La conjetura de Collatz y dinámica de la transformación de Collatz.

Eleonora Catsigeras*

15 de abril de 2025

Resumen

Este es un artículo didáctico de divulgación dirigido a público con nivel de primer año de las carreras universitarias de Matemática o de Ingeniería. Su objetivo es definir y estudiar propiedades dinámicas de la transformación de Collatz en el conjunto de los números naturales, y enunciar la conjetura de Collatz y sus reformulaciones equivalentes. Demostrar o refutar la Conjetura de Collatz es un problema abierto, es decir, aún no se conoce una demostración de que es verdadera ni un contrajemplo que muestre que es falsa.

MSC 2020: Primaria: 00A09 Secundaria: 00A27, 97-01, 37P55, 11S82

1. Introducción.

La conjetura que enunciaremos más adelante en esta introducción, así como el problema de determinar si es verdadera o falsa, fue planteada por Lothar Collatz en 1937 [2] y aún hoy permanece abierta [5].

A lo largo de este artículo utilizaremos la siguiente notación:

El conjunto de los números naturales mayores o iguales que 1 se denota $\mathbb{N}$.

El conjunto de los naturales impares se denota $\mathbb{N}_{\text{impares}} \subset \mathbb{N}$.

El conjunto de los naturales pares se denota $\mathbb{N}_{\text{pares}} \subset \mathbb{N}$.

Definición 1.1. La *transformación de Collatz* es la aplicación o función de $\mathbb{N}$ en $\mathbb{N}$ que asigna a cada número natural x otro número natural según la siguiente regla: si x es impar, entonces su correspondiente es $3x + 1$, y si x es par, entonces su correspondiente es $x/2$.

*Instituto de Matemática y Estadística "Prof. Rafael Laguardia", Facultad de Ingeniería, Universidad de la República, Uruguay. Dirección postal: Av. Herrera y Reissig 565, C.P.11300 Montevideo, Uruguay. Dirección electrónica: eleonora@fing.edu.uy

El *sistema dinámico por iterados de la transformación de Collatz* consiste en tomar un número natural inicial x_0 cualquiera (llamado *estado inicial*), aplicarle la transformación de Collatz, al resultado obtenido aplicarle de vuelta la transformación de Collatz, y así sucesivamente. Se obtiene una sucesión de números naturales que se llama *sucesión de iterados* de x_0, o *trayectoria de* x_0, o también *órbita de* x_0, para cada estado inicial elegido.

Observación 1.2. La trayectoria por iterados de la transformación de Collatz con estado inicial $x_0 = 1$ es $1, 4, 2, 1, 4, 2, 1, 4, 2, 1, \ldots$, por lo tanto es periódica.

Como $3x + 1$ es par cuando x es impar, el iterado siguiente siempre será $(3x + 1)/2$. Entonces, para ahorrar tiempo en las iteraciones, modificamos un poco la definición de la transformación de Collatz, y la reemplazamos por la siguiente transformación U (también llamada transformación de Collatz, por abuso en el lenguaje)

$U : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ está definida como

$$U(x) = \frac{3x+1}{2} \text{ si } x \in \mathbb{N}_{\text{impares}}, \qquad U(x) = \frac{x}{2} \text{ si } x \in \mathbb{N}_{\text{pares}}.$$

Se denota $U^n(x_0)$ al resultado de aplicar n veces consecutivas la transformación U al estado inicial x_0. En otras palabras, $U^n(x_0)$ es el iterado n-ésimo de x_0.

Observación 1.3. 1 es un punto periódico para U. En efecto, $U(1) = 2, U^2(1) = U(U(1)) = U(2) = 1$. Entonces la trayectoria de 1 por iterados de U es la sucesión periódica

$$1, 2, 1, 2, 1, 2, 1, 2, \ldots.$$

Conjetura de Collatz. *Para cualquier estado inicial $x_0 \in \mathbb{N}$ la trayectoria de x_0 por la transformación de Collatz tiene un iterado igual a 1. Por lo tanto, a partir de ese iterado, la trayectoria reproduce la órbita periódica del 1.*

La conjetura de Collatz es un problema abierto: no se conoce una demostración de que es verdadera, ni se conoce un contraejemplo que muestre que es falsa.

