Divisores
MCD

Propuesta final
Curso Matemática Discreta usando ISetL

Fundamentación del trabajo

Elegimos el tema Divisores de un número y M. C. D. pues presenta estas características:

- Es un tema muy importante dentro de la Matemática Discreta.
- Dada la diversidad de ocupaciones que poseemos quienes integramos el grupo, el mismo puede ser trabajado en varios cursos, permitiéndonos así reflexionar sobre tópicos que realmente aplicaremos más adelante.
- Permite el planteo de un problema matemático que puede ser resuelto computacionalmente.
- Permite algoritmos y recurrencias.
- Se puede encontrar el MCD de varias maneras.

Vamos a enfocar el trabajo, en primera instancia para alumnos de Primer Año del Ciclo Básico, pero incluiremos proyecciones del mismo que podrán ser aplicadas en Bachillerato o en Primer Año de Magisterio. De este modo ampliamos las posibilidades de ser usado por cada uno de nosotros en años venideros.

> El éxito de la educación depende del talento, de la competencia y de la creatividad de las personas
> que se dedican a ella.
> ***Goéry Delacôte***

INTRODUCCION

Para delimitar un marco teórico que fundamente esta propuesta, hacemos eco de las siguientes palabras:

"En la actual sociedad en la que vivimos, la Sociedad de la Información o Sociedad Digital para otros, el conocimiento a nivel de usuario de ordenadores y redes de comunicación ha dejado de ser un mérito a la hora de buscar un trabajo para convertirse en un requisito imprescindible. Pero no sólo es necesaria esta alfabetización digital en el mundo laboral, pues con la explosión de las comunicaciones y la unión planetaria vía la red Internet, estas tecnologías están incidiendo tanto en nuestras formas de ocio, como relación, aprendizaje y enseñanza independientemente de la edad que tengamos (Cebrián, 1998; Negroponte, 1996).

Socialmente no está claro el papel ni la relación existente entre Matemática y computar o Matemática y computadora, es responsabilidad de la Educación que estas relaciones se hagan explícitas.
"La actividad de computar es una disciplina muy antigua, cuyos orígenes se remontan a civilizaciones como la griega, la babilónica y la egipcia. Los antiguos filósofos y matemáticos griegos contribuyeron enormemente en la sistematización del razonamiento y en la construcción de algoritmos, mientras que los egipcios y los babilónicos desarrollaron métodos computacionales destinados a facilitar el trabajo humano.
En todas las épocas han existido fuertes motivaciones para conseguir resultados avanzados tanto en la sistematización del razonamiento como en el diseño y construcción de dispositivos para realizar computaciones seguras y eficientes.
Leibniz (1646-1716) escribió: "Es lamentable que personas de excelencia deban desperdiciar horas como esclavos en una labor de calcular, que podría confiarse a otras personas si fueran utilizadas máquinas. 1" (Tucker et al.,1995)." [1]
Si bien el imperativo tecnológico ha llevado las computadoras a los locales de enseñanza, su uso no ha redundado necesariamente en mejores formas de enseñar o aprender ni en una revalorización de la actividad matemática o de computar.
"En el fondo, la mayoría de la gente considera que la Matemática es importante pero, a veces, parece haber olvidado por qué. O da más peso a las dificultades de su aprendizaje y comprensión que a las ventajas o impacto de su disciplina.
Existe hoy una generalizada pérdida de apreciación de lo que hoy los matemáticos y la Matemática pueden lograr y de la importancia de la disciplina. Una parte de la culpa la llevamos los matemáticos y los profesores de matemática, por no explicar nuestra disciplina en un sentido general a estudiantes, gobiernos y opinión pública. Otra parte la lleva la confianza ciega en que las computadoras son una caja negra que puede dar respuestas a todos los problemas matemáticos, sin comprender los procesos involucrados ni los conceptos que se trata de manipular. Hay otros "culpables" relacionados con la cultura del consumo y del resultado inmediato (…)" [2]
En cualquier caso el uso de las TIC en las tareas educativas debe complementarse con el uso de otros recursos didácticos, como son materiales manipulables, láminas ilustrativas, etc. dándoles a las mismas el carácter de herramienta cognitiva, es decir "un objeto provisto por el ambiente de aprendizaje que permite al estudiante incorporar nuevos

[1] Da Rosa, Sylvia –La matemática discreta como formación básica
Instituto de Computación, Facultad de Ingeniería, Universidad de la República, Montevideo, Uruguay
[2] Markarian, Roberto -"La dimensión humana de la matemática" Correo del Maestro- Ed. La vasija.

métodos auxiliares, o símbolos, a su actividad de resolver problemas, recursos que, de otro modo, podrían no estar disponibles" (Derry – Hawkes, 1993).

