

# Lógica proposicional y funciones lógicas usando ISETL

Curso: Matemática Discreta usando ISETL

*Año 2007*

Responsable del curso: *Sylvia da Rosa (docente del InCo)*

Participa: *Luis Sierra (docente del InCo)*

Alumno: *Diego Martorell*

## Índice

<a href="#">Índice.....</a>	<a href="#">2</a>
<a href="#">Acerca del trabajo.....</a>	<a href="#">4</a>
<a href="#">Fundamentación.....</a>	<a href="#">5</a>
<a href="#">Introducción.....</a>	<a href="#">7</a>
<a href="#">Desarrollo.....</a>	<a href="#">8</a>
<a href="#">Módulo I.....</a>	<a href="#">8</a>
<a href="#">Objetivo.....</a>	<a href="#">8</a>
<a href="#">Actividades.....</a>	<a href="#">8</a>
<a href="#">Ejemplo de resolución.....</a>	<a href="#">9</a>
<a href="#">Módulo II.....</a>	<a href="#">14</a>
<a href="#">Objetivo.....</a>	<a href="#">14</a>
<a href="#">Actividades.....</a>	<a href="#">14</a>
<a href="#">Ejemplo de resolución.....</a>	<a href="#">17</a>
<a href="#">Módulo III.....</a>	<a href="#">20</a>
<a href="#">Objetivo.....</a>	<a href="#">20</a>
<a href="#">Actividades.....</a>	<a href="#">20</a>
<a href="#">Ejemplo de resolución.....</a>	<a href="#">21</a>
<a href="#">Módulo IV.....</a>	<a href="#">22</a>
<a href="#">Objetivo.....</a>	<a href="#">22</a>
<a href="#">Conclusiones.....</a>	<a href="#">23</a>
<a href="#">Bibliografía.....</a>	<a href="#">24</a>
<a href="#">Cálculo Proposicional.....</a>	<a href="#">24</a>
<a href="#">La matemática discreta como formación básica.....</a>	<a href="#">24</a>
<a href="#">¿Qué es matemática discreta?.....</a>	<a href="#">24</a>
<a href="#">Manual de ISETL.....</a>	<a href="#">24</a>
<a href="#">Pequeño Manual de ISETL.....</a>	<a href="#">24</a>

<a href="#">Introducción a la lógica.....</a>	<a href="#">25</a>
<a href="#">Aprenda a crear Diagramas de flujo.....</a>	<a href="#">25</a>
<a href="#">Introduccion a la inteligencia artificial.....</a>	<a href="#">25</a>
<a href="#">Anexo.....</a>	<a href="#">26</a>
<a href="#">Notación de las operaciones básicas.....</a>	<a href="#">26</a>
<a href="#">Notación de algoritmos.....</a>	<a href="#">26</a>
<a href="#">Contacto.....</a>	<a href="#">26</a>

## Acerca del trabajo

Este trabajo es resultado de lo aprendido durante el Curso de Matemáticas Discreta usando ISETL dictado por la Ing. Sylvia Da Rosa. Luego de haber analizado las distintas posibilidades que ISETL ofrece para trabajar con Matemática, he encontrado un tema interesante como lo es el de la lógica proposicional.

La idea es la de tratar este tema, desde lo más básico, como son las tablas de verdad, creando algoritmos y demás que permitan el cálculo de cualquier tipo de predicados. Además, estudiar la consistencia y validez de distintos razonamientos. Y por último manejar el concepto ligado de funciones lógicas de una o varias variables.

Es un tema bastante amplio, y que considero interesante, pudiéndose aplicar en un nivel secundario, como también podría ser encarado para un nivel como el de primer año de Profesorado de Matemática.