Las órbitas periódicas se llaman *ciclos.* El ciclo de 1 por la transformación de Collatz se llama *ciclo trivial.*

Enunciado equivalente a la Conjetura de Collatz.

Veremos que la conjetura de Collatz es equivalente a las siguientes dos afirmaciones juntas:

1. No existen ciclos no triviales de la transformación de Collatz.

2. Cada trayectoria por iterados de la transformación de Collatz está acotada superiormente.

En efecto, por un lado, si la afirmación 2 fuera verdadera, la trayectoria con estado inicial $x_0 \in \mathbb{N}$ estaría acotada superiormente por una constante $K = K(x_0) > 0$, es decir $T^j(x_0) < K$ para todo $j \geq 1$. Como $T^j(x_0)$ es un número natural y existe solo una cantidad finita de números naturales menores que la constante K, la trayectoria de x_0 tiene solo un número finito de puntos diferentes. Por lo tanto, a partir de cierto iterado, se deben repetir periódicamente los números naturales en la sucesión infinita de iterados de x_0. Deducimos que la trayectoria alcanza a un ciclo a partir de cierto iterado.

Por otro lado, si la afirmación 1 también fuera verdadera, la trayectoria con estado inicial x_0, que alcanza a un ciclo a partir de cierto iterado, solo puede alcanzar al ciclo trivial, que es el ciclo de 1. Deducimos que la trayectoria de x_0 alcanza 1 para algún iterado.

Las afirmaciones 1 y 2 son dos problemas abiertos. Primero, no se han descubierto ciclos no triviales para la transformación de Collatz ni se ha podido demostrar que no existen. Segundo, no se han descubierto trayectorias que $T^j(x_0)$ no acotadas, ni se ha podido demostrar que no existen.

Se demuestra en forma sencilla que las trayectorias por la transformación de Collatz no son siempre crecientes (ver más adelante, en este artículo, la Proposición 5.3). Sin embargo eso no implica que la trayectoria sea acotada superiormente y que no pueda tender a infinito. A priori hay tres tipos de trayectorias: las que se estabilizan en 1, las que se estabilizan en un ciclo no trivial, y las que son no acotadas (se puede demostrar que si una trayectoria es no acotada entonces tiende a infinito).

Otros enunciados equivalentes a la conjetura de Collatz, y que por lo tanto son problemas abiertos, fueron dados por varios autores, por ejemplo L. Berg, y G. Meinardus en 1994 [1].

2. Demostrar o refutar la conjetura de Collatz: un problema difícil.

Demostrar la conjetura de Collatz es probar que es verdadera, y por lo tanto convertir la conjetura en un teorema. Refutar la conjetura de Collatz es encontrar un ejemplo que no la cumpla, llamado contraejemplo. Es decir, encontrar un estado inicial $x_0 \in \mathbb{N}$ (uno solo alcanza) cuya trayectoria por iterados de la transformación de Collatz no llegue nunca a 1. O sea, según la reformulación de la conjetura, lo que habría que encontrar para refutarla es un ciclo no trivial, o si no, un estado inicial cuya trayectoria fuera no acotada superiormente.

El problema de demostrar o refutar la conjetura de Collatz es llamado también, en inglés, $3n+1$- *problem* [7], *Ulam's problem* o *Syracuse problem* [8]. En la bibliografía se encuentran afirmaciones desestimulantes para investigar en este problema. Por ejemplo, R. Guy en 1983 escribió "No trate de resolver este problema."[4]. También, según R. Guy en [4], P. Erdös habría afirmado que "La matemática no está preparada para poder resolver este problema."

Sin embargo esas afirmaciones desestimulantes se refieren únicamente a las herramientas algorítmicas y no a argumentos más abstractos en una eventual demostración o refutación. En efecto, que las herramientas algorítmicas son insuficientes para resolver el problema, fue probado por Conway en 1972 [3], al definir con precisión los *algoritmos irresolubles* y demostrar que las trayectorias por iteraciones de la transformación de Collatz son *impredecibles.*

Con métodos computaciones se ha probado al día de hoy que para todo estado inicial $x_0 \leq 2{,}95 \cdot 10^{20}$ las trayectorias finalmente llegan al valor 1. Sin embargo, el avance por este método para tratar de encontrar un contraejemplo, es muy lento. En 1999, ya se había llegado a chequear la afirmación de la conjetura de Collatz para $x_0 \leq 2{,}7 \cdot 10^{16}$ [9]. Es decir, en los últimos 26 años, con la mejora de la tecnología, solo se ha avanzado en 4 potencias de 10. Además, este método computacional de encontrar las trayectorias para estados iniciales cada vez más grandes, solo puede ser útil si se encuentra algún día un contraejemplo y se refuta la conjetura de Collatz. Pero no sirve para demostrarla, pues para ello se necesita estudiar las trayectorias de todo número natural x_0, y no solo para los que son menores que cierta cantidad, por más grande que sea esta cantidad.