"Las herramientas cognitivas no sólo permiten el pensamiento y el progreso intelectual, sino que también restringen o condicionan el rango de lo que podemos pensar." (Cole, 1985)

Son un recurso más, muy potente y atractivo, pero no el único que disponemos.

Las políticas educativas en materia de educación o alfabetización informática, sin embargo, no han sido pensadas para un pleno aprovechamiento de estos recursos, pues han seguido el camino de la imposición tecnológica y no de la educación para crear y comprender la tecnología.

A su vez, los avances tecnológicos actuales han sido posibles gracias a un desarrollo matemático muy importante, que no es conocido por todos, que no es fruto de estudio dentro de los currículos de la Enseñanza Media, de modo que los logros de la tecnología son vistos alejados de los avances matemáticos, mientras en las aulas se siguen enseñando los mismos contenidos que hace un siglo, cercenando el posible interés que temas como programación, creación de algoritmos, actividad de computar, detección de errores en la transmisión de datos, códigos de control, etc, podrían generar sin duda en estos "jóvenes digitalis".

Es así, que los primeros intentos de enseñar algún lenguaje de programación a niños, quedaron olvidados prontamente y fueron sustituidos por la preparación de usuarios de la tecnología, que es en realidad cada vez más "amigable" e intuitiva al usuario dejándole pocas oportunidades para la producción de conocimiento.

Aparecen así computación y matemática separadas, como si no tuvieran conexión alguna.

Mucho se habla de la "Brecha Digital" en nuestros días, como la distancia entre quienes usan tecnología y entre quienes no lo hacen, sin embargo, como docentes de Secundaria hemos comprobado que la verdadera brecha está generada entre quienes son capaces de entender los fundamentos básicos de la tecnología imperante y entre quienes simplemente la consumen. Entendemos que los docentes tenemos la responsabilidad de generar la conciencia de su existencia promoviendo actitudes reflexivas y brindando instancias para que estos temas "actuales" y transparentes al usuario, sean "puestos sobre la mesa", introduciendo otros contenidos, otros modos de aprender y otros modos de enseñar.

MODO DE TRABAJO

Partiremos de problemas, en el entendido de que "Sólo hay aprendizaje cuando el alumno percibe un problema para resolver, es decir cuando reconoce el nuevo conocimiento como medio de respuesta a una pregunta"[3]
El problema cumple objetivos metodológicos que refieren a la actividad de resolver problemas propiamente dicha y de orden cognitivo al permitir producir nuevos conocimientos o modificar los ya adquiridos.

A través de la resolución de problemas organizados en secuencias, se resignificarán conocimientos que los alumnos han adquirido en años anteriores así como también se construirán nuevos conocimientos que permitan avances conceptuales en la adquisición de conceptos matemáticos.

El rol del docente de Matemática debe ser, según Guy Brousseau "hacer vivir el conocimiento, hacerlo producir por los alumnos como respuesta razonable a una situación familiar y además transformar esa "respuesta razonable" en un hecho cognitivo extraordinario, identificado, reconocido desde el exterior"

Como el trabajo está pensado en esta primera instancia para alumnos de Primer Año de Ciclo Básico, se presume que conocen el algoritmo de la división, además de relaciones elementales de múltiplo-divisor, idea de resto, dividendo, etc. Un nuevo avance en estos conceptos supone el cuestionamiento de que el resto forma parte del resultado en la división entera, que debe ser menor que el divisor, para darle a este tema -que en la escuela se relaciona casi exclusivamente con "repartos"- , una estructura formal más sólida.

Otro avance supone el relacionar la búsqueda de cocientes, resto, divisores y divisores comunes, con métodos computacionales, en un ir y venir desde lo matemático y lo computacional, entendidos ambos como procesos que resuelven un mismo problema.

Se planificaron las clases de manera de intercalar instancias de trabajo individual, en pequeños grupos (para favorecer la interacción y trabajo en equipo) y a grupo total para socializar producciones, discutir e institucionalizar conocimientos, así como instancias de trabajo autónomo y también dirigido, con el fin de potencializar los beneficios de cada una estas estrategias.

Se combinan actividades en el aula con actividades en la Sala de Informática, pues en todas las instituciones se cuenta con una de ellas por lo menos y con profesores a cargo de esta Sala o de la disciplina Informática.

[3] Charnay, Roland- Aprender (por medio de) la resolución de problemas- Cap III de "Didáctica de Matemáticas" Saiz y Parra (comp).

