p}} \mathbf{S} = 2$, es decir, es un plano en \mathbb{R}^3 .

Proposición 6.3.4. *La definición del plano tangente no depende de la elección de la parametrización.*

Demostración. Supongamos que tenemos dos parametrizaciones de S por el punto p , $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ tal que $X(q) = p$ y $Y : V \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ tal que $Y(r) = p$ difeomorfismos sobre sus imágenes.



Sea $W = X(U) \cap Y(V)$ abierto de S . Consideremos las parametrizaciones restringidas a $X^{-1}(W)$ e $Y^{-1}(W)$ respectivamente.

$$\begin{array}{ccc}
 & p \in w \subset \mathbb{R}^3 & \\
 X \nearrow & & \nwarrow Y \\
 q \in X^{-1}(W) \subset \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{Y^{-1} \circ X} & r \in Y^{-1}(W) \subset \mathbb{R}^2
 \end{array}$$

Aplicando el diferencial tenemos que el siguiente diagrama conmuta

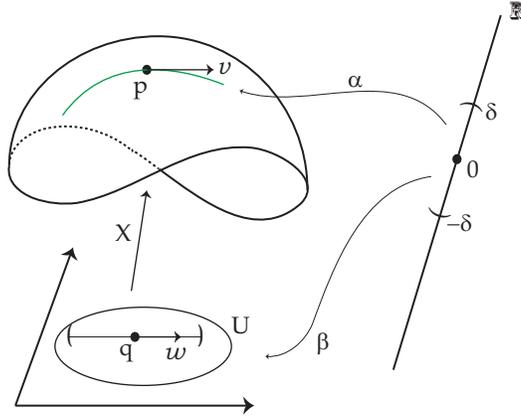
$$\begin{array}{ccc}
 & \mathbb{R}^3 & \\
 d_q X \nearrow & & \nwarrow d_r Y \\
 \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{d_q(Y^{-1} \circ X)} & \mathbb{R}^2
 \end{array}$$

Como $Y^{-1} \circ X$ es un difeomorfismo tenemos que $d_q(Y^{-1} \circ X)$ es un isomorfismo. Además $d_q X = d_r Y \circ d_q(Y^{-1} \circ X) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$. Entonces $\text{Im}(d_q X) = \text{Im}(d_r Y)$. \square

Teorema 6.3.5. $v \in T_p S \Leftrightarrow$ existe $\alpha : (-\delta, \delta) \subset \mathbb{R} \rightarrow S$ curva parametrizada tal que $\alpha(0) = p$ y $\alpha'(0) = v$.

Demostración. (\Rightarrow) Sea $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ parametrización de S por $p = X(q)$ con $q \in U$ y

sea $v \in T_p S = \text{Im}(d_q X)$. Entonces existe $w \in \mathbb{R}^2$ tal que $v = d_q X(w)$.



Como U es un abierto de \mathbb{R}^2 existe $\delta > 0$ tal que si $-\delta < t < \delta$ entonces $q + tw \in U$. entonces consideremos la curva $\beta : (-\delta, \delta) \rightarrow U$ definida por $\beta(t) = q + tw$, claramente β es diferenciable. Entonces, sea $\alpha : (-\delta, \delta) \rightarrow S$ la composición $\alpha(t) = X(\beta(t))$ para todo $t \in (-\delta, \delta)$. Evaluando en 0 obtenemos que $\alpha(0) = X(\beta(0)) = X(q) = p$. Aplicando la regla de la cadena tenemos que $\alpha'(0) = d_{\beta(0)} X(\beta'(0)) = d_q X(w) = v$.

(\Leftarrow) Sea $\alpha : (-\delta, \delta) \subset \mathbb{R} \rightarrow S$ diferenciable tal que $\alpha(0) = p$ y $\alpha'(0) = v$. Consideremos $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow V \subset S$ parametrización de S , y $X^{-1} : V \rightarrow U \subset \mathbb{R}^2$ su inversa (diferenciable). Sea la curva $\beta : (-\delta, \delta) \rightarrow U$ la curva $\beta(t) = X^{-1}(\alpha(t))$. Por lo tanto $\alpha = X \circ \beta$ y $\alpha'(0) = d_q X(\beta'(0))$. Entonces $v = d_q X(\beta'(0))$ y $v \in T_p S$. \square

6.3.1. Cálculo del plano tangente y de la recta normal

Sea \mathcal{C} una curva contenida en la superficie S , consideremos $\alpha(t) = X(u(t), v(t))$ una parametrización de \mathcal{C} , aplicando la regla de la cadena tenemos que

$$\alpha'(t) = X_u(u(t), v(t))u'(t) + X_v(u(t), v(t))v'(t).$$

Evaluando en $t = 0$ tenemos que todo vector del plano tangente se puede escribir como combinación lineal de $X_u(u, v)$ y $X_v(u, v)$, donde $X_u(u, v) = X_u(q)$ y $X_v(u, v) = X_v(q)$, siendo $p = X(q)$.

Si el punto p es **regular** los vectores $\{X_u(u, v), X_v(u, v)\}$ son LI. Entonces la ecuación del plano tangente queda determinada por:

$$|\overrightarrow{PX}, X_u(u, v), X_v(u, v)| = 0$$

o equivalentemente

$$\pi : (X - P) \cdot (X_u(u, v) \wedge X_v(u, v)) = 0.$$

La **recta normal** a la superficie en el punto P es la recta ortogonal al plano tangente a S en P , es decir, con vector dirección

$$u = X_u(u, v) \wedge X_v(u, v).$$

Llamaremos **vector normal unitario** a la superficie S en el punto P al vector

$$\vec{N}_X(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \frac{X_u(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \wedge X_v(\mathbf{u}, \mathbf{v})}{\|X_u(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \wedge X_v(\mathbf{u}, \mathbf{v})\|}.$$

Observación 6.3.6. p es un punto regular $\Leftrightarrow X_u(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \wedge X_v(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \neq 0$.

Observación 6.3.7. p es un punto regular $\Leftrightarrow d_q X$ es inyectivo.

En particular, p es regular $\forall p \in X(U) \Leftrightarrow X$ es un difeomorfismo. Esto quiere decir que S es una superficie regular si y sólo si todo punto de S es punto regular.

Ejemplo 6.3.1. Hallar la ecuación del plano tangente a la superficie de ecuación implícita $z = x^2 - y^2$ en el punto $P = (-1, 1, 0)$.

Parametrización $X(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = (\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{u}^2 - \mathbf{v}^2)$, entonces $X_u(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = (1, 0, 2\mathbf{u})$ y $X_v(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = (0, 1, -2\mathbf{v})$.

$$X_u \wedge X_v = (-2\mathbf{u}, 2\mathbf{v}, 1).$$

Evalutando en el punto P tenemos que el plano tangente es

$$((x, y, z) - (-1, 1, 0)) \cdot (2, 2, 1) = 0$$

Entonces $\pi: 2x + 2y + z = 0$.

Ejemplo 6.3.2 (Semiesfera). Consideremos la semiesfera superior de radio r y con centro en el origen: $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$, $z > 0$ y tomemos la siguiente parametrización:

$$\begin{aligned} X: [0, 2\pi) \times (0, \pi/2) &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (\mathbf{u}, \mathbf{v}) &\mapsto (r \cos \mathbf{u} \sin \mathbf{v}, r \sin \mathbf{u} \sin \mathbf{v}, r \cos \mathbf{v}) \end{aligned}$$

$X_u(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = (-r \sin \mathbf{u} \sin \mathbf{v}, r \cos \mathbf{u} \sin \mathbf{v}, -r \sin \mathbf{v})$ y $X_v(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = (r \cos \mathbf{u} \cos \mathbf{v}, r \sin \mathbf{u} \cos \mathbf{v}, -r \sin \mathbf{v})$.

Entonces

$$X_u(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \wedge X_v(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = -r^2 \sin \mathbf{v} (\cos \mathbf{u} \sin \mathbf{v}, \sin \mathbf{u} \sin \mathbf{v}, \cos \mathbf{v}).$$

$X_u(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \wedge X_v(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \vec{0} \Leftrightarrow \mathbf{v} = 0$. Entonces la parametrización es regular, es decir $\text{Im} d_q X$ es un plano.

Veamos cual es el versor normal a la esfera en un punto arbitrario: $\|X_u(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \wedge X_v(\mathbf{u}, \mathbf{v})\| = r^2 \sin \mathbf{v}$. Entonces

$$\vec{N} = -(\cos \mathbf{u} \sin \mathbf{v}, \sin \mathbf{u} \sin \mathbf{v}, \cos \mathbf{v})$$

Es un vector radial que apunta al centro de la esfera.

Ejemplo 6.3.3 (Cono). Consideremos el cono de ecuación $x^2 + y^2 - z^2 = 0$, $z \geq 0$. Podemos considerar la siguiente parametrización

$$\begin{aligned} X: (0, 2\pi) \times [0, \infty) &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (\mathbf{u}, \mathbf{v}) &\mapsto (\mathbf{v} \cos \mathbf{u}, \mathbf{v} \sin \mathbf{u}, \mathbf{v}) \end{aligned}$$

$X_u(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = (-\mathbf{v} \sin \mathbf{u}, \mathbf{v} \cos \mathbf{u}, 0)$ y $X_v(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = (\cos \mathbf{u}, \sin \mathbf{u}, 1)$

$$X_u(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \wedge X_v(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \mathbf{v}(\cos \mathbf{u}, \sin \mathbf{u}, -1) = 0 \Leftrightarrow \mathbf{v} = 0.$$

Entonces el punto $P = (0, 0, 0)$ es un punto singular y no podemos definir el plano tangente al cono en este punto.

6.3.2. Primera forma fundamental

Definición 6.3.8. Llamamos **primera forma fundamental** de S en p a la forma bilineal definida positiva I_p asociada al producto escalar inducido en el plano tangente a S en p por el producto interno usual en \mathbb{R}^3 .

Sea $w \in T_p S$ entonces $w = hX_u + kX_v$, siendo h y k funciones diferenciales.

$$w_1 \cdot w_2 = (h_1 X_u + k_1 X_v) \cdot (h_2 X_u + k_2 X_v) = h_1 h_2 X_u \cdot X_u + (h_1 k_2 + k_1 h_2) X_u \cdot X_v + k_1 k_2 X_v \cdot X_v$$

$$w_1 \cdot w_2 = \begin{pmatrix} h_1 & k_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_2 \\ k_2 \end{pmatrix}$$

donde

$$E = X_u \cdot X_u = x_u^2 + y_u^2 + z_u^2 > 0$$

$$F = X_u \cdot X_v = x_u x_v + y_u y_v + z_u z_v$$

$$G = X_v \cdot X_v = x_v^2 + y_v^2 + z_v^2 > 0.$$

Entonces tenemos que:

$$I_p : T_p S \times T_p S \rightarrow \mathbb{R} \\ (w_1, w_2) \mapsto \begin{pmatrix} h_1 & k_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_2 \\ k_2 \end{pmatrix}$$

siendo (h_1, k_1) y (h_2, k_2) las coordenadas de w_1 y w_2 en la base $\{X_u, X_v\}$ respectivamente.

Como $E > 0$ y $\begin{vmatrix} E & F \\ F & G \end{vmatrix} = EG - F^2 = \|X_u \wedge X_v\|^2 > 0$. Entonces I_p es definida positiva.

Cálculo de la longitud de una curva contenida en la superficie

Vamos a calcular la distancia entre dos puntos $P = X(u_0, v_0)$ y $Q = X(u_1, v_1)$ de la superficie. Consideremos una curva en la superficie con parametrización

$$\alpha(t) = X(u(t), v(t)) = (x(u(t), v(t)), y(u(t), v(t)), z(u(t), v(t)))$$

tal que en t_0 estamos en P y en t_1 estamos en Q .

$$P = \alpha(t_0) = X(u(t_0), v(t_0))$$

$$Q = \alpha(t_1) = X(u(t_1), v(t_1))$$

L = longitud de la curva entre los puntos P y Q . Se tiene que $L = \int_{t_0}^{t_1} \|\alpha'(t)\| dt$

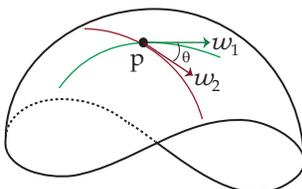
$$\begin{aligned} \|\alpha'(t)\|^2 &= (X_u u'(t) + X_v v'(t)) \cdot (X_u u'(t) + X_v v'(t)) \\ &= E(u'(t))^2 + 2F u'(t) v'(t) + G(v'(t))^2 \\ &= I_{\alpha(t)}(\alpha'(t), \alpha'(t)) \end{aligned}$$

Entonces

$$L = \int_{t_0}^{t_1} (I_{\alpha(t)}(\alpha'(t), \alpha'(t)))^{1/2} dt.$$

Cálculo del ángulo entre dos curvas

Sean \mathcal{C}_1 y \mathcal{C}_2 dos curvas contenidas en S y sean w_1 vector tangente a \mathcal{C}_1 en P y w_2 un vector tangente a \mathcal{C}_2 en P . El ángulo que forman las dos curvas es el ángulo que forman los respectivos vectores tangentes en P .