Ejercicio 2.1. Realizar un programa que reciba cualquier natural mayor que 1 y, mientras la salida no sea igual a 1, permanezca en un ciclo realizando las dos instrucciones siguientes:

(i) si el número es par se procede a efectuar su división a la mitad; y

(ii) si el número es impar se procede a triplicar y luego sumar 1.

Ejecutar dicho programa y mostrar que, para cada natural x comprendido entre 2 y 1000, se termina en 1.

Ahora explicaremos por qué es tan difícil demostrar o refutar la conjetura de Collatz. La dificultad proviene de dos propiedades de las trayectorias: por un lado, la alta sensibilidad al estado inicial x_0, y por otro lado, la existencia en las trayectorias de sucesivos tramos finitos en que el iterado va creciendo estrictamente, seguidos de tramos finitos en que el iterado va decreciendo estrictamente.

Respecto a la sensibilidad al estado inicial x_0, llamado *caos* en la teoría de Sistemas Dinámicos, es sabido que provoca la impredictibilidad de la trayectorias, y el cambio brusco en su comportamiento al cambiar un poco el estado inicial. Cada trayectoria es diferente. El comportamiento del conjunto de trayectorias, todas diferentes, fue llamado "tormenta de granizo"por Pikhover en 2001 [10], comparando cada trayectoria con un grano de granizo diferente de otro, pero que se presentan, durante los transitorios de las trayectorias, yendo para cualquier lado como en una tormenta. También, y en forma más optimista, las trayectorias todas diferentes, fueron llamadas sucesiones de "números maravillosos" por Hofstadter en 1979 [6].

Por otro lado la existencia en las trayectorias de tramos finitos en que el iterado va creciendo seguidos de tramos finitos en que el iterado va decreciendo, en forma alternada y que nunca se acaba, es un fenómeno usual en la teoría de los sistemas dinámicos. Más adelante en este artículo expondremos cómo se demuestra la existencia de esos tramos alternados de crecimiento y decrecimiento. Durante los tramos de crecimiento, la tasa (factor) en que el iterado crece, se llama *tasa de expansión.* Durante los tramos de decrecimiento, la tasa (factor) en que el iterado decrece, se llama *tasa de contracción.*

El método de estudio usado en la teoría de sistemas dinámicos cuando se presentan alternadas expansiones y contracciones requiere la presencia de un fenómeno llamado *dominación* o de un fenómeno llamado *conservación.* La dominación aparece cuando la tasa de contracción acumulada (es decir, el producto de las tasas de contracción en todos los tramos crecientes anteriores al iterado $U^n(x_0)$) predomina frente a la tasa de expansión acumulada, asintóticamente en el futuro (es decir para $U^n(x_0)$ cuando $n \to +\infty$)). La conservación aparece cuando la tasa de expansión acumulada asintótica es igual a la tasa de contracción acumulada.

Más adelante en este artículo calcularemos las tasas de expansión y contracción para el primer tramo de iterados crecientes seguido del primer tramo de iterados decrecientes, para cualquier estado inicial $x_0 > 1$. También expondremos cómo se demuestra que bajo cierta condición adicional, hay dominación si $x_0 > 1$ o hay conservación si $x_0 = 1$. La dificultad reside en que esa condición adicional bajo la cual existe dominación cuando $x_0 > 1$, si bien se puede demostrar que se cumple para algunos estados iniciales $x_0 > 1$ tan grandes como se quiera, no se pudo demostrar todavía que, asintóticamente en el futuro se verifica para todo natural $x_0 > 1$. Si se demostrara para todo $x_0 > 1$ la conjetura de Collatz sería verdadera y se convertiría en un teorema. Una exposición matemática precisa, cuando hay dominación, se puede encontrar en el artículo de Wirsching de 1998 [13].