Dejamos abierta la posibilidad de coordinar este trabajo con profesores de Informática, que podrían enriquecerlo y trabajar desde el propio lenguaje de programación como un ejemplo de un software diferente a los de aplicación y de Windows, únicos referentes para los alumnos, hasta ahora, en lo que a software se refiere.
Las actividades de producción de los alumnos se implementarán a través de instructivos impresos que serán llenados por los alumnos y pegados al cuaderno de clase para ser re- utilizados en clases posteriores, a modo de crear una red sólida que vincule los conceptos involucrados.
Las actividades a grupo total serán registradas también en el cuaderno.
En las actividades de aula, se usará el cálculo mental o apoyado por la calculadora. Si es necesario, se conversará sobre el uso de ésta para resolver los cálculos discretos necesarios.
Se ha dividido la propuesta en fases sólo para ir organizando los contenidos y los problemas a proponer, de modo de generar una secuencia coherente y en "in crescendo".
Si bien no pudo ser aplicada en un grupo de Primer Año liceal como se deseaba, se testeó con adolescentes de esa edad en forma individual, logrando resultados satisfactorios.
Es nuestra intención hacerlo el año próximo y será ajustada de acuerdo a los resultados que se obtengan.

Objetivo General

Lograr que el alumno comprenda el significado de la división en Naturales, su aplicación, su alcance y las relaciones entre los términos de la misma y pueda diseñar algoritmos propios para resolver problemas que involucren este conocimiento

Etapas previstas para Primer Año Ciclo Básico:

Primera Fase

OBJETIVOS

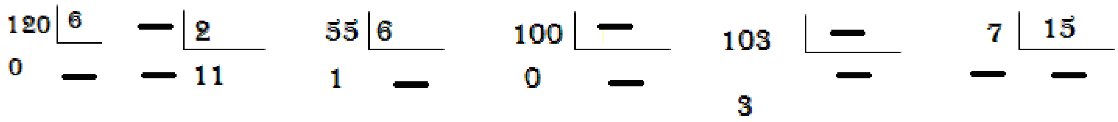
- Definir División Entera y División Exacta en N.
- Reconocer los términos de la división y sus relaciones.
- Rescatar la importancia del resto en la División entera en N.

Actividad 1

Trabajo en pequeños grupos con posterior puesta en común

Instructivo:

Completar los siguientes esquemas de división para que sea posible en N:



En la puesta en común, se discutirá sobre los resultados obtenidos, los casos en que hay más de un resultado, las condiciones del resto, etc.
Se pondrán algunos otros ejemplos pudiéndose proponer alguno que tenga divisor 0 para ser pensado entre todos, y concluir que el mismo debe ser distinto de 0.
Se definirá la División Entera por defecto en N como la operación en la que dados dos números naturales D (Dividendo) y $d \neq 0$ (divisor), encontramos cociente (q) y resto (r) de la misma a dos números que cumplen la relación $D = d.q+r$, siendo $r < d$.[4]
Se dialogará además, que la División Exacta en N puede considerarse un caso particular de la División Entera, que cumple que $D = d.q + 0$ ó simplemente: $D = d.q$

Actividad 2

Trabajo individual y autónomo

Ubica los valores hallados en la actividad 1, en la siguiente tabla.

Dividendo	divisor	Cociente	Resto

[4] Osín, Luis- Introducción al Análisis Matemático- Editorial Kapeluz.

Actividad 3

Trabajo individual y autónomo con posterior puesta en común

Escribe los datos de la tabla anterior utilizando la definición de División Entera

D= d.q + r

………………………………………………………………………

………………………………………………………………………

………………………………………………………………………

………………………………………………………………………

Segunda Fase:

OBJETIVOS

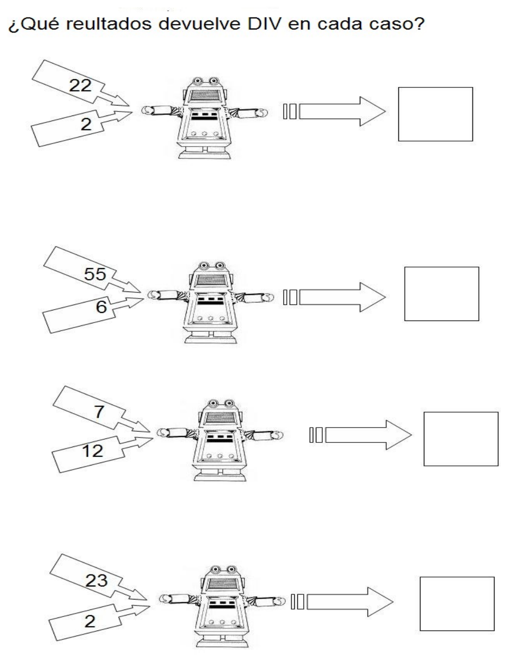
- Introducir “div” y “mod” como funciones de NxN* --->N
- Resignificar las relaciones entre dividendo, divisor, cociente y resto.