## Fundamentación

Actualmente, la enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas se encuentra en un momento difícil. Son muchas las razones, pero la búsqueda de soluciones son pocas y sería bueno que todos los que en cierto modo formamos parte de el sistema educativo colaboremos. Una forma de hacerlo es mediante este trabajo, el cual busca la integración de la enseñanza en el aula con la utilización de recursos informáticos. Muchas veces se enseña Matemáticas sin hacer uso de distintos recursos didácticos que están al alcance pero que se ignoran, sería bueno comenzar a utilizarlos con mayor frecuencia. Obviamente existen otros aspectos importantes que serían de gran ayuda para el desarrollo de la enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas, como ser la presentación de los temas con un relacionamiento de por qué y para qué se enseña. En lo que respecta a mi reciente experiencia como alumno, no recuerdo haberme acercado a ese tipo de justificaciones con frecuencia, lo cual me hubiese resultado más interesante. Incluso, en niveles universitarios, sería bueno también manejar esto, no creo que sea lo mejor, el formar una persona para que sea una máquina de aplicar fórmulas o sacar cuentas, para ello nos debemos asistir en las calculadoras y en las innumerables herramientas que nos proveen las computadoras. Son datos verificados, que surgen de varias investigaciones, por ejemplo la Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico (OCDE) indica que la mayoría de los alumnos, entre 15 y 16 años, que utilizan un ordenador desde hace cinco años tienen resultados superiores a la media en matemáticas, mientras que los que carecen de acceso o lo usan desde hace menos de un año obtienen unos resultados por debajo del nivel general de su curso. En resumen, es oportuno realizar este trabajo visto que un lenguaje como ISETL nos permite agregar un recurso más para trabajar en el

aula y alcanzar un desarrollo del aprendizaje y enseñanza de la Matemáticas mejor.

## Introducción

A continuación se presenta la propuesta de trabajo para implementar en el aula. Se trata de cubrir una serie de conceptos básicos relacionados con la lógica proposicional y las funciones lógicas. Se estructurará el tema en cuatro módulos.

El primero, que tratará acerca de lo que es una proposición, el concepto relacionado de valor de verdad y las distintas tablas de verdad en cuestión.

Luego, como segunda parte, la relación de las proposiciones con ciertos teoremas, leyes y reglas lógicas, para conocer la consistencia y validez de un razonamiento.

En tercer lugar, la relación entre las proposiciones y la lógica funcional, de donde se desprenden los conceptos de Funciones Lógicas y Conjuntos de Validez.

Por último, un cuarto módulo acerca de la lógica aplicada a la Matemática y a la Programación. En éste no se pretenderá trabajar sobre conceptos, sino que se intentará ver si el alumno ha captado que la lógica y la matemática están más cerca de ellos y en todos los ámbitos donde se desarrollan.

El orden de presentación de los distintos puntos no debería cambiar, lo que si es flexible es el tiempo destinado a cada uno de ellos, el cual depende del grupo y sería fijado en base a las dificultades que vayan surgiendo.

## Desarrollo

### Módulo I

#### Objetivo

En esta primera parte, se introducirán los conceptos básicos de la lógica proposicional. Siendo más explícitos, las definiciones a considerar serían:

- Proposición
- Tipos de proposiciones
- Valor de Verdad
- Operaciones básicas
- Tablas de verdad
- Tautología
- Contradicción
- Contingencia

Cabe aclarar que el alumno no solo manejará conceptos de lógica, por ejemplo, en uno de los ejemplos se pide realizar un algoritmo o diagrama que le permitirá al estudiante implementarlo luego en ISETL de la forma correcta.

#### Actividades

Mediante los dos ejercicios que se presentan a continuación, se formarán los conceptos mencionados anteriormente, la mejor forma de definir lo que es una proposición e introducir que tipos de ellas existen será mediante ejemplos y simples ejercicios como los que se presentan a continuación.

### Ejercicio

**1)**

---

Clasificar las siguientes proposiciones en simples y compuestas:

---



- José es alto
- José no es alto
- Marcos es alto y Pedro es bajo.
- Si es jueves, Julio estudia ISETL.

Simbolizar las proposiciones anteriores y realizar las correspondientes tablas de verdad.

**Ejercicio 1-ISETL)**

Mediante ISETL, imprimir en pantalla las distintas tablas de verdad de las operaciones básicas (negación, conjunción, disyunción, condicional y bicondicional).

**Ejercicio 2)**

Pensar un algoritmo que dada una proposición nos indique si se trata de una tautología, una contradicción o una contingencia.

**Ejercicio 2) - ISETL)**

Implementar lo anterior en ISETL mediante una función.