Por lo tanto

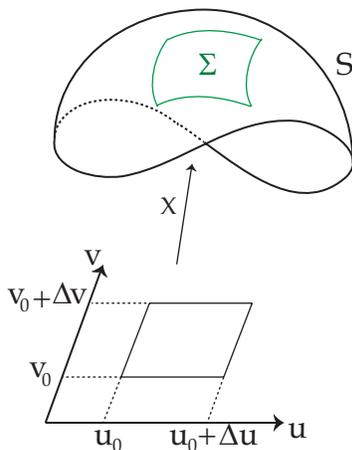
$$\cos \theta = \frac{w_1 \cdot w_2}{\|w_1\| \|w_2\|} = \frac{I_P(w_1, w_2)}{I_P(w_1, w_1)^{1/2} I_P(w_2, w_2)^{1/2}}$$

Las curvas \mathcal{C}_1 y \mathcal{C}_2 son ortogonales si $\theta = \pi/2$, esto es, si $I_P(w_1, w_2) = 0$.

Cálculo de área de una región de una superficie

Consideremos la región Σ de la superficie limitada por las curvas coordenadas

$$X(u_0, v), X(u_0 + \Delta u, v), X(u, v_0), X(u, v_0 + \Delta v)$$



El incremento de área A de la región Σ viene dada por el producto de las longitudes de sus lados por el seno del ángulo que forman, esto es

$$\begin{aligned} \Delta A &= \|X_u(u, v)\| \|X_v(u, v)\| \sin \alpha \Delta u \Delta v \\ &= \|X_u(u, v) \wedge X_v(u, v)\| \Delta u \Delta v \\ &= \sqrt{EG - F^2} \Delta u \Delta v \end{aligned}$$

Entonces

$$A = \iint_{\Sigma} \sqrt{EG - F^2} du dv.$$

Ejemplo 6.3.4. Consideremos la parametrización de la esfera de radio 1 y centro el origen:

$$X(u, v) = (\cos u \cos v, \cos u \sin v, \sin u), \quad (u, v) \in (-\pi/2, \pi/2) \times [0, 2\pi).$$

Se pide

- (a) Hallar la primera forma fundamental.

$$X_u(u, v) = (-\sin u \cos v, -\sin u \sin v, \cos u)$$

$$X_v(u, v) = (-\cos u \sin v, \cos u \cos v, 0)$$

Entonces

$$E(u, v) = \sin^2 u (\cos^2 v + \sin^2 v) + \cos^2 u = 1,$$

$$F(u, v) = \sin u \cos v \cos u \sin v - \sin u \sin v \cos u \cos v = 0,$$

$$G(u, v) = \cos^2 u \sin^2 v + \cos^2 u \cos^2 v = \cos^2 u.$$

La matriz asociada a la primera forma fundamental en un punto arbitrario $P = X(u, v)$ es de la forma

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \cos^2 u \end{pmatrix}$$

Como $F = 0$ las curvas coordenadas $X(u_0, v)$ (paralelo) y $X(u, v_0)$ (meridiano) son ortogonales entre sí.

- (b) Hallar la longitud de la curva $X(u, v_0)$.

$$\alpha(u) = X(u, v_0) = (\cos u \cos v_0, \cos u \sin v_0, \sin u)$$

$$\alpha'(u) = X_u(u, v_0) = 1 \cdot X_u(u, v_0) + 0 \cdot X_v(u, v_0).$$

Entonces $\text{coord}_B \alpha'(u) = (1, 0)$, siendo $B = \{X_u, X_v\}$.

Luego

$$I_{\alpha(u)}(\alpha'(u), \alpha'(u)) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \cos^2 u \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1.$$

Entonces $L = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 1 dt = \pi$.

- (c) Hallar la longitud de la curva $X(u_0, v)$.

$$\beta(v) = X(u_0, v) = (\cos u_0 \cos v, \cos u_0 \sin v, \sin u_0)$$

$$\beta'(v) = X_v(u_0, v) = 0 \cdot X_u + 1 \cdot X_v.$$

Entonces

$$I_{\beta(v)}(\beta'(v), \beta'(v)) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \cos^2 u_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \cos^2 u_0.$$

Entonces $L = \int_0^{2\pi} \cos^2 u_0 dt = 2\pi \cos^2 u_0$.

Integrales de superficies

Definición 7.0.9. (Superficie paramétrica simple) Se dice que una superficie S de \mathbb{R}^3 es una **superficie paramétrica simple** si existen un abierto acotado D de \mathbb{R}^2 cuya frontera es una curva cerrada simple regular a trozos, y una aplicación $\Psi : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ inyectiva y de clase C^1 tal que su diferencial $d\Psi(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ tiene rango 2 para todo $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in D$, y además $S = \Psi(D)$.

De Ψ diremos que es una **parametrización** de S . Evidentemente una misma superficie paramétrica simple S puede tener varias parametrizaciones diferentes.

En el caso de que Ψ pueda extenderse (con las mismas propiedades) a un abierto mayor A que contenga a la clausura de D , llamaremos **borde** de S , y denotaremos por ∂S , a la curva cerrada en \mathbb{R}^3 definida por $\Psi(C)$, donde $C = \partial D$. Esta curva se supondrá siempre, salvo que se diga explícitamente lo contrario, orientada en el mismo sentido que resulte de componer Ψ con una parametrización de C recorrida en sentido positivo. Del compacto $\bar{S} = \Psi(\bar{D})$ diremos que es una **superficie paramétrica simple compacta** y con **borde**.

Conviene señalar que, aunque empleemos la misma notación, el borde geométrico ∂S así definido de una tal superficie S no coincide con su frontera topológica.

Sea S una superficie paramétrica simple y (\mathbf{u}, Ψ) una parametrización de S

$$\vec{N}_{\Psi}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \frac{\Psi_{\mathbf{u}} \wedge \Psi_{\mathbf{v}}}{\|\Psi_{\mathbf{u}} \wedge \Psi_{\mathbf{v}}\|}$$

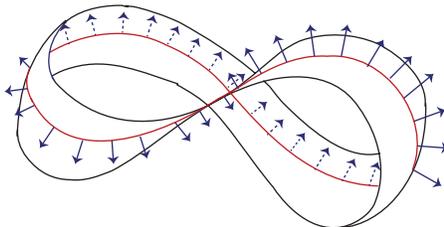
es un campo de vectores normales a S .

Definición 7.0.10. Orientar una superficie S es elegir en cada punto regular $p \in S$ uno sólo de los dos versores normales a S en p , $\vec{N}(p)$ de modo que varíe continuamente con p .

Definición 7.0.11. Una superficie es **orientable** si se puede orientar.

Una superficie S de \mathbb{R}^3 se dice que es orientable, si es posible determinar en ella dos lados, el lado exterior (o positivo) y el lado interior (o negativo).

Ejemplo 7.0.5. La banda de Möbius es una superficie no orientable.



Definición 7.0.12. Sea S una superficie paramétrica simple, parametrizada por $\Psi : D \rightarrow S$, y sea $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ un campo escalar continuo definido sobre S . Definimos la **integral** de f sobre S como

$$\iint_S f dS = \iint_D f(\Psi(\mathbf{u}, \mathbf{v})) \|\Psi_{\mathbf{u}}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \wedge \Psi_{\mathbf{v}}(\mathbf{u}, \mathbf{v})\| du dv.$$

Por otra parte, si $\vec{\mathcal{X}} : S \rightarrow \mathbb{R}^3$ es un campo vectorial continuo definido sobre S , definimos la **integral** de $\vec{\mathcal{X}}$ sobre S por

$$\begin{aligned} \iint_S \vec{\mathcal{X}} \cdot \vec{\mathbf{n}} &= \iint_D \vec{\mathcal{X}}(\Psi(\mathbf{u}, \mathbf{v})) \cdot (\Psi_{\mathbf{u}}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \wedge \Psi_{\mathbf{v}}(\mathbf{u}, \mathbf{v})) du dv \\ &= \iint_D \vec{\mathcal{X}}(\Psi(\mathbf{u}, \mathbf{v})) \cdot \vec{\mathbf{N}}_{\Psi}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \|\Psi_{\mathbf{u}} \wedge \Psi_{\mathbf{v}}\| du dv, \end{aligned}$$

es decir, la integral del producto escalar del campo normal a S con $\vec{\mathcal{X}}$, compuesto con Ψ . Obsérvese que la integral del campo vectorial $\vec{\mathcal{X}}$ sobre S puede verse como la integral del campo escalar $\vec{\mathcal{X}} \cdot \vec{\mathbf{N}}$ sobre S , es decir, podemos denotar también

$$\iint_S \vec{\mathcal{X}} \cdot \vec{\mathbf{n}} = \iint_S \vec{\mathcal{X}} \cdot \vec{\mathbf{N}} dS$$

Las interpretaciones físicas de estas integrales son variadas. Por ejemplo, un campo escalar $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ puede representar la densidad de masa por unidad de superficie de un material de grosor despreciable que está distribuido sobre una superficie S , y entonces $\iint_S f dS$ sería la masa total de dicho material.

Por su parte, la integral de un campo vectorial sobre una superficie S suele interpretarse como el flujo de un fluido que pasa a través de S . Puede imaginarse que S es una membrana porosa y que el vector $\vec{\mathcal{X}}(x, y, z) = \rho(x, y, z)\mathbf{V}(x, y, z)$, donde $\mathbf{V}(x, y, z)$ es el vector velocidad del fluido y el número $\rho(x, y, z)$ es su densidad de masa, es un vector que nos dice cuánta masa de fluido circula por el punto (x, y, z) en la dirección en que se mueve el fluido en ese punto, por unidad de área y de tiempo. Entonces el producto escalar $\vec{\mathcal{X}} \cdot \vec{\mathbf{N}}$ representa el componente del vector densidad de flujo en la dirección de $\vec{\mathbf{N}}$, y la masa de fluido que pasa a través de toda S vendrá determinada por $\iint_S \vec{\mathcal{X}} \cdot \vec{\mathbf{N}} dS = \iint_S \vec{\mathcal{X}} \cdot \vec{\mathbf{n}}$.

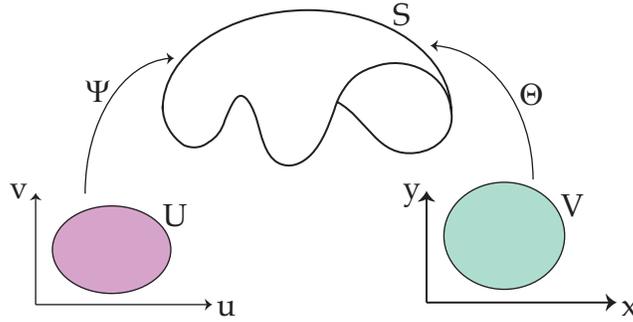
Estudiemos ahora la invariancia de estas integrales respecto de la parametrización escogida de S .

Lema 7.0.13. Sean $\Psi : U \rightarrow S$ y $\Theta : V \rightarrow S$ dos parametrizaciones de una misma superficie paramétrica simple S , y sea $h : V \rightarrow U$ el difeomorfismo de clase C^1 definido por $h = \Psi^{-1} \circ \Theta$. Denotemos $(h_1(x, y), h_2(x, y)) = h(x, y)$. Entonces

$$\Theta_x \wedge \Theta_y = (\Psi_u \wedge \Psi_v) \frac{\partial(h_1, h_2)}{\partial(x, y)}$$

donde $\frac{\partial(h_1, h_2)}{\partial(x, y)}$ denota el jacobiano de h .

Demostración.



Por la regla de la cadena tenemos

$$\Theta_x = \frac{\partial \Theta}{\partial x} = \frac{\partial \Psi}{\partial u} \frac{\partial h_1}{\partial x} + \frac{\partial \Psi}{\partial v} \frac{\partial h_2}{\partial x}$$

y también

$$\Theta_y = \frac{\partial \Theta}{\partial y} = \frac{\partial \Psi}{\partial u} \frac{\partial h_1}{\partial y} + \frac{\partial \Psi}{\partial v} \frac{\partial h_2}{\partial y}.$$

Multiplicando vectorialmente los miembros de la derecha de ambas igualdades, y utilizando las propiedades del producto vectorial tenemos que

$$\begin{aligned} \Theta_x \wedge \Theta_y &= \frac{\partial \Psi}{\partial u} \frac{\partial h_1}{\partial x} \wedge \frac{\partial \Psi}{\partial u} \frac{\partial h_1}{\partial y} + \frac{\partial \Psi}{\partial u} \frac{\partial h_1}{\partial x} \wedge \frac{\partial \Psi}{\partial v} \frac{\partial h_2}{\partial y} + \frac{\partial \Psi}{\partial v} \frac{\partial h_2}{\partial x} \wedge \frac{\partial \Psi}{\partial u} \frac{\partial h_1}{\partial y} + \frac{\partial \Psi}{\partial v} \frac{\partial h_2}{\partial x} \wedge \frac{\partial \Psi}{\partial v} \frac{\partial h_2}{\partial y} \\ &= \frac{\partial \Psi}{\partial u} \frac{\partial h_1}{\partial x} \wedge \frac{\partial \Psi}{\partial v} \frac{\partial h_2}{\partial y} + \frac{\partial \Psi}{\partial v} \frac{\partial h_2}{\partial x} \wedge \frac{\partial \Psi}{\partial u} \frac{\partial h_1}{\partial y} \\ &= \left(\frac{\partial \Psi}{\partial u} \wedge \frac{\partial \Psi}{\partial v} \right) \left(\frac{\partial h_1}{\partial x} \frac{\partial h_2}{\partial y} - \frac{\partial h_1}{\partial y} \frac{\partial h_2}{\partial x} \right) \\ &= \left(\frac{\partial \Psi}{\partial u} \wedge \frac{\partial \Psi}{\partial v} \right) \frac{\partial(h_1, h_2)}{\partial(x, y)}. \end{aligned}$$

□

Teorema 7.0.14. Sean $\Psi : U \rightarrow S$ y $\Theta : V \rightarrow S$ dos parametrizaciones de una misma superficie paramétrica simple S , y sea $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ un campo escalar continuo. Entonces

$$\iint_U f(\Psi(u, v)) \|\Psi_u(u, v) \wedge \Psi_v(u, v)\| du dv = \iint_V f(\Theta(x, y)) \|\Theta_x(x, y) \wedge \Theta_y(x, y)\| dx dy.$$

Es decir, la integral $\iint_S f dS$ no depende de la parametrización escogida.