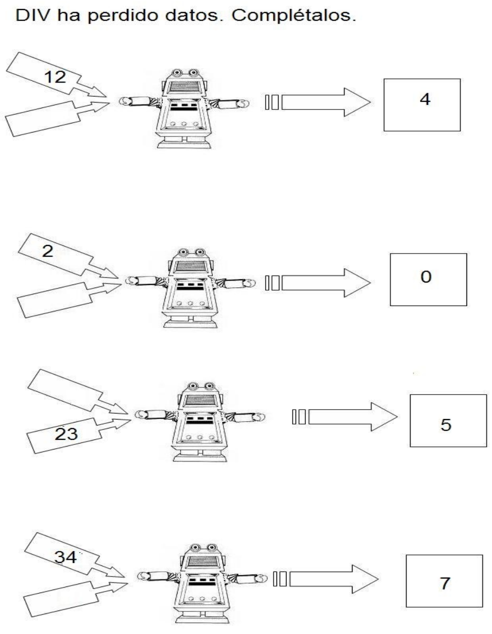
Actividad 1:

Trabajo individual y autónomo del alumno con posterior puesta en común.

Se entrega al alumno este instructivo:

- Lee con atención y realiza las actividades propuestas:





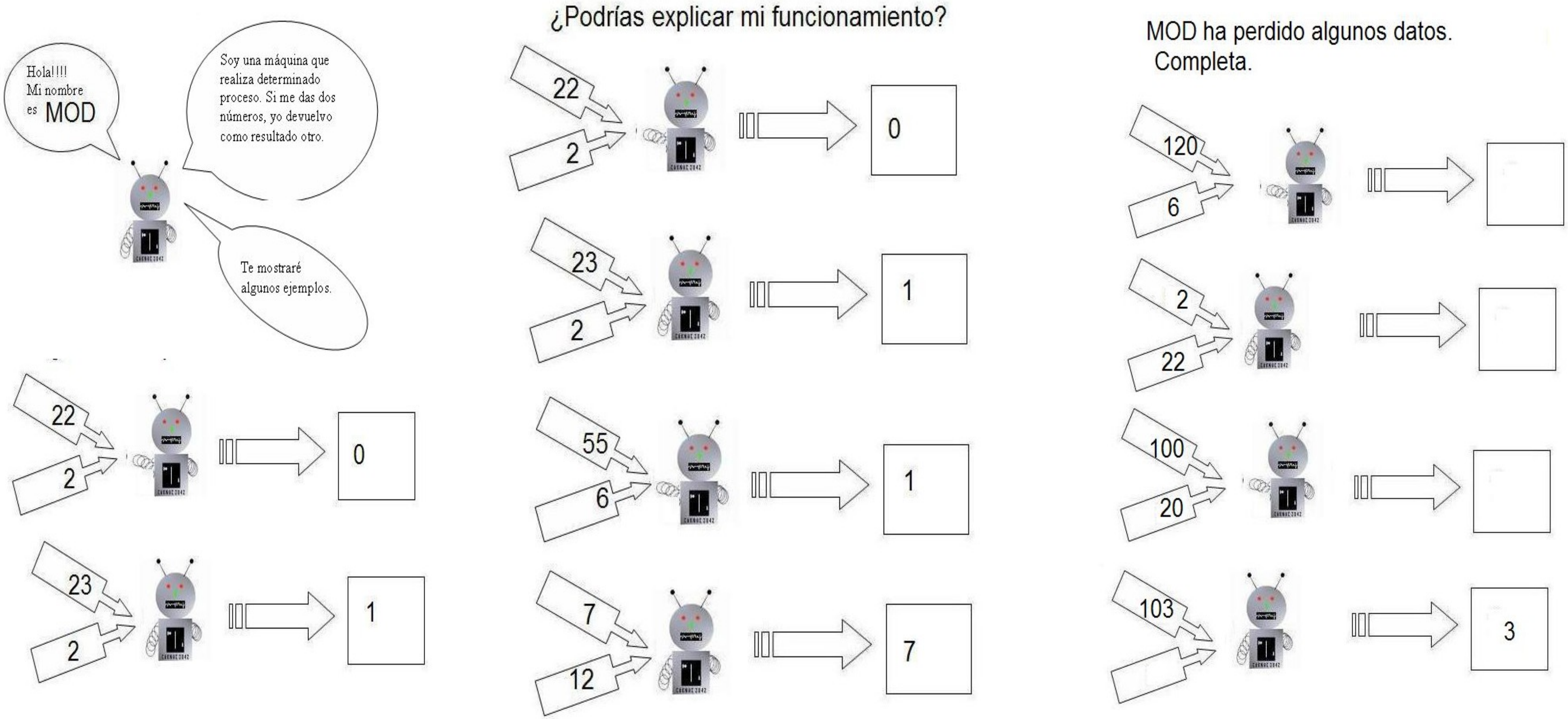
- Vincula estos resultados con la tabla realizada en la clase anterior.
- Expresa tus conclusiones por escrito.