3. Teoremas de inexistencia de ciclos no triviales.

Recordando lo expuesto en la Sección 1, la conjetura de Collatz es equivalente a dos conjeturas juntas, una de ellas la inexistencia de ciclos no triviales. En esta Sección citaremos dos resultados, que bajo ciertas hipótesis adicionales, demuestran que no existen ciclos no triviales para cierto estado inicial $x_0 > 1$ arbitrariamente grande.

Sea $x_0 > 1$ un estado inicial y denotemos $x_0, x_1, \ldots, x_n, \ldots$ a su trayectoria por la transformación de Collatz. En la Sección 2 dijimos que las trayectorias están compuestas alternadamente por tramos finitos de iterados estrictamente crecientes y tramos finitos de iterados estrictamente decrecientes.

Definición 3.1. Se llama *cúspide* al iterado final de un tramo estrictamente creciente. Por lo tanto, en el iterado siguiente empieza un tramo estrictamente decreciente. Si x_n es una cúspide, entonces es un máximo relativo local estricto, es decir $x_{n-1} < x_n$ y $x_{n+1} < x_n$.

Se llama *fondo de valle* al iterado final de un tramo estrictamente decreciente. Por lo tanto, en el iterado siguiente empieza un tramo estrictamente creciente. Si x_m es un fondo de valle, entonces es un mínimo relativo local estricto, es decir $x_{m-1} > x_m$ y $x_{m+1} > x_m$.

Supongamos que x_0 es el mínimo de una órbita periódica. Entonces es uno de los fondos de valle, y la órbita, hasta que se obtiene el iterado $x_p = x_0$, tiene igual cantidad de cúspides que de fondos de valles.

Definición 3.2. Una órbita periódica se llama *k-ciclo* si tiene exactamente k cúspides y k fondos de valle.

Toda órbita periódica es un k-ciclo para algún $k \geq 1$.

Por ejemplo la órbita de 1 por la transformación de Collatz es $1, 4, 2, 1, 4, 2, 1, 4, 2, \ldots$ Tiene una sola cúspide que es 4 y un solo fondo de valle que es 1. Concluimos que el ciclo trivial, es decir la órbita periódica de 1, es un ejemplo particular de 1-ciclo. Pero esto no demuestra la inexistencia de otros 1-ciclos que no pasan por 1.

Teorema 3.3. *No existen 1-ciclos por iterados de la transformación de Collatz que no sean la órbita periódica del 1.*

Este teorema fue demostrado por R. P. Steiner en 1977. La demostración está en [12].

Teorema 3.4. *No existen 2-ciclos por iterados de la transformación de Collatz.*

Este teorema fue demostrado por J. Simons en 2005. La demostración está en [11].

4. Transformación T de retorno a los impares.

Consideremos la transformación de Collatz levemente modificada para ahorrar tiempo en las iteraciones: $U : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, definida en la Sección 1.

Proposición 4.1. *Para cada $x_0 \in \mathbb{N}$, estado inicial cualquiera, existe un iterado n-ésimo impar, con $n \geq 1$. Es decir $U^n(x_0)$ es impar para algún primer $n \geq 1$.*

Es decir, cualquier trayectoria en algún iterado futuro cae en el conjunto de impares. Pero los siguientes iterados pueden ser pares hasta que nuevamente se cae en los impares, y así sucesivamente. Concluimos que la trayectoria cae en los impares infinitas veces.

Demostración.

Primer caso: x_0 es par. Sea $n \geq 1$ el exponente de 2 en la descomposición en factores primos de x_0. Entonces $x_0 = 2^n p$ donde p es impar (es el producto de todos los demás factores primos distintos de 2) . Tenemos $U^n(x_0) = x_0/2^n = p$ impar.

Segundo caso: x_0 es impar y $(3x_0+1)/2$ también es impar. En otras palabras, el primer iterado ya es impar porque $U(x_0) = (3x_0+1)/2$.

Tercer caso: x_0 es impar pero $(3x_0+1)/2$ es par. Sea $m \geq 1$ el exponente de 2 en la descomposición en factores primos de $(3x_0+1)/2$, es decir $(3x_0+1)/2 = 2^m q$ donde q es impar.