Demostración. Denotemos $(h_1, h_2) = h(x, y)$ donde $h = \Psi^{-1} \circ \Theta$. Se tiene que $\Theta = \Psi \circ h$, y aplicando el teorema del cambio de variables junto con el lema anterior obtenemos

$$\begin{aligned} \iint_U f(\Psi(u, v)) \|\Psi_u(u, v) \wedge \Psi_v(u, v)\| du dv &= \\ \iint_V f(\Psi(h(x, y))) \|\Psi_u(h(x, y)) \wedge \Psi_v(h(x, y))\| \left| \frac{\partial(h_1, h_2)}{\partial(x, y)} \right| dx dy &= \\ \iint_V f(\Theta(x, y)) \|\Theta_x(x, y) \wedge \Theta_y(x, y)\| dx dy. \end{aligned}$$

□

El resultado análogo para campos vectoriales depende del sentido en que apunte la normal unitaria a S correspondiente a la parametrización en cuestión, como vemos a continuación.

Teorema 7.0.15. Sean $\Psi : U \rightarrow S$ y $\Theta : V \rightarrow S$ dos parametrizaciones de una misma superficie paramétrica simple S , denotemos

$$\mathbf{n}_\Psi = \Psi_u \wedge \Psi_v, \quad \mathbf{n}_\Theta = \Theta_x \wedge \Theta_y$$

y sean

$$\mathbf{N}_\Psi = \frac{\Psi_u \wedge \Psi_v}{\|\Psi_u \wedge \Psi_v\|}, \quad \mathbf{N}_\Theta = \frac{\Theta_x \wedge \Theta_y}{\|\Theta_x \wedge \Theta_y\|}.$$

Entonces, o bien $\mathbf{N}_\Psi(\mathbf{p}) = \mathbf{N}_\Theta(\mathbf{p})$ para todo $\mathbf{p} \in S$, o bien $\mathbf{N}_\Psi(\mathbf{p}) = -\mathbf{N}_\Theta(\mathbf{p})$ para todo $\mathbf{p} \in S$. En el primer caso diremos que las parametrizaciones Ψ y Θ inducen la misma orientación en S , y en el segundo caso diremos que inducen orientaciones opuestas.

Si Ψ y Θ inducen la misma orientación entonces, para todo campo vectorial continuo $\vec{X} : S \rightarrow \mathbb{R}^3$ se tendrá que

$$\iint_S \vec{X} \cdot \mathbf{n}_\Psi = \iint_S \vec{X} \cdot \mathbf{n}_\Theta,$$

mientras que si Ψ y Θ inducen orientaciones opuestas en S entonces será

$$\iint_S \vec{X} \cdot \mathbf{n}_\Psi = - \iint_S \vec{X} \cdot \mathbf{n}_\Theta.$$

Demostración. Como $N_\Psi(\mathbf{p})$ y $N_\Theta(\mathbf{p})$ son vectores perpendiculares a $T_p S$ para cada $\mathbf{p} \in S$, definen la misma recta; como además ambos tienen norma uno, se tiene que $N_\Psi(\mathbf{p}) \cdot N_\Theta(\mathbf{p}) = 1$ o bien $N_\Psi(\mathbf{p}) \cdot N_\Theta(\mathbf{p}) = -1$ para cada $\mathbf{p} \in S$. Pero, como las funciones $N_\Psi, N_\Theta : S \rightarrow \mathbb{R}^3$ son continuas y S es conexa, debe tenerse $N_\Psi(\mathbf{p}) \cdot N_\Theta(\mathbf{p}) = 1$ en toda S o bien $N_\Psi(\mathbf{p}) \cdot N_\Theta(\mathbf{p}) = -1$ en toda S . En el primer caso se tiene que $N_\Psi(\mathbf{p}) = N_\Theta(\mathbf{p})$ para todo $\mathbf{p} \in S$, y en el segundo caso que $N_\Psi(\mathbf{p}) = -N_\Theta(\mathbf{p})$ para todo $\mathbf{p} \in S$.

Por otra parte, si recordamos que

$$\iint_S \vec{X} \cdot \mathbf{n} = \iint_S \vec{X} \cdot \vec{N} dS,$$

el enunciado sobre las integrales es consecuencia inmediata de esta propiedad y del Teorema anterior. \square

Ejemplo 7.0.6. 1. Sea $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + 1}$ un campo escalar y

$$S = \{(x, y, z) : x = r \cos \theta, y = r \sin \theta, z = \theta : 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq r \leq 1\}.$$

Hallar $\iint_S dS$.

Consideremos la parametrización $\Psi : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por $\Psi(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta, \theta)$. Entonces

$$\Psi_r(r, \theta) = (\cos \theta, \sin \theta, 0), \quad \Psi_\theta(r, \theta) = (-r \sin \theta, r \cos \theta, 1)$$

$$\Rightarrow \Psi_r \wedge \Psi_\theta = (\sin \theta, -\cos \theta, r) \text{ y } \|\Psi_r \wedge \Psi_\theta\| = \sqrt{1 + r^2}.$$

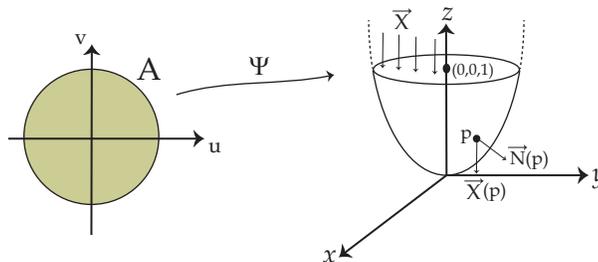
Por otro lado $f(\Psi(r, \theta)) = \sqrt{1 + r^2}$. Entonces

$$\iint_S f dS = \iint_U f(\Psi(r, \theta)) \|\Psi_r \wedge \Psi_\theta\| dr d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^1 (1+r^2) dr d\theta = 2\pi \left(r + \frac{r^3}{3} \right) \Big|_0^1 = 2\pi \left(1 + \frac{1}{3} \right) = \frac{8}{3}\pi.$$

2. Sean $\vec{X} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dado por $\vec{X}(x, y, z) = (0, 0, -1)$ y $S = \{(x, y, z) : z = x^2 + y^2\}$ es una superficie parametrizable que admite la parametrización

$$\Psi : \mathbb{R}^2 \rightarrow S, \text{ dada por } \Psi(u, v) = (u, v, u^2 + v^2).$$

Calculemos $\iint_A \vec{X} \cdot \vec{n}$, siendo $A = \{(x, y, z) \in S : 0 \leq z \leq 1\}$ con la orientación dada por el vector normal saliente (exterior).



$\vec{N}(x, y, z)$ es colineal al vector $(2x, 2y, -1)$ y $\Psi^{-1}(A) = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : u^2 + v^2 \leq 1\}$.

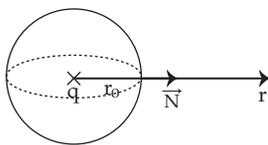
$$\vec{X}(\Psi(u, v)) = (0, 0, -1), \quad \vec{N}(\Psi(u, v)) = \frac{(2u, 2v, -1)}{\sqrt{1 + 4u^2 + 4v^2}}.$$

Entonces $\vec{X}(\Psi(u, v)) \cdot \vec{N}(\Psi(u, v)) = \frac{1}{\sqrt{1 + 4u^2 + 4v^2}}$.

$\Psi_u = (1, 0, 2u)$, $\Psi_v = (0, 1, 2v)$, $\Psi_u \wedge \Psi_v = (-2u, -2v, 1) \Rightarrow \|\Psi_u \wedge \Psi_v\| = \sqrt{1 + 4u^2 + 4v^2}$

$$\iint_A \vec{X} \cdot \vec{n} = \iint_{\Psi^{-1}(A)} 1 \, du \, dv = \text{área} \Psi^{-1}(A) = \pi.$$

3. Flujo del campo eléctrico $\vec{E}(\mathbf{r}) = k \frac{q}{r^3} \vec{r}$ a través de la esfera de centro q , radio r_0 con la normal \vec{N} saliente.



En este caso

$$\begin{aligned} \vec{E} \cdot \vec{N} &= \frac{kq}{r_0^2} \\ \Rightarrow \iint_S \vec{E} \cdot \vec{n} &= \frac{kq}{r_0^2} \iint_S dS = \frac{kq}{r_0^2} 4\pi r_0^2 = 4\pi kq = \frac{q}{\epsilon_0}. \end{aligned}$$

Ejemplo 7.0.7 (Aplicaciones físicas: flujo de calor). Sea $T(x, y, z)$ la temperatura en un punto $(x, y, z) \in W \subset \mathbb{R}^3$. Si T es C^1 entonces

$$\nabla T = \left(\frac{\partial T}{\partial x}, \frac{\partial T}{\partial y}, \frac{\partial T}{\partial z} \right)$$

es el gradiente de temperatura, y el calor fluye según el campo vectorial $\vec{F} = -k\nabla T$ donde k es una constante positiva llamada **conductividad**. Notar que el flujo de calor, como cabe esperar, se produce de las zonas calientes hacia las frías, pues $-\nabla T$ apunta en la dirección donde T decrece.

La tasa total de flujo o flujo de calor a través de la superficie S viene dada por

$$\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n}.$$

Supongamos que una función de temperatura está dada por $T(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$. Sea S la esfera unidad $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, orientada según la normal exterior. Hallar el flujo de calor a través de S , si $k = 1$.

Se tiene que $\vec{F}(x, y, z) = -\nabla T(x, y, z) = -2(x, y, z)$. Como $\vec{n} = \vec{r} = (x, y, z)$ se sigue que $\vec{F} \cdot \vec{n} = -2(x^2 + y^2 + z^2) = -2$. Entonces

$$\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} = -2 \iint_S dS = -8\pi.$$

Proposición 7.0.16 (Propiedades de las integrales de superficie). 1. **Linealidad:** Sea S una superficie paramétrica simple, f, g dos campos escalares y \vec{X}, \vec{Y} dos campos vectoriales, todos ellos continuos en S , y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Se verifica entonces que

$$\begin{aligned} \iint_S (\alpha f + \beta g) dS &= \alpha \iint_S f dS + \beta \iint_S g dS \\ \iint_S (\alpha \vec{X} + \beta \vec{Y}) \cdot \vec{N} &= \alpha \iint_S \vec{X} \cdot \vec{N} + \beta \iint_S \vec{Y} \cdot \vec{N} \end{aligned}$$

2. **Continuidad:** Sean S una superficie paramétrica simple y $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ un campo escalar continuo. Tomemos una constante $M > 0$ de forma que $|f(x, y, z)| \leq M$ para todo punto $(x, y, z) \in S$. Entonces

$$\left| \iint_S f dS \right| \leq M \text{Área}(S).$$

Si ahora \vec{X} es un campo vectorial continuo en S y $\|\vec{X}(x, y, z)\| \leq K$ para todo $(x, y, z) \in S$, usando la desigualdad de Cauchy-Schwartz se comprueba que

$$\left| \iint_S \vec{X} \cdot \vec{n} \right| \leq K \text{Área}(S).$$

Teorema de Stokes y de Gauss

8.1. Teorema de Stokes

El teorema de Stokes es una generalización del teorema de Green en cuanto que relaciona la integral de un campo vectorial sobre una curva cerrada que es borde de una superficie global con la integral de su rotor en dicha superficie.

Definición 8.1.1. S es una **superficie global (sin borde)** si para todo punto $p \in S$ existe un conjunto (abierto) $U_p \subset \mathbb{R}^3$, $p \in U_p$ tal que $S \cap U_p$ es una superficie parametrizada.

Una superficie parametrizable $S \subset \mathbb{R}^3$ se dice que es orientada con borde si admite una parametrización $\Psi : D \rightarrow \mathbb{R}^3$, $D \subset \mathbb{R}^2$, y se llama borde de S a la curva $\partial S = \Psi(\partial D)$. Si la curva cerrada $\partial D \subset \mathbb{R}^2$ se orienta positivamente, y $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ es una parametrización con esa orientación, entonces $\Psi \circ \alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ es una parametrización del borde ∂S que le da una orientación positiva o coherente con la de S (dada por el vector normal asociado a Ψ).