En la puesta en común, se trabajará con los resultados que los alumnos encontraron, llamando la atención sobre el hecho de que la “entrada” de datos está constituida por una pareja de números naturales y “la salida” por un único número natural, que en muchos casos, parejas diferentes de números devuelven resultados iguales, que el resultado que se devuelve es el cociente entero por defecto entre el primero y el segundo, que el resultado varía si se cambia el orden de los componentes de la pareja, por ejemplo se puede cuestionar a todo el grupo qué resultado da DIV si en lugar de 23 y 2, se introduce 2 y 23, etc.
La idea de esta propuesta es introducir de un modo casi lúdico la idea de función –que por otra parte no vamos a definir sino implícitamente- y “jugar” con las relaciones entre dividendo, divisor y cociente.
También se busca que los alumnos comuniquen sus ideas, para ir adecuando paulatinamente el lenguaje matemático que se maneja en la clase.
Se introducirá naturalmente el lenguaje conjuntista necesario, apelando a la intuición de los alumnos.
Al final de la actividad, se plantearán las relaciones obtenidas usando Diagramas de Venn y “flechitas” que permitan visualizar las relaciones entre parejas de naturales y su correspondiente cociente entero.

Actividad 2:

Trabajo en pequeños grupos con posterior puesta en común.

Se entrega al alumno el siguiente instructivo:



Como el resto de la división entera no es tenido usualmente en cuenta, pensamos que esta actividad va a exigir una mayor conceptualización, el trabajo en pequeños grupos para este caso se considera el más propicio pues favorecerá la discusión entre pares, para llegar a la interpretación de la función MOD, planteada aquí también en forma lúdica y relacionada con lo que el alumno ya ha trabajado.
En la puesta en común, utilizando Diagramas de Venn, se aproximará a la idea de función: mod: NxN*-- >N.
Se llamará la atención en algunos aspectos tales como:

- "La entrada" de datos está constituida por parejas de números naturales que tienen un orden, (es decir, MOD no devuelve los mismos resultados si se intercambian los componentes del par ordenado)
- "La salida" está constituida por un único número natural
- Existen parejas diferentes que devuelven el mismo natural
- Los resultados coinciden con los de la columna "resto" de las tablas anteriores.
- Si se conoce uno de los componentes del par y el resultado que da MOD, existe más de una solución, constituyéndose el resultado en un conjunto de números que cumplen la relación D = d.q + r.

Se utilizará para expresar este conjunto notación con {}.
Las ideas destacadas anteriormente nos parecen importantes porque estamos dejando sentadas las bases para la comprensión de función, de par ordenado, de dominio y codominio, de clases residuales, de la función "mod" de ISetL.

Tercera fase:

OBJETIVOS

- Familiarizar al estudiante con el programa ISetL
- Introducir notaciones de conjuntos en este lenguaje
- Introducir las funciones div y mod en ISetL
- Expresar la relación de múltiplo y divisor usando “mod”
- Construir algoritmos para encontrar el MCD de dos números

Actividad 1

Trabajo autónomo en pequeños grupos con puesta en común

Luego de un breve diálogo con la clase explicitando la intención que se tiene al usar un programa de computadora, se concurre a la Sala de Informática, donde se organizará la clase en grupos de dos o tres alumnos por computadora.
Para poder realizar la tarea, el programa ISetL debe estar cargado en el Escritorio de cada terminal, así como los archivos necesarios.

Se le entrega el siguiente instructivo:

➢ Vamos a trabajar en ISetL, un lenguaje de *programación matemática* que posee una forma de escribirse similar a la notación matemática estándar.

➢ Para entrar al mismo, abre la carpeta isetlw30b0 que está en el Escritorio y luego el archivo ISETLW, identificado con el ícono .

➢ Haz clic en OK para empezar.

➢ Los menús están en inglés, en una ventana similar a la que estás acostumbrado.

➢ Al iniciar una sesión en **ISetL**, aparece en la ventana de ejecución, el símbolo `‘>’`, que indica que **ISetL** está pronto para interactuar con el usuario.

➢ Cada frase debe terminar con el símbolo `‘;’`

➢ En el menú **File** (archivo), selecciona **Open** (abrir) y luego el archivo **Actividad1**.

➢ Observa en este archivo lo que está escrito en cada renglón y anota en la hoja lo que crees que se indica en cada uno.

A:={1,2,3,5} …………………………….

B:={1,2,5,6} …………………………..

D:={9,10} …………………………..

➢ Escribe luego en ISetL, a continuación:

```
<    2 in A;
```

➢ Pinta el renglón anterior y aprieta el ícono  (semáforo) ¿Qué devuelve el programa? ¿Qué significado le das?