Entonces $U^{1+m}(x_0)$:

$$U^{1+m}(x_0) = U^m(U(x_0)) = U^m((3x_0+1)/2) = ((3x_0+1)/2)/2^m = q \in \mathbb{N}_{\text{impares}}.$$

$\square$

Debido a la proposición anterior, una vez que se cae en $\mathbb{N}_{\text{impares}}$, la trayectoria vuelve a caer una vez más, y otra, y otra... en $\mathbb{N}_{\text{impares}}$.

Definición 4.2. Sea $T : \mathbb{N}_{\text{impares}} \to \mathbb{N}_{\text{impares}}$ la trasformación que a cada número impar x le hace corresponder el primer iterado $U^n(x)$, con $n \geq 1$, que vuelve a ser impar.

T se llama *transformación de retorno a los impares* de la transformación de Collatz, o en breve, transformación de retorno.

Observación 4.3. *1 es un punto fijo para T, es decir $T(1) = 1$.*

En efecto, $U(1) = 2, U^2(1) = 1 \in \mathbb{N}_{\text{impares}}$. Entonces $T(1) = U^2(1) = 1$. Por lo tanto la trayectoria de 1 por iteraciones de T es la sucesión constante $1, 1, 1, 1, 1, 1, \ldots$.

Obsérvese que para cualquier estado inicial $x_0 \in \mathbb{N}_{\text{impares}}$, la sucesión por iterados de T: $T(x_0), T^2(x_0), T^3(x_0), \dots, T^n(x_0), \dots$, es la sucesión por iterados de U a la que se le han borrados todos los números pares. Esto es porque para aplicar la transformación de retorno, saltamos de un impar al siguiente, tomando todas juntas en un solo paso, las iteraciones por U intermedias que daban números pares.

Proposición 4.4. *Sea $x_0 \in \mathbb{N}_{impares}$ un estado inicial. Sea $T : \mathbb{N}_{impares} \to \mathbb{N}_{impares}$ la transformación de retorno definida en la Definición 4.2.*

a) Si $(3x_0 + 1)/2$ es impar, entonces

$$T(x_0) = U(x_0) = \frac{3x_0 + 1}{2}.$$

Si $(3x_0 + 1)/2$ es par, entonces

$$T(x_0) = U^{1+m}x_0) = \frac{3x_0 + 1}{2^{1+m}},$$

donde $m \geq 1$ es el exponente de 2 en la descomposición en factores primos del número par $(3x_0 + 1)/2$.

Demostración. Está demostrado dentro de la demostración de la Proposición 4.1.

□

Ejercicio 4.5. Probar que 1 es el único punto fijo de la trasformación T de retorno a los impares.

Proposición 4.6. *Sea $x_0 \in \mathbb{N}_{impares}$ un estado inicial. Sea $T : \mathbb{N}_{impares} \to \mathbb{N}_{impares}$ la transformación de retorno definida en la Definición 4.2.*

a) Si $(3x_0 + 1)/2$ es impar, entonces

$$T(x_0) > x_0$$

b) Si $(3x_0 + 1)/2$ es par, entonces

$$T(x_0) \leq x_0,$$

y la igualdad vale si y solo si $x_0 = 1$

Ejercicio 4.7. Demostrar la Proposición 4.6.

Ahora veremos casos particulares de condiciones iniciales $x_0 > 1$ tan grandes como se quiera en que las trayectorias llegan a 1, y lo hacen muy rápidamente, ya en el primer iterado $T(x_0)$.

Proposición 4.8. *Sea $x_0 \in \mathbb{N}_{impares}$ un estado inicial.*

Si $3x_0 = \sum_{i=0}^{k} 2^i$ para algún natural $k \geq 1$, entonces $T(x_0) = 1$.

Si $x_0 = \sum_{i=0}^{k} 4^i$ para algún natural $k \geq 1$, entonces $T(x_0) = 1$.

Se observa que el número k en la hipótesis de esta proposición puede ser arbitrariamente grande. Entonces la tesis $T(x_0) = 1$ vale para ciertos (no todos) estados iniciales x_0 arbitrariamente grandes.

Ejemplo 4.9. Si $x_0 = 5$ entonces $3x_0 = 15 = 1 + 2 + 2^2 + 2^3$ y $T(x) = (3 \cdot 5 + 1)/2^4 = 1$.