*Ejemplo de resolución*

**Ejercicio 1)**

<u>Proposición</u>	<u>Tipo</u>	<u>Simbolización</u>
José es alto	simple	p: José es alto --- p
José no es alto	simple	p: José es alto --- - p
Marcos es alto y Pedro es bajo.	compuesta	p: Marcos es alto q: Pedro es bajo $p \wedge q$
Si es jueves, Julio estudia ISETL.	compuesta	p: Es jueves q: Julio estudia ISETL $p \rightarrow q$

**Ejercicio 1-ISETL)**

- Tabla de verdad de la negación

```
for p in [true, false] do
    write p, not p;
    writeln;
end;
```
- Tabla de verdad de la conjunción

```
for p, q in [true, false] do
    write p, q, p and q;
    writeln;
end;
```
- Tabla de verdad de la disyunción

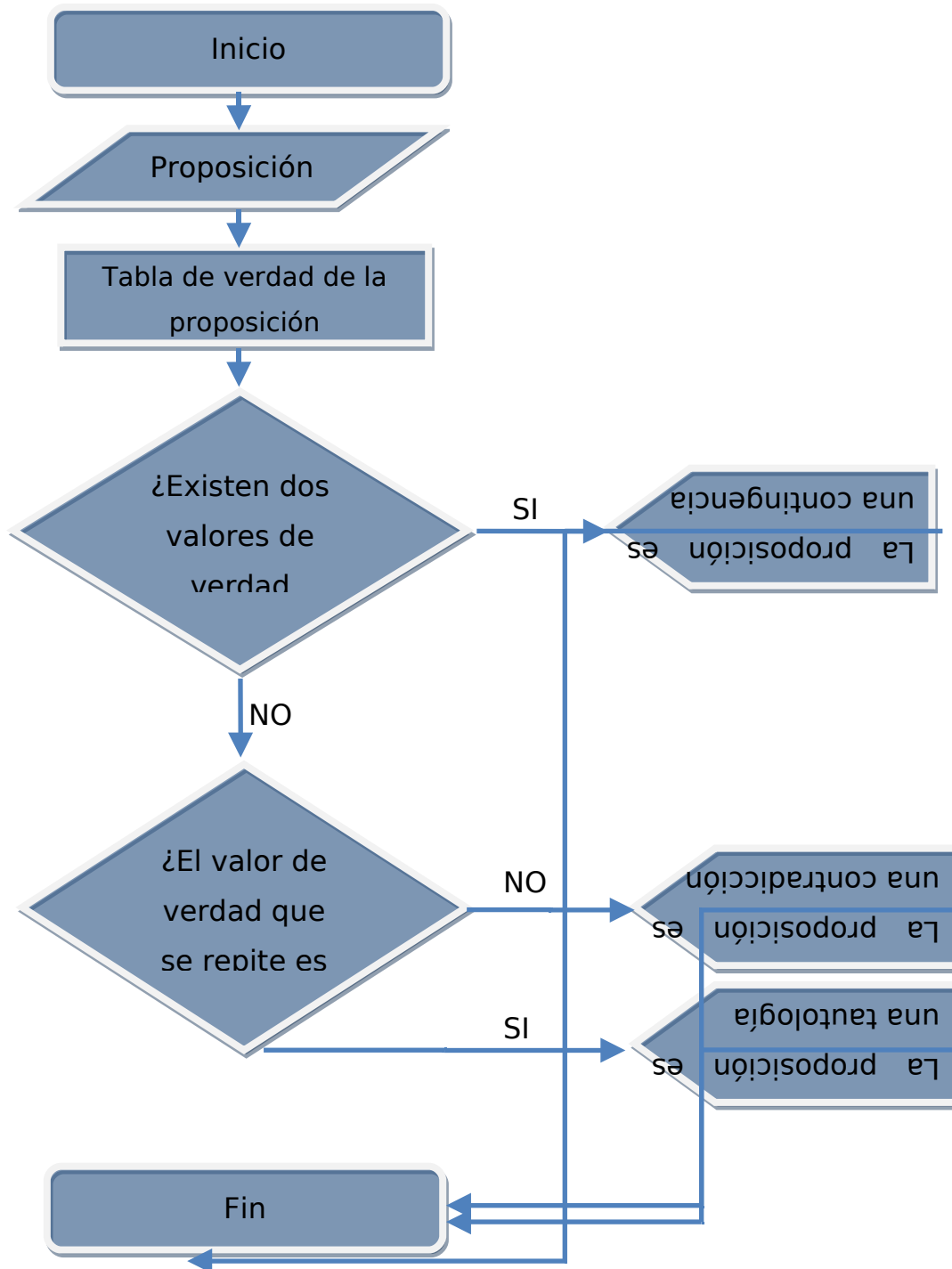
```
for p, q in [true, false] do
    write p, q, p or q;
    writeln;
end;
```
- Tabla de verdad del condicional

```
for p, q in [true, false] do
    write p, q, p impl q;
    writeln;
end;
```
- Tabla de verdad del condicional

```
for p, q in [true, false] do
    write p, q, p impl q;
    writeln;
end;
```
- Tabla de verdad del bicondicional

```
for p,q in [true, false] do
    write p, q, (p impl q) and (q impl p);
    writeln;
end;
```