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

➢ Escribe en el renglón siguiente

```
<    9 in A;
```

- Vuelve a apretar el ícono ¿Qué devuelve el programa? ¿Qué significa?

……………………………………………………………………………………………..
……………………………………………………………………………………………...

- Escribe en ISetL

```
>   A inter B;
```

- Aprieta el semáforo, ¿qué significado le atribuyes a lo que se devuelve?

……………………………………………………………………………………..

- Repite el procedimiento para

```
>   A inter D;
```

- Explica la devolución que da ISetL.

……………………………………………………………………………………..

- Cierra el archivo sin guardar y cierra el programa. Aprieta la opción **Exit** (Salir) en el menú **File**

Luego de este primer encuentro con el programa, se realizará una puesta en común para compartir las experiencias, lo que cada grupo anotó en su hoja, los mensajes de error que devolvió el programa, las dificultades.
El docente hará hincapié en las características de ISetL así como en los requerimientos de sintaxis que todo lenguaje de programación tiene, en especial éste.
Se aclarará sobre el rol del ":=" usado para definir conjuntos así también como la sintaxis de una definición ***nombre := expresión***

Observación: el archivo actividad1 contiene al momento de abrirlo:

```
!include
C:\Escritorio\isetl\isetlw30b0\isetl.stl
>   A:={1,2,3,5};
>   B:={1,2,5,6};
>   C:={0,1,2,8};
>   D:={9,10};
>
```

Actividad 2

Trabajo autónomo en la computadora, en grupos de dos o tres por máquina, con posterior puesta en común.

Se entrega el siguiente instructivo:
Vamos a poner a trabajar a DIV y MOD en ISetL.

- Entra a ISetL.
- Escribe y evalúa (semáforo) lo siguiente, respetando la forma de escribir de este lenguaje.

```
>   120 div 6;
>   100 div 5;
>   22 mod 2;
```

```
>   22 div 2;
>   120 div 6;
>   103 div 20;
>   120 mod 6;
>   103 mod 20;
>   x mod 2;
>   20 mod 0;
```

- Evalúa otros ejemplos trabajados anteriormente.
- Guarda el archivo como **actividad2 (File, Save)**
- ¿Qué devuelve ISetL cuando relacionamos dos números naturales con DIV? ¿Y en el caso de MOD?
- ¿Qué semejanzas y diferencias encuentras con lo realizado por los robots DIV y MOD?
- ¿Podemos resolver en Matemática x mod 20, x mod 20 =5?

En la puesta en común se discutirá el significado -para el programa- de DIV y MOD y las limitaciones del programa.

Actividad 3

Individual, autónoma.

Se entregará a cada alumno el siguiente cuestionario:

Se dice que 2 es divisor de 22, que 6 es divisor de 120, o que 11 es divisor de 22. **9 no es divisor de 55 ni 2 es divisor de 23.**

- ¿Cuándo un número es divisor de otro?

…………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………

- Escribe:

Todos los divisores de 10……………………………………………..
Todos los divisores de 24………………………………………………
Todos los divisores de 23 ……………………………………………..

- ¿Podremos determinar que un número es divisor de otro usando alguna de las expresiones DIV y/o MOD? ¿Cómo?

…………………………………………………………………………………………

Actividad 4

A grupo total

- Se escribirá el concepto de divisor y múltiplo usando diferentes lenguajes:

<table>
<tr><th>Lenguaje corriente</th><th>Matemático</th><th>ISetL</th></tr>
<tr><td rowspan="5">48 se puede dividir exactamente entre 12</td><td>48 = 12x4+0</td><td rowspan="5">48 mod 12 = 0</td></tr>
<tr><td>El resto de dividir 48 entre 12 es 0</td></tr>
<tr><td>12 es divisor de 48</td></tr>
<tr><td>48 es múltiplo de 12</td></tr>
<tr><td>48 es divisible por 12</td></tr>
</table>

- Se traducirán diferentes afirmaciones a lenguaje matemático y luego cómo se escribirían en ISetL:
  - 21 no es divisible por 5
  - El resto de dividir 120 entre 6 es 0
  - 22 es múltiplo de 2
  - 4 es divisor de 12
  - Los divisores de 2 son 1 y 2
  - Este es el conjunto de todos los divisores de 24
  - Este es el conjunto de los números múltiplos de 4 menores que 30

Usando en el aula la función mod, se definirá la idea de múltiplo y divisor, que el alumno ya posee, pero que será resignificada a la luz de esta “nueva forma” de expresarla.
Así, se llegará a la conclusión de que si a es divisor de b, b mod a = 0 de la misma forma que esta expresión significa que b es múltiplo de a.
Entendemos que los conceptos múltiplo y divisor deben trabajarse juntos.
Se realizarán problemas de buscar todos los números que cumplan, en matemática, por ejemplo con 12 mod a = 0, o con b mod 5 = 0.
Se observará que el resultado es un conjunto finito de números en el primer caso, y un conjunto infinito en el segundo, así también como que en todos los conjuntos de divisores está el 1 y el propio número, y que en todos los conjuntos de múltiplos de un número está el 0, salvo en los múltiplos de 0 etc. reafirmando ideas que los alumnos ya traen o introduciendo nuevas.
Se observará también que algunos números sólo tienen dos divisores.