Ejercicio 4.10. Demostrar la proposición 4.8.

5. Dinámica por iterados de T.

En esta sección expondremos algunas propiedades de la dinámica por iteración de la transformación T de retorno a los impares de la transformación de Collatz, definida en la sección anterior.

Proposición 5.1. *Sea $x_0 \in \mathbb{N}_{impares}$ un estado inicial cualquiera. Sea $n = n(x_0) \geq 1$ el exponente de 2 de la descomposición en factores primos del número par $x_0 + 1$.*

a) Entonces $(3/2)^n(x_0 + 1) - 1$ es par.

b) Además, si $n \geq 2$, y si $1 \leq j \leq n - 1$, entonces $T^j(x_0) = (3/2)^j(x_0 + 1) - 1$.

c) Sea $m = m(x_0) \geq 1$ el exponente de 2 de la descomposición en factores primos del número par $(3/2)^n(x_0 + 1) - 1$. Entonces

$$T^n(x_0) = \frac{(3/2)^n(x_0 + 1) - 1}{2^m}.$$

Ejercicio 5.2. Demostrar la Proposición 5.1.

Sugerencia: $(3x + 1)/2 = (3/2)(x + 1) - 1$.

Proposición 5.3. *Sea $x_0 \in \mathbb{N}_{impares}$ un estado inicial cualquiera. Sean $n = n(x_0) \geq 1$ y $m = m(x_0) \geq 1$ los números definidos en la Proposición 5.1.*

a) Si $n \geq 2$, entonces

$$x_0 < T(x_0) < \ldots < T^{n-1}(x_0) > T^n(x_0).$$

b) Si $n = 1$, entonces

$$x_0 \geq T(x_0) = T^n(x_0)$$

y esta desigualdad es estricta si y solo si $x_0 \neq 1$.

Ejercicio 5.4. Demostrar la Proposición 5.3.

De la Proposición 5.3 se deduce que la trayectoria de x_0 por iterados de T no es una sucesión siempre creciente, sino que cada tramo creciente de iterados consecutivos es finito y está seguido de un tramo decreciente, compuesto por al menos un iterado.

Teorema 5.5. *Las trayectorias por la transformación T de retorno a los impares de la transformación de Collatz , o bien alcanzan el valor 1 y por lo tanto se estabilizan en la sucesión constante 1,1,1,..., o bien presentan infinitos cúspides y fondos de valle alternadamente.*

Demostración. Llamemos $n_1 = n(x_0)$ definido en la Proposición 5.1. Obsérvese que, debido a la Proposición 5.3, en el caso $n_1 \geq 2$ el iterado $T^{n_1-1}(x_0)$ es una cúspide.

Consideramos el iterado siguiente $T^{n_1}(x_0) < T^{n_1-1}(x_0)$ (si $x_0 \neq 1$) y lo tomamos como nuevo estado inicial para aplicar la Proposición 5.1. Obtenemos un nuevo número $n(T^{n_1}(x_0)) \geq 1$. Discutamos dos casos: $n(T^{n_1}(x_0))$ o bien es 1, o bien es mayor o igual que 2.

Primer caso: $n(T^{n_1}(x_0)) = 1$. Aplicando la Proposición 5.3 con $T^{n_1}(x_0))$ en lugar de x_0, deducimos que la trayectoria sigue decreciendo. Y, o bien puede seguir decreciendo hasta alcanzar 1, en cuyo caso se estabiliza en el punto fijo $T(1) = 1$, o bien alcanza un fondo de valle $T^{n_1'}(x_0) > 1$. En este último caso aplicamos la Proposición 5.1 con $T^{n_1'}(x_0)$ en lugar de x_0 . Debido a la Proposición 5.3, obtendremos $n(T^{n_1'}(x_0)) \geq 2$ porque si fuera 1, la trayectoria seguiría decreciendo y $T^{n_1'}(x_0)$ no sería fondo de valle. Ahora que $n(T^{n_1'}(x_0)) \geq 2$ se aplica el segundo caso que discutimos a continuación (con n_1' en lugar de n_1) :

Segundo caso: $n(T^{n_1}(x_0)) \geq 2$. Entonces, aplicando la proposición 5.3, deducimos que $T^{n_1}(x_0))$ es un fondo de valle y en el siguiente iterado la órbita empieza a crecer de nuevo hasta llegar a una nueva cúspide, a la cual le aplicamos nuevamente las proposiciones 5.1 y 5.3.