**Ejercicio 2)**



**Ejercicio 2-ISETL)**

Una forma de implementar la situación anterior en ISETL sería mediante una función a la cual se le pasase la proposición. Se irían obteniendo los distintos valores de verdad y comparando el que se obtiene con el anterior. En caso de que estos sean diferentes, la

proposición será contingente, de lo contrario, tendremos que la proposición es una contradicción o una tautología y sabremos a cual de los dos casos corresponde por el último valor de verdad hallado.

## Módulo II

### Objetivo

En esta segunda parte, ya habiendo introducido y manejado los conceptos básicos relacionados con la lógica proposicional, se trataría el tema de las reglas lógicas y las leyes lógicas, las cuales le permitirán al alumno, estudiar la validez y consistencia de un razonamiento.

### Actividades

Las siguientes actividades pretenden, a partir de lo desarrollado en el módulo I, formar el concepto de Regla Lógica y de Leyes Lógicas para luego aplicarlos en el análisis de la validez y consistencia de un razonamiento. Simplemente, definiremos a una regla lógica como una proposición tautológica y a una ley lógica como la equivalencia entre dos proposiciones. Entendemos por equivalencia, que los valores de verdad de éstas, para cada permutación de valores de las proposiciones simples en cuestión, son los mismos.

En los dos primeros ejercicios, el alumno observará que lo hecho en el ejercicio 2 del primer módulo es útil, visto que podrá recurrir al algoritmo realizado para determinar si las proposiciones presentadas pertenecen o no al conjunto de las tautologías.

Luego se darían a conocer los nombres por los cuales dichas reglas y leyes son conocidas comunmente (Ley de De Morgan, Modus Ponens, Identidad, Doble Negación, Dilema Constructivo, etc.).

En cuanto a la implementación en ISETL, en el primer caso, se comenzará a aplicar la función programada anteriormente para determinar si las proposiciones dadas son o no reglas lógicas. Por otro lado se pedirá la implementación de una función que permita conocer si dos proposiciones son equivalentes. En este caso, esta función recibirá dos proposiciones por lo que exigirá un grado mayor de complejidad.

Mediante el ejercicio 3, el alumno podrá ser capaz de decir si un razonamiento es o no consistente y/o válido. Para ello, será necesario definir lo que es un razonamiento, un concepto cercano a la realidad y ejemplificado.

En esta ocasión diremos que un razonamiento es un conjunto de proposiciones (simples o compuestas), a las cuales llamaremos premisas que se relacionan con una premisa (simple o compuesta) a la que denominaremos conclusión. Para conocer la validez de dicho razonamiento, se presentarán dos caminos, uno de ellos consiste en analizar el valor de verdad del condicional existente entre las premisas (como antecedente) y la conclusión (como consecuente), al cual llamaremos condicional asociado al razonamiento. Si éste es tautológico, el razonamiento será válido. La otra forma de conocer la validez de un razonamiento consiste en estudiar su consistencia. Si el razonamiento es inconsistente (la conjunción de las premisas es falsa), decimos que el mismo es válido mientras que si el razonamiento es consistente (la conjunción de las premisas es verdadera), debemos recurrir a otro método conocido como prueba formal, en la cual se aplican leyes y reglas lógicas.