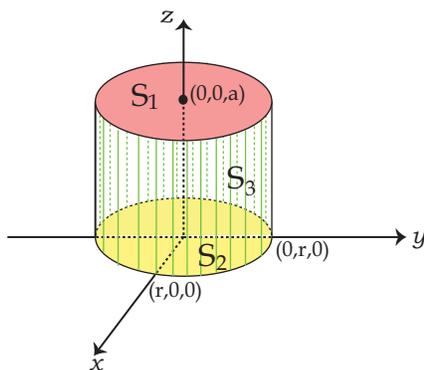
Si S es una superficie orientada con borde ∂S , la orientación del borde coherente con la de la superficie se puede caracterizar informalmente como aquella en la que: “Al andar sobre el borde con el vector normal a la superficie apuntando a la cabeza, la superficie queda a la izquierda”.

Definición 8.1.2. Consideremos S una superficie global (con borde) tal que es unión finita de parametrizaciones, S_1, \dots, S_n dos a dos disjuntas o tales que su intersección es unión finita de curvas regulares a trozos. Entonces, si $\vec{X} : S \rightarrow \mathbb{R}^3$ es un campo continuo tenemos que

$$\iint_S \vec{X} \cdot \mathbf{n} = \iint_{S_1} \vec{X} \cdot \vec{n} + \iint_{S_2} \vec{X} \cdot \vec{n} + \dots + \iint_{S_n} \vec{X} \cdot \vec{n}.$$

Ejemplo 8.1.1. Sea S la superficie que se obtiene como $S = S_1 \cup S_2 \cup S_3$, donde $S_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq r^2, z = a\}$, $S_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq r^2, z = 0\}$ y $S_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = r^2, 0 \leq z \leq a\}$ con la orientación dada por el vector normal

saliente.

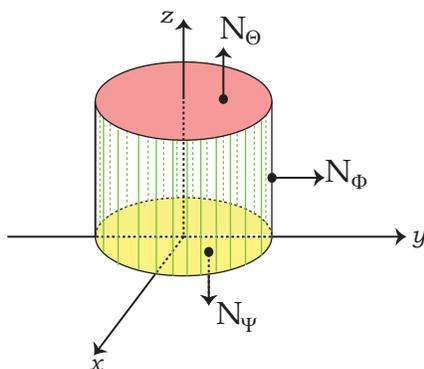


Veamos como parametrizar a S de forma que sean compatibles con al orientación de la superficie. Sean $\Theta(u_1, v_1) = (v_1 \sin u_1, v_1 \cos u_1, a)$, $\Psi(u_2, v_2) = (v_2 \cos u_2, v_2 \sin u_2, 0)$ y $\Phi(u_3, v_3) = (r \cos u_3, r \sin u_3, v_3)$, parametrizaciones de S_1 , S_2 y S_3 respectivamente. Veamos que los vectores normales son salientes.

$$N_{\Theta} = \frac{(v_1 \cos u_1, -v_1 \sin u_1, 0) \wedge (\sin u_1, \cos u_1, 0)}{\| (v_1 \cos u_1, -v_1 \sin u_1, 0) \wedge (\sin u_1, \cos u_1, 0) \|} = \frac{(0, 0, v_1)}{v_1} = (0, 0, 1).$$

$$N_{\Psi} = \frac{(-v_2 \sin u_2, v_2 \cos u_2, 0) \wedge (\cos u_2, \sin u_2, 0)}{\| (-v_2 \sin u_2, v_2 \cos u_2, 0) \wedge (\cos u_2, \sin u_2, 0) \|} = \frac{(0, 0, -v_2)}{v_2} = (0, 0, -1).$$

$$N_{\Phi} = \frac{(-r \sin u_3, r \cos u_3, 0) \wedge (0, 0, 1)}{\| (-r \sin u_3, r \cos u_3, 0) \wedge (0, 0, 1) \|} = \frac{(r \cos u_3, r \sin u_3, 0)}{r} = (\cos u_3, \sin u_3, 0).$$



Consideremos el campo $\vec{X} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dado por $\vec{X}(x, y, z) = (0, 0, z)$. Hallar $\iint_S \vec{X} \cdot \vec{n}$.

$$\iint_S \vec{X} \cdot \vec{n} = \iint_{S_1} \vec{X} \cdot \vec{n} + \iint_{S_2} \vec{X} \cdot \vec{n} + \iint_{S_3} \vec{X} \cdot \vec{n}.$$

Como $\vec{X} \perp N_{\Phi}$ tenemos que $\iint_{S_3} \vec{X} \cdot \vec{n} = 0$.

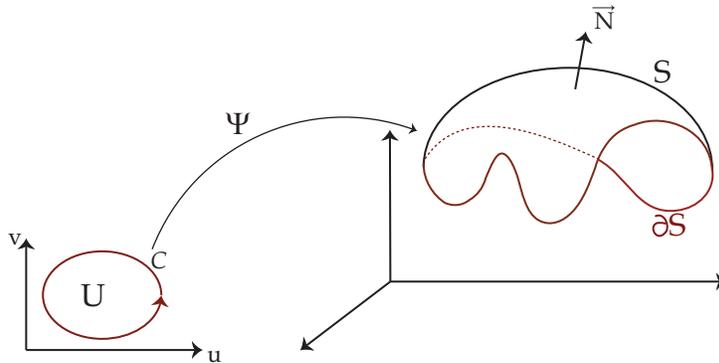
Por otro lado, si calculamos $\vec{X}(\Psi(u, v)) = (0, 0, 0)$, entonces $\iint_{S_2} \vec{X} \cdot \vec{n} = 0$. Por lo tanto

$$\begin{aligned} \iint_S \vec{X} \cdot \vec{n} &= \iint_{S_1} \vec{X} \cdot \vec{n}. \\ \iint_{S_1} \vec{X} \cdot \vec{n} &= \iint \vec{X}(\Theta(u, v)) \cdot (\Theta_u \wedge \Theta_v) du dv \\ &= \iint (0, 0, a) \cdot (0, 0, v) du dv \\ &= \int_0^r \int_0^{2\pi} a v du dv = 2\pi a \int_0^r v dv = \pi a r^2. \end{aligned}$$

Teorema 8.1.3 (de Stokes). *Sea S una superficie en \mathbb{R}^3 , regular, orientada según el vector normal unitario \vec{N} , con borde una curva regular o regular a trozos, cerrada, simple, orientada coherentemente con la orientación de S (regla de la mano derecha). Si \vec{X} es un campo vectorial C^2 en algún abierto que contiene a $S \cup \partial S$. Entonces*

$$\iint_S \text{rot } \vec{X} \cdot \vec{n} = \int_{\partial S} \vec{X} \cdot ds.$$

Teorema 8.1.4 (de Stokes para superficies parametrizadas). *Sea C es una curva plana, regular a trozos, cerrada, simple, orientada en sentido antihorario y designamos por U a la componente conexa acotada de $\mathbb{R}^2 - C$. Supongamos que $\Psi : V \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ es una parametrización en algún abierto V que contiene a $U \cup C$ y sea $S = \Psi(U)$. Es claro que S es una superficie parametrizable y que $\partial S = \Psi(C)$ es una curva regular a trozos, simple, cerrada que llamamos el borde de S .*



La orientación de ∂S queda determinada por la de C vía Ψ . Si \vec{X} es un campo vectorial C^2 en algún abierto que contiene a $S \cup \partial S$. Entonces

$$\iint_S \text{rot } \vec{X} \cdot \vec{n} = \int_{\partial S} \vec{X} \cdot ds.$$

Demostración. Sea α la parametrización de C dada por $\alpha(t) = (U(t), V(t))$ ($t \in [a, b]$). Si $\vec{X} = (P, Q, R)$ entonces

$$\text{rot } \vec{X} = \nabla \wedge \vec{X} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}, \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right).$$

Por otra parte, si $\Psi(u, v) = (X(u, v), Y(u, v), Z(u, v))$ ($(u, v) \in U$) entonces

$$\Psi_u \wedge \Psi_v = \left(\frac{\partial(Y, Z)}{\partial(u, v)}, \frac{\partial(Z, X)}{\partial(u, v)}, \frac{\partial(X, Y)}{\partial(u, v)} \right).$$

Necesitamos probar

$$\begin{aligned} \iint_S \text{rot } \vec{X} \cdot \vec{n} &= \iint_U \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}, \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \cdot \left(\frac{\partial(Y, Z)}{\partial(u, v)}, \frac{\partial(Z, X)}{\partial(u, v)}, \frac{\partial(X, Y)}{\partial(u, v)} \right) du dv \\ &= \int_{\partial S} P dx + Q dy + R dz. \end{aligned}$$

y para esto basta demostrar las tres igualdades siguientes

$$\begin{aligned} \iint_U \left[\frac{\partial P}{\partial z} \frac{\partial(Z, X)}{\partial(u, v)} - \frac{\partial P}{\partial y} \frac{\partial(X, Y)}{\partial(u, v)} \right] du dv &= \int_{\partial S} P dx \\ \iint_U \left[\frac{\partial Q}{\partial x} \frac{\partial(X, Y)}{\partial(u, v)} - \frac{\partial Q}{\partial z} \frac{\partial(Y, Z)}{\partial(u, v)} \right] du dv &= \int_{\partial S} Q dy \\ \iint_U \left[\frac{\partial R}{\partial y} \frac{\partial(Y, Z)}{\partial(u, v)} - \frac{\partial R}{\partial x} \frac{\partial(Z, X)}{\partial(u, v)} \right] du dv &= \int_{\partial S} R dz \end{aligned}$$

Probaremos sólo la primera igualdad, ya que las dos restantes admiten un razonamiento análogo.

Como $\gamma(t) = \Psi(\alpha(t)) = (X(U(t), V(t)), Y(U(t), V(t)), Z(U(t), V(t)))$ ($t \in [a, b]$), se tiene

$$\begin{aligned} \int_{\partial S} P dx &= \int_a^b (P(\gamma(t)), 0, 0) \cdot \gamma'(t) dt \\ &= \int_a^b P(\Psi(\alpha(t))) \left(\frac{\partial X}{\partial u} U'(t) + \frac{\partial X}{\partial v} V'(t) \right) dt \\ &= \int_a^b p(\alpha(t)) \left(\frac{\partial X}{\partial u}, \frac{\partial X}{\partial v} \right) \Big|_{\alpha(t)} \cdot \alpha'(t) dt = \int_C p \left(\frac{\partial X}{\partial u} du + \frac{\partial X}{\partial v} dv \right), \end{aligned}$$

siendo $p = P \circ \Psi$.

Ahora aplicamos el teorema de Green:

$$\begin{aligned} \int_C p \left(\frac{\partial X}{\partial u} du + \frac{\partial X}{\partial v} dv \right) &= \iint_U \left[\frac{\partial}{\partial u} \left(p \frac{\partial X}{\partial v} \right) - \frac{\partial}{\partial v} \left(p \frac{\partial X}{\partial u} \right) \right] du dv \\ &= \iint_U \left(\frac{\partial p}{\partial u} \frac{\partial X}{\partial v} + p \frac{\partial^2 X}{\partial u \partial v} - p \frac{\partial^2 X}{\partial v \partial u} - \frac{\partial p}{\partial v} \frac{\partial X}{\partial u} \right) du dv \\ &= \iint_U \left(\frac{\partial p}{\partial u} \frac{\partial X}{\partial v} - \frac{\partial p}{\partial v} \frac{\partial X}{\partial u} \right) du dv \end{aligned}$$

Recordando que $p(u, v) = P(X(u, v), Y(u, v), Z(u, v))$ tenemos que

$$\begin{aligned} & \iint_U \left(\frac{\partial p}{\partial u} \frac{\partial X}{\partial v} - \frac{\partial p}{\partial v} \frac{\partial X}{\partial u} \right) du dv = \\ &= \iint_U \left[\left(\frac{\partial P}{\partial x} \frac{\partial X}{\partial u} + \frac{\partial P}{\partial y} \frac{\partial Y}{\partial u} + \frac{\partial P}{\partial z} \frac{\partial Z}{\partial u} \right) \frac{\partial X}{\partial v} - \left(\frac{\partial P}{\partial x} \frac{\partial X}{\partial v} + \frac{\partial P}{\partial y} \frac{\partial Y}{\partial v} + \frac{\partial P}{\partial z} \frac{\partial Z}{\partial v} \right) \frac{\partial X}{\partial u} \right] du dv \\ &= \iint_U \left[\frac{\partial P}{\partial z} \frac{\partial(Z, X)}{\partial(u, v)} - \frac{\partial P}{\partial y} \frac{\partial(X, Y)}{\partial(u, v)} \right] du dv. \end{aligned}$$

□

Ejemplo 8.1.2 (Ley de Faraday). Una ley básica de la teoría electromagnética es que si $E(t, x, y, z)$ y $B(t, x, y, z)$ representan los campos eléctrico y magnético en el tiempo t , entonces

$$\operatorname{rot} E = -\frac{\partial B}{\partial t}$$

donde $\operatorname{rot} E$ se calcula manteniendo t fija.