Actividad 5

En pequeños grupos, usando computadora

Instructivo:

- Entrar a ISetL
- Definir:

1. Un conjunto A formado por los elementos 1, 2, 3.
2. El conjunto B de los divisores de 24
3. El conjunto C de todos los divisores de 10
4. El conjunto D de todos los divisores de 9
5. Un conjunto E formado por los números pares menores de 10.

- Explicar qué devuelve ISetL en estos casos, evaluando las frases en el archivo abierto

```
>    B inter C;
>    C inter D;
>    divisores:=func(x);return {y:y in {1..x}| x mod y
=0};end;
>    {x:x in {1..40}|x mod 4 = 0};
```

- Guardar el archivo con el nombre **actividad5** (Usar la opción **File, Save**)

Actividad 6

Dos o tres alumnos por computadora

Las ideas recogidas en clases anteriores serán contrastadas en ésta, usando ISetL, con un archivo que incluya la función múltiplo y divisores.

Instructivo:

- Entra en ISetL
- Abre el archivo **actividad6**
- Lee la definición de divisores y múltiplos y anota con lenguaje corriente lo que significan.
- Evalúa
- divisores (14);
- divisores (24);
- divisores(x);
- múltiplos (20);
- múltiplos (0);
- 300 es múltiplo de 20. Realiza la prueba " a mano", prueba luego usando mod
- ¿Puedes explicar por qué en esta actividad ISetL no reconoce a 300 como múltiplo de 20?

Observaciones: El archivo actividad6 contiene:

```
!include C:\Escritorio\isetl\isetlw30b0\isetl.stl
>    divisores:=func(x);return {y:y in {1..x}| x mod y
=0};end;

>    multiplos:=func(n);return {x:x in {0..100}|x mod n =
0}; end;
```

Actividad 7

A grupo total

Se parte del siguiente problema, que los alumnos resolverán en forma individual y luego se realizará una puesta en común.

Se quieren cortar dos cintas, una de 54 cm y otra de 126 cm de manera de que se obtengan trozos iguales y que la longitud de los mismos sea la mayor posible. ¿Cuántos cm debe medir cada trozo?

En la puesta en común se analizarán las posibles soluciones y luego se llegará a relacionar este problema con divisores de un número, divisores comunes de dos números y MCD, además de intersección de conjuntos y máximo de un conjunto.
La intersección de conjuntos será definida como los elementos en común de dos conjuntos simplemente. No es necesario introducir el símbolo $\cap$, se puede usar "inter" o "intersección".
Se representará usando diagramas de Venn y lenguaje conjuntista si se desea.
Se instrumentará un "camino" para encontrar el MCD de dos números cualesquiera. ¿Cómo encontrar el mayor de los divisores comunes? Se recogerán las hipótesis de los alumnos.

Actividad 8:

En grupos de dos o tres alumnos por computadora, trabajo autónomo.
Se entrega el instructivo:

- Abre el archivo **actividad8** de ISetL.
- Observa lo que se escribió en él.
- Anota en tu hoja lo que devuelve el programa a cada frase.

```
>    divisores:=func(x);return {y:y in {1..x}| x mod y
=0};end;
>    divisores_comunes:= func(x,y); return divisores(x)
inter divisores(y);
>>   end;
>    maxconj:=func(A);if is_set(A) and A ≠ {} then
return [x | x in A : forall y in A | max(x,y) = x];end;end;
luego prueba:
divisores(10)
divisores (45)
divisores_comunes(10,45)
maxconj(divisores_comunes(10,45))
```

- Anota conclusiones

En la definición de maxconj se incluyen muchas palabras del lenguaje ISetL que no han sido trabajadas aún, se apela a una "comprensión global" que el alumno pueda usar y luego será explicada por el docente.