La construcción y discusión anterior se repite indefinidamente, a menos que en algún iterado se alcance el valor 1.

$\square$

Un error conceptual muy extendido es creer que si una trayectoria no es creciente a partir de algún iterado, y siempre presenta tramos decrecientes en el futuro, no puede tender a infinito. Esta idea generalizada es incorrecta. Para comprenderlo, imagínese que una persona camina en línea recta avanzando hacia el infinito. Puede hacerlo dando un paso para adelante atrás del otro, siempre para adelante. Pero también puede hacerlo dando tres pasos para adelante seguidos de dos pasos para atrás, y repetir ese patrón u otro indefinidamente. Siempre que la cantidad acumulada de pasos para adelante sea mayor que la cantidad acumulada de pasos para atrás, la persona avanzará hacia el infinito.

El Teorema 5.5 no implica ningún avance en el problema de demostrar o refutar la conjetura de Collatz. A priori sigue habiendo tres tipos de trayectorias: las que se estabilizan en 1, las que se estabilizan en un ciclo no trivial, y las que son no acotadas.

Proposición 5.6. *Sea $x_0 \in \mathbb{N}_{impares}$ un estado inicial cualquiera. Sean $n = n(x_0) \geq 1$ y $m = m(x_0) \geq 1$ los números definidos en la Proposición 5.1. Entonces*

$$T^n(x_0) = \left(\frac{3}{2}\right)^n \frac{x_0}{2^m} \prod_{j=0}^{n-1} \left(1 + \frac{1}{3x_j}\right).$$

Ejercicio 5.7. Demostrar la Proposición 5.6.

Sugerencia: $(3x + 1)/2 = (3/2)x(1 + (1/3x))$.

Proposición 5.8. *Sea $x_0 \in \mathbb{N}_{impares}$ un estado inicial cualquiera. Sean $n = n(x_0) \geq 1$ y $m = m(x_0) \geq 1$ los números definidos en la Proposición 5.1.*

Si $m \geq n$ y $x_0 \neq 1$, entonces $T^n(x_0) < x_0$.

Ejercicio 5.9. Demostrar la Proposición 5.8.

Sugerencia: Sustituir $(3/2)^n(1/2^m)) = (3/4)^n(1/2^{m-n})$ en la igualdad de la Proposición 5.6. Después observar que si el número impar x no es 1, entonces $(1 + 1/(3x)) < 4/3$.

La Proposicion 5.8, da la condición suficiente $m \geq n$ (que después veremos que no es necesaria) de dominación. En efecto, la tasa de decrecimiento hasta el iterado $T^n(x_0)$ debió predominar frente a la tasa de crecimiento, porque finalmente $T^n(x_0) < x_0$.

Y muestra también la dificultad de los intentos de demostración por inducción completa de la conjetura de Collatz. Esa condición suficiente $m \geq n$ de dominación, con $n = n(x_0)$ y $m = m(x_0)$ definidos en la Proposición 5.1, solo se verifica para una minoría de números impares (aunque se verifica para ciertos números impares arbitrariamente grandes).

Otras condiciones suficientes de dominación, para que la dominación sea alcanzada para iterados siguientes a $T^n(x_0)$ con $n = n(x_0)$, pueden demostrarse considerando, como en la demostración del Teorema 5.5, la suma de los números $n = n(x)$ y $m = m(x)$ para los sucesivos iterados x en los tramos decrecientes existentes entre las cúspides y los fondos de valle de las trayectorias.

Proposición 5.10. *Sea $x_0 \in \mathbb{N}_{impares}$ un estado inicial cualquiera. Sean $n = n(x_0) \geq 1$ y $m = m(x_0) \geq 1$ los números definidos en la Proposición 5.1.*

Si $T^n(x_0) \leq x_0$ entonces $m > n \log_2(3/2)$.

Ejercicio 5.11. Demostrar la Proposición 5.10.

Sugerencia: Sustituir la desigualdad $T^n(x_0) \leq x_0$ en la igualdad de la Proposición 5.6 y tomar logaritmo en base 2.