Usemos el teorema de Stokes para determinar lo que esto significa físicamente. Supongamos que S es una superficie a la que se aplica el teorema de Stokes. Entonces

$$\begin{aligned} \int_{\partial S} \vec{E} \cdot d\vec{s} &= \iint_S \operatorname{rot} \vec{E} \cdot \vec{n} = - \iint_S \frac{\partial B}{\partial t} \cdot \vec{n} \\ &= -\frac{\partial}{\partial t} \iint_S B \cdot \vec{n}. \end{aligned}$$

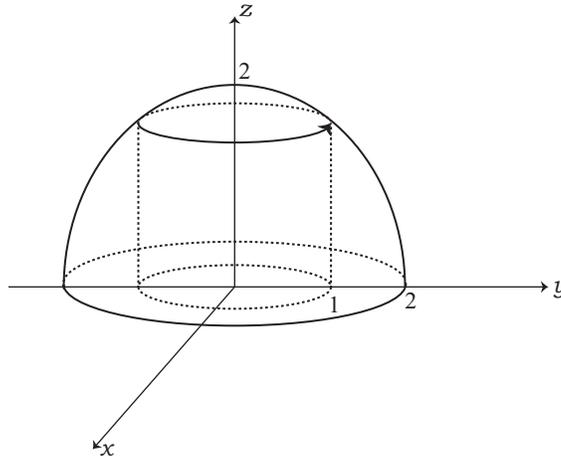
(La última igualdad se puede justificar si B es de clase C^1). Así, obtenemos

$$\int_{\partial S} \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\frac{\partial}{\partial t} \iint_S B \cdot \vec{n}.$$

Esta igualdad se conoce como ley de Faraday. La cantidad $\int_{\partial S} \vec{E} \cdot d\vec{s}$ representa el voltaje alrededor de ∂S , y si ∂S fuera un alambre, una corriente fluiría en proporción a este voltaje. Además, $\iint_S B \cdot \vec{n}$ se llama flujo de B , o flujo magnético. Luego, la ley de Faraday dice que el voltaje alrededor de un lazo es igual al negativo de la tasa de cambio del flujo magnético a través del lazo.

Ejemplo 8.1.3. Calcular la circulación del campo de velocidades de un fluido $F(x, y, z) = (\tan^{-1}(x^2), 3x, e^{3z} \tan z)$ a lo largo de la intersección de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ con el

cilindro $x^2 + y^2 = 1$, con $z > 0$.



Apliquemos el teorema de Stokes. Para ello veamos que da el rotor de F :

$$\text{rot}(F) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ \tan^{-1}(x^2) & 3x & e^{3z} \tan z \end{vmatrix} = (0, 0, 3).$$

La superficie sobre la cual vamos a trabajar es el casquete que resulta de intersectar la media esfera con el cilindro, que admite la siguiente parametrización:

$$\Psi(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta, \sqrt{4 - r^2}), \quad 0 \leq r \leq 1, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi.$$

El vector normal a la superficie es

$$\Psi_r \wedge \Psi_\theta = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \cos \theta & \sin \theta & -r/\sqrt{4-r^2} \\ -r \sin \theta & r \cos \theta & 0 \end{vmatrix} = \left(\frac{r^2}{\sqrt{4-r^2}} \cos \theta, \frac{r^2}{\sqrt{4-r^2}} \sin \theta, r \right).$$

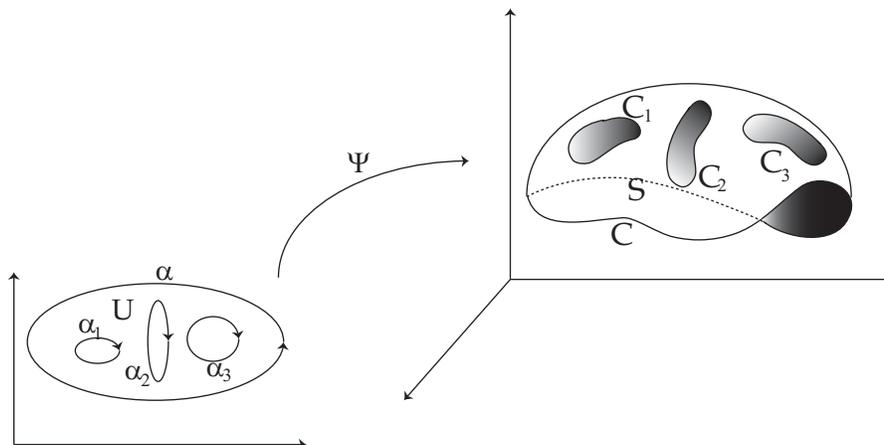
Como la coordenada en z es positiva el vector normal es saliente a la superficie que es la orientación compatible con la orientación dada en la curva.

$$\int_C F \cdot ds = \iint_S \text{rot } F \cdot \mathbf{n} = \iint_D \text{rot } F \cdot (\Psi_r \wedge \Psi_\theta) dr d\theta = \int_0^1 \int_0^{2\pi} 3r dr d\theta = 3\pi.$$

8.1.1. Extensiones del teorema de Stokes

El teorema de Stokes puede extenderse a regiones regulares simples más generales. Si U es una región múltiplemente conexa (con un número finito de agujeros) y $\Psi : U \rightarrow S$ es

una parametrización. Entonces S tendrá la misma cantidad de agujeros.

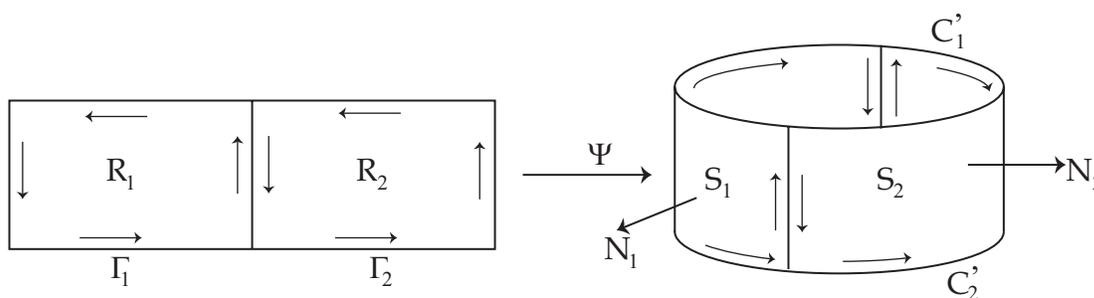


Si siguiendo el mismo razonamiento utilizado para la demostración vista del teorema de Stokes pero aplicando el teorema de Green generalizado, en lugar de una integral de línea precisamos una suma de integrales de línea, con los signos adecuados (dependiendo de la orientación de la superficie), tomadas sobre las imágenes de las curvas que forman parte de la frontera de U . Por ejemplo, si U tiene frontera como se muestra en la figura y las curvas se recorren en el sentido que se ilustra, y la parametrización es compatible con la orientación de S la identidad del teorema de Stokes toma la forma

$$\iint_S \text{rot } \vec{X} \cdot \vec{n} = \int_C \vec{X} \cdot ds + \int_{C_1} \vec{X} \cdot ds + \int_{C_2} \vec{X} \cdot ds + \int_{C_3} \vec{X} \cdot ds.$$

El teorema de Stokes también puede generalizarse a superficies regulares no simples. Veamos algunos ejemplos. Veamos algunos ejemplos.

Consideremos primero el cilindro dibujado en la siguiente figura.



Es la reunión de dos superficies paramétricas regulares simples S_1 y S_2 imágenes de dos rectángulos adyacentes R_1 y R_2 a través de las aplicaciones Ψ_1 y Ψ_2 , respectivamente. Si γ_1 describe la frontera Γ_1 positivamente orientada, de R_1 y γ_2 la frontera Γ_2 de R_2 asimismo orientada positivamente, las funciones ρ_1 y ρ_2 definidas por

$$\rho_1(t) = \Psi_1(\gamma_1(t)), \quad \rho_2(t) = \Psi_2(\gamma_2(t))$$

describen las imágenes C_1 y C_2 , de Γ_1 y Γ_2 respectivamente. En este ejemplo las representaciones Ψ_1 y Ψ_2 pueden elegirse de modo que estén de acuerdo en la intersección $\Gamma_1 \cap \Gamma_2$. Si aplicamos el teorema de Stokes a cada parte S_1 y S_2 y sumamos las dos identidades, obtenemos:

$$\iint_{S_1} \text{rot } \vec{X} \cdot \vec{N}_1 dS + \iint_{S_2} \text{rot } \vec{X} \cdot \vec{N}_2 dS = \int_{C_1} \vec{X} \cdot d\rho_1 + \int_{C_2} \vec{X} \cdot d\rho_2, \quad (8.1)$$

donde N_1 y N_2 son los versores normales determinados por los productos vectoriales de Ψ_1 y Ψ_2 , respectivamente.

Representemos con Ψ la aplicación de $R_1 \cup R_2$ que coincide con Ψ_1 en R_1 y con Ψ_2 en R_2 , y sea N el correspondiente normal unitario determinado por el producto vectorial fundamental de Ψ . Ya que las normales N_1 y N_2 coinciden en dirección en $S_1 \cap S_2$, N es igual a N_1 en S_1 e igual a N_2 en S_2 . Por consiguiente, la suma de las integrales de superficie del primer miembro de 8.1 es igual a

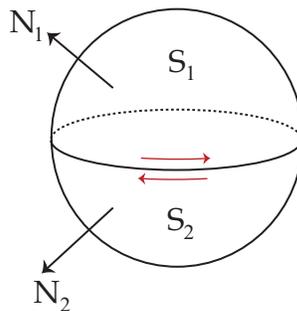
$$\iint_{S_1 \cup S_2} \text{rot } \vec{X} \cdot \vec{N} dS.$$

En este ejemplo, las representaciones Ψ_1 y Ψ_2 pueden elegirse de modo que ρ_1 y ρ_2 determinen direcciones opuestas en cada arco de la intersección $C_1 \cap C_2$, como indican las flechas en la figura. Las dos integrales de línea del segundo miembro de 8.1 pueden reemplazarse por una suma de integrales de línea a lo largo de las dos circunferencias C'_1 y C'_2 que forman el borde superior e inferior de $S_1 \cup S_2$, puesto que las integrales de línea a lo largo de cada arco de la intersección $C_1 \cap C_2$ se cancelan. Por lo tanto, la ecuación 8.1 puede escribirse en la forma

$$\iint_{S_1 \cup S_2} \text{rot } \vec{X} \cdot \vec{N} dS = \int_{C'_1} \vec{X} \cdot d\rho_1 + \int_{C'_2} \vec{X} \cdot d\rho_2, \quad (8.2)$$

donde las integrales de línea se calculan en las direcciones deducidas de las de Γ_1 y Γ_2 . Las dos circunferencias C'_1 y C'_2 forman la frontera completa de $S_1 \cup S_2$. La ecuación 8.2 expresa la integral de superficie de $\text{rot } \vec{X} \cdot \vec{N}$ sobre $S_1 \cup S_2$ como una integral de línea sobre la frontera completa de $S_1 \cup S_2$. Esa ecuación es la extensión del teorema de Stokes a un cilindro.

Otra superficie orientable es la esfera dibujada en la siguiente figura.



Es la unión de dos superficies paramétricas simples (hemisferios) S_1 y S_2 , que pueden considerarse imágenes de un disco circular del plano xy a través de las aplicaciones Ψ_1 y Ψ_2 , respectivamente. Damos a Ψ , ρ_1 , ρ_2 , C_1 , C_2 el mismo significado que en el ejemplo anterior. En este caso las curvas C_1 y C_2 están identificadas por la aplicación Ψ (coinciden a lo largo del ecuador), y la superficie $S_1 \cup S_2$ se llama **cerrada**. Además, N_1 y N_2 pueden elegirse de modo que las direcciones determinadas por ρ_1 y ρ_2 sean opuestas en C_1 y C_2 , como se indica con flechas en la figura. (Esto ocurre porque $S_1 \cup S_2$ es orientable). Si aplicamos el teorema de Stokes a cada hemisferio y sumamos los resultados obtenemos la ecuación 8.1, como antes. Las normales N_1 y N_2 coinciden en la intersección $C_1 \cap C_2$, y podemos reunir las integrales sobre S_1 y S_2 en una sobre toda la esfera.

Las dos integrales de línea del segundo miembro de 8.1 se reducen, y nos queda la fórmula

$$\iint_{S_1 \cup S_2} \operatorname{rot} \vec{X} \cdot \vec{N} dS = 0.$$

Este resultado es válido para toda superficie cerrada orientable.

8.2. Reconstrucción de un campo vectorial a partir de su rotor

Al estudiar el gradiente de un campo escalar vimos criterios que permiten determinar si un campo vectorial es o no un gradiente. Consideramos ahora la pregunta análoga relativa al rotor de un campo vectorial. Dado un campo vectorial Y , ¿hay un campo X tal que $\operatorname{rot} X = Y$?

Supongamos que $Y = (P, Q, R)$ y $X = (L, M, N)$. Para resolver la ecuación $\operatorname{rot} X = Y$ tenemos que resolver el sistema de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales

$$\frac{\partial N}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial z} = P, \quad \frac{\partial L}{\partial z} - \frac{\partial N}{\partial x} = Q, \quad \frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial y} = R \quad (8.3)$$

en las que P , Q y R son conocidas y L , M , N son las funciones incógnitas.

No siempre es posible resolver tal sistema. Por ejemplo, demostramos en la sección 5.2 que la divergencia de un rotor es siempre cero. Por tanto, para que el sistema 8.3 tenga solución en un cierto conjunto abierto S es necesario que

$$\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = 0 \quad (8.4)$$

en todo S . Esta condición es también suficiente si restringimos convenientemente el conjunto S en el que se verifica 8.4.