### **Ejercicio**

**1)**

---

Sabiendo que una regla lógica es una proposición perteneciente al conjunto de las tautologías, decir si las siguientes proposiciones son reglas lógicas:

- $p \rightarrow p$
  - $[(p \rightarrow q) \wedge p] \rightarrow q$
  - $(p \wedge q) \rightarrow p$
  - $[(p \rightarrow q) \wedge (r \rightarrow s) \wedge (p \vee r)] \rightarrow (q \vee s)$
- **Ejercicio** **1-ISETL)**

Verificar los resultados obtenidos en el ejercicio anterior mediante ISETL.

**Ejercicio****2)**

---

Sabiendo que una ley lógica es una equivalencia entre dos proposiciones, determinar si las siguientes, son o no leyes lógicas:

- $p \equiv p$
- $(p \rightarrow q) \equiv (\neg p \vee q)$
- $\neg (p \rightarrow q) \equiv (p \wedge \neg q)$
- $\neg (p \vee q) \equiv (\neg p \wedge \neg q)$
- $(p \leftrightarrow q) \equiv [(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)]$

▪ **Ejercicio****2-ISETL)**

---

Implementar una función, a la cual se le pasan dos proposiciones y determina si las mismas son equivalentes o no.

**Ejercicio****3)**

---

Investigar la consistencia del siguiente razonamiento y determinar si es válido o no:

$$u \rightarrow r$$

$$(r \wedge s) \rightarrow (p \vee t)$$

$$q \rightarrow (u \wedge s)$$

$$\neg t$$

$$q \rightarrow p$$

**Ejercicio****3-ISETL)**



¿Cómo haría para investigar la validez de un razonamiento en ISETL utilizando el código desarrollado en los ejercicios anteriores?

Analizar e implementar en ISETL una función que permita saber si un razonamiento es consistente o no.

### *Ejemplo de resolución*

#### **Ejercicio 1)**

Todas las proposiciones son reglas lógicas, y la forma de saberlo es realizando las tablas de verdad correspondientes.

#### **Ejercicio 1-ISETL)**

En este ejercicio, será necesario aplicar la función implementada en el Ejercicio 1-ISETL del primer módulo.

#### **Ejercicio 2)**

Todas son leyes lógicas y basta realizar las tablas de verdad correspondientes para observar que se da la equivalencia de valores.

#### **Ejercicio 2-ISETL)**

Una forma de realizar este ejercicio, sería realizando la tabla de verdad de la primera proposición y guardar los valores de verdad que se van obteniendo en una lista, luego realizar lo mismo con la segunda y finalmente comparar uno a uno los valores almacenados en las listas. En caso de que al comparar, se encuentren valores de verdad diferentes, diremos que no es una ley lógica, de lo contrario podremos afirmar que si lo es.

#### **Ejercicio 3)**

El razonamiento es válido, verificamos que es consistente y recurrimos a la prueba f6rmal, donde observamos que definitivamente, el razonamiento es v6lido.

$$1) p \rightarrow (q \wedge r)$$

- 2)  $q \rightarrow s$
- 3)  $s \rightarrow t$
- 4)  $(s \wedge t) \rightarrow \neg u$
- 5)  $\underline{u}$   
 $\neg p$

Suponemos que existe una permutación de valores de verdad para  $p$ ,  $q$ ,  $r$ ,  $s$ ,  $t$  y  $u$  que haga que la conjunción de las premisas sea verdadera. Si encontrásemos alguna contradicción, el razonamiento sería inconsistente y por tanto válido. De lo contrario recurriremos a la prueba formal.