Siendo $\log_2(3/2) = 0,584962\ldots$ la Proposición 5.10 da la condición necesaria

$$m > n \cdot 0,584962\ldots$$

cuando se tiene la desigualdad $T^n(x_0) < x_0$, es decir la dominación. Obsérvese que esta condición necesaria es diferente de la condición suficiente $m \geq n$ para la dominación (si $x_0 \neq 1$), dada por la Proposición 5.8.

La Proposición 5.10 también da la misma condición necesaria, $m > n \cdot 0,584962\ldots$ cuando se tiene la igualdad $T^n(x_0) = x_0$. Veremos la dificultad que se presenta para probar la inexistencia de ciclos no triviales. Para probar que el único ciclo es el trivial, nos gustaría probar que si $T^n(x_0) = x_0$ entonces se cumple la condición suficiente $m \geq n$ de la Proposición 5.8 para que, o bien $x_0 = 1$ o bien $T^n(x_0) < x_0$.. En efecto, si se cumpliera $m \geq n$, como $T^n(x_0) < x_0$ es falso (porque $T^n(x_0) = x_0$), deduciríamos que $x_0 = 1$.

El problema se encuentra en la brecha entre la condición necesaria $m > n \cdot 0,584962\ldots$, y la suficiente $m \geq n$, ya que m/n podría estar en el intervalo $(0,584962\ldots, 1)$.

Otras condiciones necesarias de dominación, cuando la dominación es alcanzada para iterados siguientes a $T^n(x_0)$ con $n = n(x_0)$, pueden demostrarse considerando, como en la demostración del Teorema 5.5, la suma de los números $n = n(x)$ y $m = m(x)$ para los sucesivos iterados x en los tramos decrecientes existentes entre las cúspides y los fondos de valle de las trayectorias. Llamemos N_r y M_r a estas sumas acumuladas hasta el r-ésimo fondo de valle inclusive. La misma brecha $M_r/N_r \in (0,584962\ldots, 1)$ aparece entre la condición necesaria y la suficiente para la dominación, y obstaculiza demostrar que no existen ciclos no triviales.

Referencias

[1] L. Berg, G. Meinardus: *Functional Equations Connected With The Collatz Problem.*, Results. Math. **25**, 1994, pp. 1-12, https://doi.org/10.1007/BF03323136

[2] L. Collatz *On the motivation and origin of the* $(3n+1)$*-problem*, 1937, reprint in the book: *The Ultimate Challenge: the* $3x+1$ *problem,* J.C. Lagarias (Editor) ISBN 978-0-8218-4940-8 Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 2010, pp. 249–267

[3] J.H. Conway *Unpredictable iterations* In: Proceedings of the Number Theory Conference, Univ. of Colorado, Boulder, 1972, pp. 49–52.

[4] R. Guy: *Don't try to solve these problems.* Amer. Math. monthly **90**, 1983, pp. 35–41.

[5] R. Guy: *Unsolved Problems in Number Theory* (3rd. Edition) ISBN 0-387-20860-7 Springer-Verlag, Berlin-New York, 2004

[6] D.A. Hofstadter: *Gödel, Escher, Bach: An eternal Golden Brain*, ISBN 0-465-02685-0, Perseus Books Group, New York, 1979.

[7] J.C. Lagarias: *The* 3n+1-*problem and its generalizations* Amer. Math. monthly **92** (1), 1985, pp. 3–23

[8] J.C. Lagarias: *Syracuse problem* in Encyclopedia of Mathematics, M. Hazewinkel (Edt.), ISBN 978-1-55608-010-4, Springer, 2001

[9] T. Oliveira e Silva: *Maximum Excursion and stopping time record-holders for the* $3x+1$ *problem: Computational results* Math. Comp. **68** (Num. 225), 1999 , pp. 371-384

[10] C.A. Pikhover: *Wonders of Numbers* Oxford Univ. Press, ISBN 0-19-513342-0, Oxford, 2001.

[11] J. Simons: *On the nonexistence of 2-cycles for the* $3x+1$ *problem* Math. Comp. **74**, 2005, pp. 1565–1572

[12] R.P. Steiner: *A theorem on the Syracuse problem* In: Proceedings 7th Manitoba Converence on Numerical Mathematics, Winnipeg, 1978, pp. 553–559

[13] G.J. Wirsching: *The Dynamical System Generated by the* $3n+1$ *Function.* Lect. Notes in Math., **1681** Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg, 1998