Teorema 8.2.1. *Si Y es un campo de clase C^1 en un intervalo abierto S de \mathbb{R}^3 , entonces existe un campo vectorial X tal que $\operatorname{rot} X = Y$ si y sólo si $\operatorname{div} Y = 0$ en todo S (es decir si Y es solenoidal).*

Demostración. La necesidad de la condición $\operatorname{div} \mathbf{Y} = 0$ ha sido ya establecida, puesto que la divergencia de un rotor siempre es cero. Para probar la suficiencia tenemos que encontrar tres funciones L , M y N que satisfagan las tres ecuaciones 8.3. Intentemos resolver el problema tomando $L = 0$. Entonces la segunda y tercera ecuaciones 8.3 se transforman en

$$\frac{\partial N}{\partial x} = -Q, \quad \frac{\partial M}{\partial x} = R.$$

Entonces

$$N(x, y, z) = - \int_{x_0}^x Q(t, y, z) dt + f(y, z)$$

y

$$M(x, y, z) = \int_{x_0}^x R(t, y, z) dt + g(y, z)$$

donde cada integración se efectúa a lo largo de un segmento rectilíneo contenido en S y las “constantes de integración” $f(y, z)$ y $g(y, z)$ son independientes de x .

Para hallar una solución supongamos $f(y, z) = 0$. La primera ecuación de 8.3 exige

$$\frac{\partial N}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial z} = P \quad (8.5)$$

Según la elección de M y N tenemos

$$\frac{\partial N}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial z} = - \frac{\partial}{\partial y} \int_{x_0}^x Q(t, y, z) dt - \frac{\partial}{\partial z} \int_{x_0}^x R(t, y, z) dt - \frac{\partial g}{\partial z}. \quad (8.6)$$

Intercambiando las operaciones de derivación parcial e integración tenemos que

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y} \int_{x_0}^x Q(t, y, z) dt &= \int_{x_0}^x \frac{\partial}{\partial y} Q(t, y, z) dt \\ \frac{\partial}{\partial z} \int_{x_0}^x R(t, y, z) dt &= \int_{x_0}^x \frac{\partial}{\partial z} R(t, y, z) dt \end{aligned}$$

Con ello la ecuación se convierte en

$$\frac{\partial N}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial z} = \int_{x_0}^x \left[- \frac{\partial}{\partial y} Q(t, y, z) - \frac{\partial}{\partial z} R(t, y, z) \right] dt - \frac{\partial g}{\partial z}.$$

Como la divergencia es cero, tenemos que

$$\frac{\partial N}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial z} = \int_{x_0}^x \frac{\partial}{\partial x} P(t, y, z) dt - \frac{\partial g}{\partial z} = P(x, y, z) - P(x_0, y, z) - \frac{\partial g}{\partial z}.$$

Por consiguiente, 8.5 se verifica si elegimos g de modo que $\frac{\partial g}{\partial z} = -P(x_0, y, z)$. Así, por ejemplo, podemos tomar

$$g(y, z) = - \int_{z_0}^z P(x_0, y, u) du.$$

Este razonamiento nos lleva a considerar el campo vectorial $X = (L, M, N)$, donde $L(x, y, z) = 0$ y

$$M(x, y, z) = \int_{x_0}^x R(t, y, z) dt - \int_{z_0}^z P(x_0, y, u) du, \quad N(x, y, z) = - \int_{x_0}^x Q(t, y, z) dt$$

□

Observar que la demostración anterior no sólo establece la existencia de un campo vectorial X cuyo rotor es Y , sino que también proporciona un método directo para determinar X por medio de integrales calculadas con los componentes de Y .

Para una Y dada, el campo vectorial X que hemos construido no es la única solución de la ecuación $\text{rot } X = Y$. Si sumamos a X cualquier gradiente derivable con continuidad ∇f obtenemos otra solución ya que

$$\text{rot}(X + \nabla f) = \text{rot } X + \text{rot}(\nabla f) = \text{rot } X = Y,$$

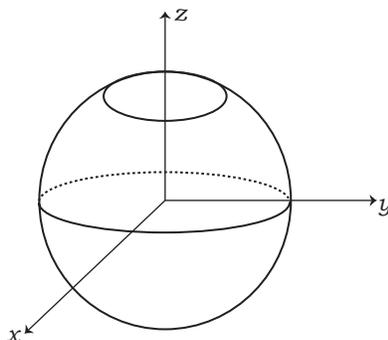
puesto que $\text{rot}(\nabla f) = 0$. Además, es fácil demostrar que todas las soluciones de clase C^2 deben ser de la forma $X + \nabla f$. En realidad, si Z es otra solución, entonces $\text{rot } Z = \text{rot } X$, de manera que $\text{rot}(Z - X) = 0$. Entonces $Z - X = \nabla f$ para algún gradiente de clase C^2 . Luego $Z = X + \nabla f$, como se afirmó.

Un campo vectorial X para el que $\text{div } X = 0$ suele llamarse **solenoidal**. El teorema anterior establece que un campo vectorial es solenoidal en un paralelepípedo rectangular abierto S si y sólo si, es el rotor de otro campo vectorial en S . El ejemplo que sigue demuestra que esta afirmación no es válida para conjuntos abiertos cualesquiera.

Ejemplo 8.2.1 (Un campo vectorial solenoidal que no es un rotor). Sea D la región de \mathbb{R}^3 comprendida entre dos esferas concéntricas de centro en el origen y radios a y b , siendo $0 < a < b$. Sea $V(x, y, z) = \frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}(x, y, z)$. Es fácil comprobar que $\text{div } V = 0$ en todo D .

Usaremos el teorema de Stokes para demostrar que V no es un rotacional en D (si bien lo es en todo intervalo tridimensional abierto que no contenga el origen). Para ello supongamos que existe un campo vectorial U tal que $V = \text{rot } U$ en D y llegamos a una contradicción. Según el teorema de Stokes podemos escribir

$$\iint_S \text{rot } U \cdot n dS = \int_{\partial S} U \cdot ds,$$



donde S y C son la superficie y la curva dibujada en la figura anterior. Para construir S , tomamos una superficie esférica de radio R concéntrica con las fronteras de D , siendo $a < R < b$, y quitamos un pequeño casquete polar como se indica en la figura. La parte que queda es la superficie S . La curva C es el borde circular dibujado. Representemos con \mathbf{N} la normal unitaria exterior a S , de modo que $\mathbf{N} = \vec{r}/r$. Puesto que $\text{rot } \mathbf{U} = \mathbf{V} = \vec{r}/r^3$, tenemos

$$\text{rot } \mathbf{U} \cdot \mathbf{N} = \frac{\vec{r}}{r^3} \cdot \frac{\vec{r}}{r} = \frac{1}{r^2}.$$

Sobre la superficie S este producto vectorial tiene el valor constante $1/R^2$. Por lo tanto, tenemos,

$$\iint_S \text{rot } \mathbf{U} \cdot \mathbf{N} dS = \frac{1}{R^2} \iint_S dS = \frac{\text{área de } S}{R^2}.$$

Cuando el casquete polar degenera en un punto el área de S tiende a $4\pi R^2$ (área de toda la esfera) y por consiguiente, el valor de la integral de superficie tiende a 4π .

Examinemos ahora la integral de línea. Recordar que tenemos la siguiente propiedad para toda integral de línea.

$$\left| \int_C \mathbf{U} \cdot d\mathbf{s} \right| \leq M(\text{longitud de } C)$$

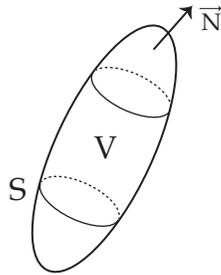
donde M es el máximo de $\|\mathbf{U}\|$ en C . Por consiguiente, al reducir el casquete polar a un punto, la longitud de C y el valor de la integral de línea tienden ambos a cero. Llegamos así a una contradicción; la integral de superficie tiende a 4π , y la correspondiente integral de línea a la que es igual tiende a 0. Luego no puede existir en la región D una función \mathbf{U} cuyo rotor sea \mathbf{V} .

8.3. Teorema de Gauss

El teorema de Stokes expresa una relación entre una integral extendida a una superficie y una integral de línea tomada sobre la curva o curvas que constituyen la frontera de tal superficie. El teorema de la divergencia expresa una relación entre una integral triple extendida a un sólido y una integral de superficie tomada sobre la frontera de ese sólido. Este teorema asegura que el flujo de un campo vectorial hacia afuera de una superficie

cerrada es igual a la integral de la divergencia de ese campo vectorial sobre el volumen encerrado por la superficie. Se trata de un resultado paralelo al teorema de Stokes y al de Green, en el sentido de que relaciona una integral sobre un objeto geométrico cerrado (curva o superficie) con una integral sobre una región contenida (superficie o volumen).

Teorema 8.3.1. Si V es un sólido en \mathbb{R}^3 limitado por una superficie orientable S , si \vec{N} es la normal unitaria exterior a S .



Si \vec{X} es un campo vectorial de clase C^1 en un abierto que contiene a $V \cup S$ entonces tenemos

$$\iiint_V \operatorname{div}(\vec{X}) dV = \iint_S \vec{X} \cdot \vec{N}. \quad (8.7)$$

Si expresamos \vec{X} y \vec{N} en función de sus componentes $\vec{X} = (P, Q, R)$ y $\vec{N} = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$, la ecuación 8.7 puede entonces ponerse en la forma:

$$\iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx dy dz = \iint_S (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) dS. \quad (8.8)$$

Demostración. Bastará establecer las tres ecuaciones

$$\iiint_V \frac{\partial P}{\partial x} dx dy dz = \iint_S P \cos \alpha dS,$$

$$\iiint_V \frac{\partial Q}{\partial y} dx dy dz = \iint_S Q \cos \beta dS,$$

$$\iiint_V \frac{\partial R}{\partial z} dx dy dz = \iint_S R \cos \gamma dS.$$

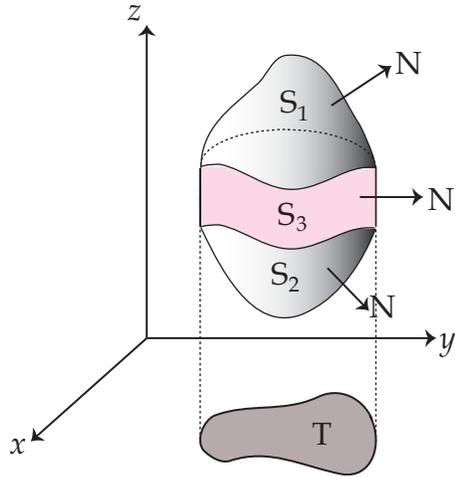
y sumar los resultados para obtener 8.8. Comenzamos por la tercera de esas fórmulas y la demostramos para sólidos de tipo especial.

Supongamos que V es un conjunto de puntos (x, y, z) que satisfacen una relación de la forma

$$g(x, y) \leq z \leq f(x, y) \quad \text{para } (x, y) \text{ en } T,$$

siendo T una región conexa del plano xy , y f y g funciones continuas en T , con la condición $g(x, y) \leq f(x, y)$ para cada punto (x, y) en T . Geométricamente, esto significa que T es la proyección de V en el plano xy . Toda recta paralela al eje z que atraviere T corta al sólido V a lo largo de un segmento rectilíneo que une la superficie $z = g(x, y)$ a la

$z = f(x, y)$. La superficie frontera S consta de un casquete superior S_1 , dado en la forma explícita $z = f(x, y)$, otro inferior S_2 dado por $z = g(x, y)$; y en algunos casos por una porción de cilindro S_3 generado por una recta que se mueve a lo largo de la frontera de T manteniéndose paralela al eje z . La normal exterior a S tiene componente z no negativa en S_1 y no positiva en S_2 y es paralela al plano xy en S_3 . Los sólidos de este tipo se llaman “proyectables- xy ”. (En la siguiente figura se muestra un ejemplo.)