<u>Observación: el archivo actvidad8 contiene:</u>

```
!include C:\Escritorio\isetl\isetlw30b0\isetl.stl
>    divisores:=func(x);return {y:y in {1..x}| x mod y
=0};end;
>    divisores_comunes:= func(x,y); return divisores(x)
inter divisores(y);
>>   end;
>    maxconj:=func(A);
if is_set(A) then
return [x | x in A : forall y in A | max(x,y) = x];
end;
end;
```

<u>Actividad 9:</u>

<u>A grupo total</u>

Acercamiento al algoritmo de Euclides, a través de ejemplos en los que se pueda observar la propiedad fundamental de los divisores comunes a dos números: el MCD de dos números es el MCD entre el menor de ellos y el resto de la división del mayor por el menor.

Realización de ejemplos tales como:

MCD(28 y 20)
Divisores(28) = {1, 2, 7, 4, 14, 28}
Divisores(20) = {1,2,4,5,10,20}
Divisores_comunes (28,20) = {1, 2, 4}
MCD(28,20) = 4

Luego: 28 dividido 20 da cociente 1 y resto 8, 20 dividido 8 da cociente 2 y resto 4, 8 dividido 4 da cociente 2 y resto 0.
Llevándolo a la función mod:
28 mod 20 = 8, 20 mod 8 = 4 8 mod 4 = 0 entonces 4 es el MCD

Otros ejemplos permitirán observar la recursividad de este procedimiento y reconocer el paso base y el paso inductivo.
Deberá también cuestionarse sobre el hecho de que hay un número de pasos finitos en esta secuencia, haciendo ver que los divisores van decreciendo.

Actividad 10:
Dos o tres alumnos por computadora

Observación del funcionamiento de ISetL para aplicar el algoritmo de Euclides.
Interpretación del mismo. Limitaciones.
Conclusiones.
Se entregará el siguiente instructivo:

- Entra a ISetL
- Abre el archivo **actividad10**
- Lee lo que está escrito. Anota en la hoja lo que crees que significa
- Evalúa:
  - mcd(10,45)
  - mcd(18,10)
  - mcd(3,0)
  - mcd(60,30)
- Compara el procedimiento mcd con el procedimiento de divisores_comunes usado anteriormente. Anota tus conclusiones.
- ¿Estos mecanismos sirven para calcular el MCD de tres números? Explica.

Observación: el archivo actividad10 contiene:

```
!include C:\Escritorio\isetl\isetlw30b0\isetl.stl
>    mcd := func(x,y);r:= x mod y;
               if r = 0 then return y;
               else return mcd (y,r); end;
             end;
>
>
```

Proyecciones previstas:

Para Primer Año de Ciclo Básico:

A partir de aquí se trabajarán números primos y compuestos, se introducirá cardinal del conjunto de divisores comunes, números primos entre sí, descomposición de un número en factores primos, otras formas de obtener el MCD.

Para cursos más avanzados:

La modalidad de trabajo sería diferente en cuanto a:

- Las propuestas serían más directas, con carácter más formal, aunque con el mismo "espíritu"
- Se tomarían menos clases en las primeras fases
- Se demostraría la unicidad y existencia de la división entera en N
- Se demostraría el Teorema "Los divisores comunes a dos números son los mismos que los del par formado por el menor de ellos y el resto de la división del mayor por el menor"
- Se introduciría el concepto de recurrencia
- Se trabajaría sobre la idea de algoritmo y de diagrama de flujo
- Los propios alumnos escribirían los algoritmos y en especial, el de Euclides.
- Se cuestionaría de entrada cómo se define la división en N, Z y Q de modo de dejar claro que los problemas de división entera no tienen sentido en Q.
- Se trabajaría más sobre el propio lenguaje de programación (predicados, bool, función como método)
- Se compararía la función mcd (que en este caso tendría además la condición is_nat) escrita en ISetL con otras escritas en otros lenguajes de programación, cuyos ejemplos son fáciles de buscar en Internet.
- El tratamiento de la función mod podría dar lugar a la introducción de las clases residuales y todas las aplicaciones en cuanto a dígitos de control y detección de errores en la trasmisión de información que ellas tienen, así como en otros conceptos matemáticos que ameriten ser estudiados (cuerpo, clases de equivalencia, etc.)

Evaluación:

Se evaluará el proceso y los avances que logren los alumnos.
Se realizará una evaluación cualitativa por parte de los alumnos de las impresiones de estas actividades y de sus logros.

Bibliografía

- Manual de ISetL
- da Rosa, Sylvia -La matemática discreta como formación básica Instituto de Computación, Facultad de Ingeniería, Universidad de la República, Montevideo, Uruguay
- Parra, C-Saiz, Irma- Didáctica de matemáticas. Aportes y reflexiones. Editorial Paidós.
- Osín,Luis- Introducción al análisis matemático. Editorial Kapeluz.
- Repetto, C- Linskens, M - Fesquet, H. Aritmética 1.Editorial Kapeluz.
- Markarian, R – La dimensión humana de la matemática. Ensayos sobre matemática y cultura – Correo del maestro Ediciones La vasija.