Supongo que  $V[(p \rightarrow (q \wedge r)) \wedge (q \rightarrow s) \wedge (s \rightarrow t) \wedge ((s \wedge t) \rightarrow \neg u) \wedge u] = 1$  por lo tanto:

- $V[p \rightarrow (q \wedge r)] = 1$  y
- $V[q \rightarrow s] = 1$  y
- $V[s \rightarrow t] = 1$  y
- $V[(s \wedge t) \rightarrow \neg u] = 1$  y
- $V[u] = 1$

Cómo  $V[u] = 1$ ,  $V[\neg u] = 0$ .

Luego,  $V[(s \wedge t) \rightarrow \neg u] = 1$  y  $V[\neg u] = 0$  entonces  $V[s \wedge t] = 0$ .

Tenemos que  $V[s \wedge t] = 0$  y  $V[s \rightarrow t] = 1$ , por lo que  $V[s] = 0$  y elijo  $V[t] = 0$ .

Sabemos que  $V[s] = 0$  y que  $V[q \rightarrow s] = 1$ , de donde  $V[q] = 0$ .

Finalmente  $V[p \rightarrow (q \wedge r)] = 1$  y  $V[q \wedge r] = 0$  porque  $V[q] = 0$ , entonces  $V[p] = 0$  y elijo  $V[r] = 1$ .

De lo anterior, deducimos que el razonamiento es consistente, por lo que recurriremos a la prueba formal.

- 6) -  $(s \wedge t)$  Modus Tollens entre 4) y 5)
- 7)  $\neg s \vee \neg t$  Ley de De Morgan en 6)
- 8)  $\neg q \vee \neg s$  Dilema Destructivo entre 2), 3) y 7)
- 9) -  $(q \wedge r)$  Ley de De Morgan en 8)

10)  $\neg p$  Modus Tollens entre 1) y 9)

### **Ejercicio 3-ISETL)**

Para saber si un razonamiento es consistente, bastaría con conocer todos los valores de verdad que la conjunción de las premisas toma, en caso de encontrar una asignación de valores que haga a esta conjunción falsa, diremos que el razonamiento es inconsistente y válido, de lo contrario solo diremos que es válido.

### Módulo III

#### Objetivo

En este tercer módulo, luego de haber abarcado una serie de conceptos importantes se procederá a relacionar las proposiciones con la lógica funcional lo que nos llevará a introducir los conceptos de Funciones Lógicas y Conjuntos de Validez.

#### Actividades

En los siguientes ejercicios, se pretende dejarle al alumno, una simple noción de lo que es una Función Lógica y de lo que es un Conjunto de Validez, para que pueda ver la relación existente entre temas que pueden parecer distantes pero que están muy ligados como son los conjuntos, la lógica proposicional y las funciones.

Previo a la presentación de los ejercicios, se definirá lo que es una Función Lógica, diciendo que: si tenemos un conjunto  $A$  no vacío,  $P(x)$  es una función lógica definida en dicho conjunto si y sólo si al tomar un elemento cualquiera de  $A$ ,  $P(a)$  es una proposición.

Por otro lado, definiremos Conjunto de Validez como el conjunto de aquellos elementos de  $A$  que hagan que la proposición mencionada anteriormente sea verdadera.

#### Ejercicio

**1)**

---

Sean  $f(x)$  y  $g(x)$  definidas en  $A=\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$ , decir si son funciones lógicas y si lo son hallar el o los conjuntos de validez correspondientes:

$$F(x): x + 0 = 1$$

$$G(x): 2x + 9 < 0$$

#### Ejercicio

**1-ISETL)**

Obtener el conjunto de validez de las funciones anteriormente presentadas.

### *Ejemplo de resolución*

#### **Ejercicio 1)**

$F(x)$  es una función lógica y su conjunto de validez está compuesto por el número 1.

$G(x)$  es una función lógica cuyo conjunto de validez es el conjunto vacío ya que no existe ningún natural que al sumarle nueve a su doble, esta suma resulte ser negativa.

#### **Ejercicio 1-ISETL)**

En este ejercicio se introduce el concepto de conjunto mediante ISETL, mediante la siguiente línea el alumno habrá encontrado los distintos conjuntos de validez de las funciones lógicas  $F$  y  $G$ .

```
F:={x : x in {1 .. 10} | x + 0 = 1};  
G:={x : x in {1 .. 10} | 2*x + 9 < 0};
```

## Módulo IV

### *Objetivo*

La idea de este módulo es la de observar si los alumnos han logrado comprender la relación que existe entre la lógica, la Matemática, la Programación y todo lo que es el mundo de la electrónica y las computadoras que tan cerca de ellos están.