En él se incluyen todos los sólidos convexos (por ejemplo, esferas, elipsoides, cubos) y otros muchos que no son convexos (por ejemplo, el toro con eje paralelo al z). La idea de la demostración es sencilla. Expresamos la integral triple como una doble extendida a la proyección T . Entonces demostramos que esta integral doble tiene el mismo valor que la integral de superficie citada en el enunciado. Comencemos con la fórmula

$$\iiint_V \frac{\partial R}{\partial z} dx dy dz = \iint_T \left[\int_{g(x,y)}^{f(x,y)} \frac{\partial R}{\partial z} dz \right] dx dy.$$

La integral unidimensional respecto a z puede calcularse mediante el segundo teorema fundamental del cálculo, dándonos

$$\iiint_V \frac{\partial R}{\partial z} dx dy dz = \iint_T [R(x, y, f(x, y)) - R(x, y, g(x, y))] dx dy.$$

Para la integral de superficie podemos escribir:

$$\iint_S R \cos \alpha dS = \iint_{S_1} R \cos \alpha dS + \iint_{S_2} R \cos \alpha dS + \iint_{S_3} R \cos \alpha dS$$

Sobre S_3 la normal N es paralela al plano xy , de modo que $\cos \beta = 0$ y la integral sobre S_3 es nula. Sobre la superficie S_1 usamos la parametrización

$$\Psi(x, y) = (x, y, f(x, y))$$

y sobre S_2

$$\Psi(x, y) = (x, y, g(x, y)).$$

Entonces, como la normal a S_1 tiene la misma dirección que el vector unitario definido por la parametrización:

$$\iint_{S_1} R \cos \alpha dS = \iint_T R[x, y, f(x, y)] dx dy$$

Como en S_2 la normal es opuesta a la dirección definida por la parametrización se tiene que

$$\iint_{S_2} R \cos \alpha dS = - \iint_T R[x, y, g(x, y)] dx dy.$$

Por lo tanto

$$\iint_S R \cos \alpha dS = \iint_T (R[x, y, f(x, y)] - R[x, y, g(x, y)]) dx dy.$$

Lo cual termina de demostrar que

$$\iiint_V \frac{\partial R}{\partial z} dx dy dz = \iint_S R \cos \gamma dS.$$

En la demostración anterior la hipótesis de que V es proyectable-xy nos permite expresar la integral triple extendida a V como una integral doble sobre su proyección T sobre el plano xy . Es evidente que si V es proyectable- yz podemos razonar del mismo modo y demostrar la identidad

$$\iiint_V \frac{\partial Q}{\partial y} dx dy dz = \iint_S Q \cos \beta dS,$$

y si V es proyectable- xz obtenemos

$$\iiint_V \frac{\partial P}{\partial x} dx dy dz = \iint_S P \cos \alpha dS.$$

Así vemos que el teorema de la divergencia es válido para todos los sólidos proyectables sobre los tres planos coordenados; en particular, para todo sólido convexo. □

Ejemplo 8.3.1. Sea $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ y $\vec{X}(x, y, z) = (2x, y^2, z^2)$. Se tiene:

$$\iint_S \vec{X} \cdot \vec{N} = \iiint_V \operatorname{div}(\vec{X}) dV = \iiint_V (2 + 2y + 2z) dV = \frac{8}{3}\pi.$$

8.3.1. Interpretación intrínseca de la divergencia

Sea $S(t)$ una esfera de radio $t > 0$ con centro en el punto \mathbf{a} de \mathbb{R}^3 . Y representemos con $V(t)$ el volumen delimitado por $S(t)$. Consideremos X un campo vectorial de clase C^1 en $V(t)$. Entonces, si N es la normal unitaria exterior a S , tenemos

$$\operatorname{div} X(\mathbf{a}) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{\operatorname{vol}(V(t))} \iint_{S(t)} X \cdot N dS.$$

Veamos como se deduce esta igualdad.

Sea $\varphi = \text{div } \mathbf{X}$. Si $\varepsilon > 0$ tenemos que encontrar un $\delta > 0$ tal que

$$\left| \varphi(\mathbf{a}) - \frac{1}{\text{vol}(\mathbf{V}(t))} \iint_{S(t)} \mathbf{X} \cdot \mathbf{N} dS \right| < \varepsilon \text{ si } 0 < t < \delta.$$

Puesto que φ es continua en \mathbf{a} dado ε existe una tres esfera $B(\mathbf{a}, \delta)$ tal que

$$|\varphi(\mathbf{x}) - \varphi(\mathbf{a})| < \frac{\varepsilon}{2}$$

para todo $\mathbf{x} \in B(\mathbf{a}, \delta)$.

Por consiguiente, si escribimos $\varphi(\mathbf{a}) = \varphi(\mathbf{x}) + [\varphi(\mathbf{a}) - \varphi(\mathbf{x})]$ e integramos ambos miembros de esta ecuación sobre la esfera $\mathbf{V}(t)$ de radio $t < \varepsilon$, encontramos

$$\varphi(\mathbf{a}) \text{ vol } \mathbf{V}(t) = \iiint_{\mathbf{V}(t)} \varphi(\mathbf{x}) dx dy dz + \iiint_{\mathbf{V}(t)} [\varphi(\mathbf{a}) - \varphi(\mathbf{x})] dx dy dz.$$

Si aplicamos el teorema de la divergencia a la primera integral triple del segundo miembro y pasamos este término al primer miembro, obtenemos la relación,

$$\left| \varphi(\mathbf{a}) \text{ vol } \mathbf{V}(t) - \iint_{S(t)} \mathbf{X} \cdot \mathbf{N} dS \right| \leq \iiint_{\mathbf{V}(t)} |\varphi(\mathbf{a}) - \varphi(\mathbf{x})| dx dy dz \leq \frac{\varepsilon}{2} \text{ vol } \mathbf{V}(t) < \varepsilon \text{ vol } \mathbf{V}(t).$$

Cuando dividimos esta desigualdad por $\text{vol } \mathbf{V}(t)$ vemos que la igualdad que queríamos es cierta.

En la demostración anterior no hacemos uso especial del hecho de que $\mathbf{V}(t)$ fuese una esfera. El mismo teorema subsiste si, en lugar de esferas, utilizamos cualquier conjunto de sólidos $\mathbf{V}(t)$ para los que el teorema de la divergencia es válido, con tal que esos sólidos contengan el punto \mathbf{a} y tiendan hacia \mathbf{a} cuando $t \rightarrow 0$. Por ejemplo, cada $\mathbf{V}(t)$ podría ser un cubo inscrito en una esfera de radio t en torno de \mathbf{a} ; se aplicaría exactamente la misma demostración.

Existe una fórmula análoga a la de la divergencia que a veces se usa como otra definición de rotacional. Dicha fórmula es:

$$\mathbf{N} \cdot \text{rot } \mathbf{X}(\mathbf{a}) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{\text{Area } S(t)} \int_{C(t)} \mathbf{X} \cdot d\mathbf{s},$$

donde $S(t)$ y $C(t)$ tienen el significado análogo que en el caso de la divergencia.

8.3.2. Ley de Gauss del electromagnetismo

Recordemos que el campo eléctrico generado por una carga viene dado por

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\vec{\mathbf{r}}}{r^3} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} q \frac{(x, y, z)}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}.$$

La ley de Gauss afirma que el flujo de E a través de cualquier superficie cerrada que “encierre” a q es igual a $\frac{q}{\epsilon_0}$.

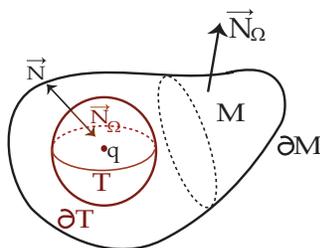
Para probar esta afirmación comencemos con probar que E es solenoidal ($\text{div } E = 0$) en todo $\mathbb{R}^3 - \{(0, 0, 0)\}$.

$$\begin{aligned}\frac{\partial X}{\partial x} &= (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}(x^2 + y^2 + z^2 - 3x^2) \\ \frac{\partial Y}{\partial y} &= (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}(x^2 + y^2 + z^2 - 3y^2) \\ \frac{\partial Z}{\partial z} &= (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}(x^2 + y^2 + z^2 - 3z^2)\end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned}\text{div } E &= \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} \\ &= (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}(x^2 + y^2 + z^2 - 3x^2 + x^2 + y^2 + z^2 - 3y^2 + x^2 + y^2 + z^2 - 3z^2) = 0\end{aligned}$$

Sean M y T como se muestra en la siguiente figura



Queremos probar que $\iint_{\partial M} E \cdot \vec{n} = \iint_{\partial T} E \cdot \vec{n}$. Sea Ω la región entre M y T entonces Ω tiene frontera $\partial M \cup \partial T = S$. Pero la orientación en ∂T inducida por la normal exterior en Ω es opuesta a la obtenida a partir de \vec{N}_T . Entonces aplicando el teorema de Gauss tenemos que

$$\iint_{\partial M} E \cdot \vec{n} - \iint_{\partial T} E \cdot \vec{n} = \iint_S E \cdot \vec{n} = \iiint_{\Omega} \text{div } E dV = 0.$$

Entonces el flujo no depende de la superficie.

Formas diferenciales

Si $X = (P_1, P_2, P_3)$ entonces

$$\int_C X \cdot ds = \int_C P_1 dx_1 + P_2 dx_2 + P_3 dx_3.$$

Veremos una nueva forma de hallar esta integral, para ello daremos una nueva interpretación al término $P_1 dx_1 + P_2 dx_2 + P_3 dx_3$.

Sea $dx_k : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ la proyección en la k -ésima coordenada, es decir, si $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n)$ entonces $dx_k(\mathbf{a}) = a_k$.

Ejemplo 9.0.2. Si $\mathbf{a} = (-1, 1, 3)$ entonces $dx_1(\mathbf{a}) = -1$, $dx_2(\mathbf{a}) = 1$ y $dx_3(\mathbf{a}) = 3$.

Si F_1, \dots, F_n son campos escalares definido en un abierto $D \subset \mathbb{R}^n$, para cada $\mathbf{x} \in D$ podemos considerar la combinación lineal

$$\omega_{\mathbf{x}} = F_1(\mathbf{x})dx_1 + \dots + F_n(\mathbf{x})dx_n$$

donde $\omega_{\mathbf{x}}$ está definida por

$$\omega_{\mathbf{x}}(\mathbf{a}) = F_1(\mathbf{x})dx_1(\mathbf{a}) + \dots + F_n(\mathbf{x})dx_n(\mathbf{a}) \quad (9.1)$$

para todo $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$.

Ejemplo 9.0.3. Si $\omega_{(x,y)} = x^2 dx + y^2 dy$ en \mathbb{R}^2 entonces $\omega_{(x,y)}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = ax^2 + by^2$ y $\omega_{(-1,3)}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = a + 9b$.

Una función definida como en 9.1 se llama **1-forma diferencial** o simplemente **1-forma**.

Ejemplo 9.0.4. Sea $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable. Entonces el diferencial de f en \mathbf{x} es una 1-forma en D ya que si $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ entonces

$$\begin{aligned} d_{\mathbf{x}}f(\mathbf{a}) &= \frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{x})a_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(\mathbf{x})a_2 + \frac{\partial f}{\partial x_3}(\mathbf{x})a_3 \\ &= \frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{x})dx_1(\mathbf{a}) + \frac{\partial f}{\partial x_2}(\mathbf{x})dx_2(\mathbf{a}) + \frac{\partial f}{\partial x_3}(\mathbf{x})dx_3(\mathbf{a}) \end{aligned}$$

Por lo tanto las funciones coeficientes $F_k(\mathbf{x})$ tienen la forma $\frac{\partial f}{\partial x_k}(\mathbf{x})$. Sin embargo no toda 1-forma es el diferencial de una función escalar. Si f es de clase C^2 entonces $\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}$ pero en general $\frac{\partial F_1}{\partial x_2} \neq \frac{\partial F_2}{\partial x_1}$.

Ejemplo 9.0.5. Si $\omega_{\mathbf{x}}$ es la 1-forma definida en $D \subset \mathbb{R}^3$ y C es una curva en D parametrizada por $\gamma : [a, b] \rightarrow D$, entonces en cada punto $\mathbf{x} = \gamma(t)$ podemos aplicar $\omega_{\gamma(t)}$ al vector $\gamma'(t)$.

$$\begin{aligned}\omega_{\gamma(t)}(\gamma'(t)) &= F_1(\gamma(t))dx_1(\gamma'(t)) + F_2(\gamma(t))dx_2(\gamma'(t)) + F_3(\gamma(t))dx_3(\gamma'(t)) \\ &= F_1(\gamma(t))\gamma'_1(t) + F_2(\gamma(t))\gamma'_2(t) + F_3(\gamma(t))\gamma'_3(t) \\ &= F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) \\ \Rightarrow \int_a^b \omega_{\gamma(t)}(\gamma'(t))dt &= \int_a^b F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)dt = \int_C F \cdot ds.\end{aligned}$$

El ejemplo anterior sugiere una definición natural de integral de una 1-forma a lo largo de γ . Si $\omega_{\mathbf{x}}$ está definida en $D \subset \mathbb{R}^n$ y C es una curva en D parametrizada por $\gamma : [a, b] \rightarrow D$, entonces

$$\int_C \omega_{\mathbf{x}} = \int_a^b F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)dt$$

donde el campo $F = (F_1, \dots, F_n)$ está formado por las funciones coeficiente de la 1-forma.

Definición 9.0.2 (producto de 1-formas). Primero definamos el producto de 1-formas básicas dx_1, dx_2, dx_3 en \mathbb{R}^3 .

$$dx_1 \wedge dx_2(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \det \begin{pmatrix} dx_1(\mathbf{a}) & dx_1(\mathbf{b}) \\ dx_2(\mathbf{a}) & dx_2(\mathbf{b}) \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1,$$

donde $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ y $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$.