## Conclusiones

A lo largo del desarrollo del curso y de esta investigación he observado una serie de cosas que son muy importantes que quizás en el apuro de todos los días, atados a una costumbre o tradición, acostumbrados a una forma de aprender y de enseñar que no se ha renovado mucho en los últimos años, no las observamos. Sería bueno detenerse como lo hicimos en esta ocasión mediante este curso, para ver lo fantástico que sería poder utilizar las nuevas tecnologías antes de que dejen de ser nuevas.

Sería bueno, y sin ánimos de criticar y desprestigiar, que aquellos docentes de “gran experiencia”, aquellos docentes que siguen enseñando con el mismo cuaderno y de la misma forma que como lo hacían cuando comenzaron, se dieran cuenta de que los alumnos y el mundo cambian, por lo que ellos deberían innovar, cambiar y pensar en caminos que permitan mejorar una situación que se está dando en el aprendizaje y enseñanza de las matemáticas que no es la deseada. De mi parte, me hubiese gustado trabajar con un grupo de estudiantes, pero no tengo la oportunidad, no tengo experiencia como docente pero si la tengo como alumno y de ésta experiencia se aprende y mucho, desde el liceo hasta incluso en ámbitos Universitarios, se puede observar la existencia de enormes dificultades que son en parte generadas por la forma en que se enseña.

Creo en una educación diferente que debe ser mejorada entre aquellos que si tienen experiencia junto a aquellos que buscan y estudian formas de innovar como ser la utilización de este lenguaje como recurso didáctico.

Por último, me gustaría agradecer a la docente que guió el curso así como también a todos los compañeros que con su experiencia y su participación en clase, me permitieron ver aspectos importantes de la Matemática.

## Bibliografía

### Cálculo Proposicional

Autor: Elias Marino Escobar Ayona

Instituto Tecnológico de Chilpancingo

En internet: <http://www.monografias.com/trabajos16/calculo-proposicional/calculo-proposicional.shtml#CALCULO>

### La matemática discreta como formación básica

Autora: Sylvia da Rosa

Instituto de Computación, Facultad de Ingeniería, Universidad de la República,  
Montevideo, Uruguay

Email: [darosa@fing.edu.uy](mailto:darosa@fing.edu.uy)

### ¿Qué es matemática discreta?

Autora: Sylvia da Rosa

Instituto de Computación, Facultad de Ingeniería, Universidad de la República,  
Montevideo, Uruguay

Email: [darosa@fing.edu.uy](mailto:darosa@fing.edu.uy)

### Manual de ISETL

Autor: Gary Levin

### Pequeño Manual de ISETL

Autora: Sylvia da Rosa

Instituto de Computación, Facultad de Ingeniería, Universidad de la República,  
Montevideo, Uruguay

Email: [darosa@fing.edu.uy](mailto:darosa@fing.edu.uy)



## **Introducción a la lógica**

Autoras: María Elena Becerra y Ana María Tosseti

Instituto de Profesores Artigas

Ficha N°2 – Matemática Básica – Tercera edición

## **Aprenda a crear Diagramas de flujo**

Autor: Anónimo

En internet: <http://www.mis-algoritmos.com/2006/08/06/aprenda-a-crear-diagramas-de-flujo/>

## **Introduccion a la inteligencia artificial**

Autor: Anónimo

En internet: <http://www.secyt.frba.utn.edu.ar/gia/IIA-mod6-Calculo%20de%20Predicados.PDF>

## Anexo

### Notación de las operaciones básicas

- Negación: -
- Disyunción:  $\vee$
- Conjunción:  $\wedge$
- Condicional:  $\rightarrow$
- Bicondicional:  $\leftrightarrow$

### Notación de algoritmos



### Contacto

Diego Gabriel Martorell Bazterrica

Email: [diegomart123@gmail.com](mailto:diegomart123@gmail.com)

Teléfono: 7104527

Domicilio: Bonpland 511