La definición de todos los productos en cualquier orden es:

$$dx_i \wedge dx_j(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \det \begin{pmatrix} dx_i(\mathbf{a}) & dx_i(\mathbf{b}) \\ dx_j(\mathbf{a}) & dx_j(\mathbf{b}) \end{pmatrix}.$$

Por propiedades del determinante tenemos las siguientes propiedades:

$$dx_i \wedge dx_j = -dx_j \wedge dx_i,$$

$$dx_i \wedge dx_i = 0,$$

$$dx_i \wedge dx_j(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = -dx_i \wedge dx_j(\mathbf{b}, \mathbf{a}).$$

Observemos que la combinación lineal más general de las funciones $dx_i \wedge dx_j$ puede ser expresada de la forma

$$c_1 dx_2 \wedge dx_3 + c_2 dx_3 \wedge dx_1 + c_3 dx_1 \wedge dx_2.$$

Además, si $F = (F_1, F_2, F_3)$ es un campo vectorial definido en $D \subset \mathbb{R}^3$, para cada $\mathbf{x} \in D$ podemos definir la función

$$\tau_{\mathbf{x}} = F_1(\mathbf{x})dx_2 \wedge dx_3 + F_2(\mathbf{x})dx_3 \wedge dx_1 + F_3(\mathbf{x})dx_1 \wedge dx_2$$

que tiene como dominio el conjunto de todos los pares (\mathbf{a}, \mathbf{b}) de \mathbb{R}^3 . La función $\tau_{\mathbf{x}}$ se llama **2-forma diferencial** o simplemente **2-forma**.

Ejemplo 9.0.6. La 2-forma $\tau = 2dx_2 \wedge dx_3 + dx_3 \wedge dx_1 + 5dx_1 \wedge dx_2$ es la misma función en cada punto de \mathbb{R}^3 ya que los coeficientes son constantes. Sea $\mathbf{a} = (1, 2, 3)$ y $\mathbf{b} = (0, 1, 1)$, entonces

$$\tau(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = 2 \det \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + 5 \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = -2 - 1 + -5 = 2.$$

Podemos resumir lo visto hasta el momento notando que hemos definido una multiplicación, llamada **producto exterior** de las 1-formas básicas dx_1, dx_2 , etc. Los productos resultantes denotados por $dx_i \wedge dx_j$ son 2-formas básicas en el sentido de que toda 2-forma es combinación lineal de ellas.

En \mathbb{R}^2 hay una sólo 2-forma básica $dx_1 \wedge dx_2$, mientras que \mathbb{R}^3 hay tres $dx_1 \wedge dx_2, dx_2 \wedge dx_3, dx_3 \wedge dx_1$. Observar que en \mathbb{R}^1 no hay 2-formas.

Podemos definir el producto exterior de dos 1-formas como la 2-forma obtenida multiplicando las 1-formas como si fueran polinomios en las variables dx_1, dx_2 , etc.

Ejemplo 9.0.7. Sean dx, dy, dz las 1-formas básicas de \mathbb{R}^3 .

$$\begin{aligned} (x dx + y^2 dy) \wedge (dx + x dy) &= x dx \wedge dx + x^2 dx \wedge dy + y^2 dy \wedge dx + xy^2 dy \wedge dy \\ &= (x^2 - y^2) dx \wedge dy. \end{aligned}$$

En tres variables:

$$\begin{aligned} (dx + dy + dz) \wedge (x dx + z dy) &= x dx \wedge dx + z dx \wedge dy + x dy \wedge dx + z dy \wedge dy + x dz \wedge dx + z dz \wedge dy \\ &= (z - x) dx \wedge dy + x dz \wedge dx + z dz \wedge dy. \end{aligned}$$

Las **3-formas** surgen cuando se trata de definir el producto de una 2-forma con una 1-forma.

$$dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = \det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$$

donde $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$ y $\mathbf{c} = (c_1, c_2, c_3)$.

En general, si $\mathbf{a} = (\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_p)$ es una p -upla de vectores en \mathbb{R}^n , donde $p \geq 1$ definimos

$$dx_{k_1} \wedge dx_{k_2} \wedge \dots \wedge dx_{k_p}(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_p) = \det (dx_{k_i}(\mathbf{a}_j))_{\substack{i=1, \dots, p \\ j=1, \dots, p}}$$

las **p -formas básicas** de \mathbb{R}^n . Una **p -forma** es combinación lineal de las p -formas básicas.

Sea ω^p una p -forma en \mathbb{R}^n , de igual forma que hicimos con 1-formas vamos a definir la integral sobre una variedad de dimensión p en \mathbb{R}^n , dada por una parametrización $\Psi : U \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^n$, supongamos que U es un rectángulo acotado en \mathbb{R}^p . Podemos aplicar ω^p en el punto $\Psi(\mathbf{u})$ a los vectores derivadas parciales $\frac{\partial \Psi}{\partial u_k}(\mathbf{u})$, para $k = 1, \dots, p$.

$$\omega_{\Psi(\mathbf{u})}^p \left(\frac{\partial \Psi}{\partial u_1}(\mathbf{u}), \dots, \frac{\partial \Psi}{\partial u_p}(\mathbf{u}) \right).$$

$$\Rightarrow \int_S \omega^p = \int_U \omega_{\Psi}^p \left(\frac{\partial \Psi}{\partial u_1}, \dots, \frac{\partial \Psi}{\partial u_p} \right) dV.$$

Ejemplo 9.0.8. Si $\omega_{\mathbf{x}}^2 = F_1(\mathbf{x}) dx_2 \wedge dx_3 + F_2(\mathbf{x}) dx_3 \wedge dx_1 + F_3(\mathbf{x}) dx_1 \wedge dx_2$ tiene coeficientes continuos en \mathbb{R}^3 y $\Psi : \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ con funciones coordenadas Ψ_1, Ψ_2, Ψ_3 entonces

$$\omega_{\Psi} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial u_1}, \frac{\partial \Psi}{\partial u_2} \right) = F_1 \circ \Psi \frac{\partial(\Psi_2, \Psi_3)}{\partial(u_1, u_2)} + F_2 \circ \Psi \frac{\partial(\Psi_3, \Psi_1)}{\partial(u_1, u_2)} + F_3 \circ \Psi \frac{\partial(\Psi_1, \Psi_2)}{\partial(u_1, u_2)}$$

$$\Rightarrow \int_S \omega^2 = \int_S F_1 dx_2 \wedge dx_3 + F_2 dx_3 \wedge dx_1 + F_3 dx_1 \wedge dx_2$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \left\{ F_1 \circ \Psi \frac{\partial(\Psi_2, \Psi_3)}{\partial(u_1, u_2)} + F_2 \circ \Psi \frac{\partial(\Psi_3, \Psi_1)}{\partial(u_1, u_2)} + F_3 \circ \Psi \frac{\partial(\Psi_1, \Psi_2)}{\partial(u_1, u_2)} \right\} du_1 du_2.$$

9.1. Derivada exterior

El teorema fundamental del cálculo dice que si $\frac{df}{dx}$ es integrable en $[a, b]$ entonces

$$\int_a^b \frac{df}{dx} dx = f(b) - f(a).$$

Las fórmulas de Stokes y Gauss dicen que

$$\int_S \text{rot } X \cdot dS = \int_{\partial S} X \cdot ds$$

$$\int_V \text{div } X dV = \int_{\partial V} X \cdot n dS$$

son análogas, porque ellas expresan la integral de un tipo de derivada de una función en términos de la integral de la función en una región de dimensión uno menos.

La operación de **derivación exterior** se define inductivamente para las formas diferenciales como sigue: Si f es un campo escalar de clase C^1 en \mathbb{R}^n

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n.$$

Definimos la derivada exterior de f como la 1-forma cuyo valor en cada punto del dominio de f es lo que hemos llamado el diferencial de f en ese punto.

Si $\omega^1 = f_1 dx_1 + \cdots + f_n dx_n$ es una 1-forma con coeficientes diferenciables, entonces definimos su derivada exterior como

$$d\omega^1 = (df_1) \wedge dx_1 + \cdots + (df_n) \wedge dx_n$$

que resulta ser una 2-forma.

En general, si ω^p es una p -forma, entonces $d\omega^p$ es una $(p+1)$ -forma obtenida reemplazando cada una de las funciones coeficiente de ω^p por la 1-forma que es su derivada exterior y hacemos el producto exterior por la forma básica correspondiente.

Ejemplo 9.1.1. Sea $f(x, y) = x^2 + y^3$ entonces su derivada exterior df está dada por

$$df = 2x dx + 3y^2 dy.$$

Sea la 1-forma $\omega_{(x,y)} = xy dx + (x^2 + y^2) dy$, entonces su derivada exterior es

$$d\omega_{(x,y)} = (y dx + x dy) \wedge dx + (2x dx + 2y dy) \wedge dy = x dx \wedge dy.$$

Consideremos la 2-forma $\omega_{(x,y,z)}^2 = xz dx \wedge dy + y^2 z dx \wedge dz$, la 3-forma derivada exterior de ω es

$$d\omega_{(x,y,z)}^2 = (z dx + x dz) \wedge dx \wedge dy + (2yz dy + y^2 dz) \wedge dx \wedge dz = (x - 2yz) dx \wedge dy \wedge dz.$$

Usando la derivada exterior podemos formular el teorema general de Stokes en la fórmula:

$$\int_B d\omega^p = \int_{\partial B} \omega^p, \quad (9.2)$$

donde B es de dimensión $p+1$ y ∂B es de dimensión p .

Veamos como recuperamos los teoremas de Green, Stokes y Gauss a partir de este resultado.

1. Sea ω^1 una 1-forma en \mathbb{R}^2 : Si la 1-forma está dada por $\omega^1 = F_1 dx_1 + F_2 dx_2$ entonces

$$\begin{aligned} d\omega^1 &= \left(\frac{\partial F_1}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial F_1}{\partial x_2} dx_2 \right) \wedge dx_1 + \left(\frac{\partial F_2}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial F_2}{\partial x_2} dx_2 \right) \wedge dx_2 \\ &= \left(\frac{\partial F_2}{\partial x_1} - \frac{\partial F_1}{\partial x_2} \right) dx_1 \wedge dx_2 \end{aligned}$$

Sustituyendo ω^1 y $d\omega^1$ en la fórmula 9.2 tenemos que

$$\int_B \left(\frac{\partial F_2}{\partial x_1} - \frac{\partial F_1}{\partial x_2} \right) dx_1 \wedge dx_2 = \int_{\partial B} F_1 dx_1 + F_2 dx_2.$$

2. Si ω^1 una 1-forma en \mathbb{R}^3 dada por $\omega^1 = F_1 dx_1 + F_2 dx_2 + F_3 dx_3$ entonces, repitiendo los cálculos del caso anterior tenemos que

$$d\omega^1 = \left(\frac{\partial F_3}{\partial x_2} - \frac{\partial F_2}{\partial x_3} \right) dx_2 \wedge dx_3 + \left(\frac{\partial F_1}{\partial x_3} - \frac{\partial F_3}{\partial x_1} \right) dx_3 \wedge dx_1 + \left(\frac{\partial F_2}{\partial x_1} - \frac{\partial F_1}{\partial x_2} \right) dx_1 \wedge dx_2.$$

La 2-forma $d\omega^1$ tiene por funciones coordenadas las funciones coordenadas del rot F , donde $F = (F_1, F_2, F_3)$. Luego si sustituimos en 9.2

$$\begin{aligned} \int_B \left(\frac{\partial F_3}{\partial x_2} - \frac{\partial F_2}{\partial x_3} \right) dx_2 \wedge dx_3 + \left(\frac{\partial F_1}{\partial x_3} - \frac{\partial F_3}{\partial x_1} \right) dx_3 \wedge dx_1 + \left(\frac{\partial F_2}{\partial x_1} - \frac{\partial F_1}{\partial x_2} \right) dx_1 \wedge dx_2 \\ = \\ \int_{\partial B} F_1 dx_1 + F_2 dx_2 + F_3 dx_3. \end{aligned}$$

3. La formula de Gauss se obtiene considerando la 2-forma $\omega^2 = F_1 dx_2 \wedge dx_3 + F_2 dx_3 \wedge dx_1 + F_3 dx_1 \wedge dx_2$. Entonces

$$\begin{aligned} d\omega^2 &= dF_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 + dF_2 \wedge dx_3 \wedge dx_1 + dF_3 \wedge dx_1 \wedge dx_2 \\ &= \frac{\partial F_1}{\partial x_1} dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 + \frac{\partial F_2}{\partial x_2} dx_2 \wedge dx_3 \wedge dx_1 + \frac{\partial F_3}{\partial x_3} dx_3 \wedge dx_1 \wedge dx_2 \\ &= \left(\frac{\partial F_1}{\partial x_1} + \frac{\partial F_2}{\partial x_2} + \frac{\partial F_3}{\partial x_3} \right) dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3. \end{aligned}$$

por lo cual la fórmula 9.2 queda

$$\int_B \left(\frac{\partial F_1}{\partial x_1} + \frac{\partial F_2}{\partial x_2} + \frac{\partial F_3}{\partial x_3} \right) dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 = \int_{\partial B} F_1 dx_2 \wedge dx_3 + F_2 dx_3 \wedge dx_1 + F_3 dx_1 \wedge dx_2.$$

La correspondencia entre campos vectoriales $F = (F_1, F_2, F_3)$ en \mathbb{R}^3 y formas diferenciales puede resumirse de la siguiente manera: la forma diferencial tiene coeficientes F_1, F_2, F_3 . Entonces la relación es:

$$\begin{aligned} \omega^2 \leftrightarrow F &\Rightarrow d\omega^2 \leftrightarrow \operatorname{div} F, \\ \omega^1 \leftrightarrow F &\Rightarrow d\omega^1 \leftrightarrow \operatorname{rot} F, \\ \omega^0 \leftrightarrow f &\Rightarrow d\omega^0 \leftrightarrow \nabla f. \end{aligned}$$