PRIMERA PARTE. FUNCIONES DE VARIABLE COMPLEJA, DERIVACIÓN E INTEGRACIÓN.

Resumen

Se estudian algunas funciones complejas de variable compleja. Se define función holomorfa y se prueban las condiciones de Cauchy-Riemann. Se estudian las funciones reales armónicas en relación con las funciones complejas holomorfas. Se define integración de funciones complejas continuas y se prueban los resultados introductorios referentes al cálculo de las integrales complejas a lo largo de curvas. Se estudian las series de funciones complejas, su convergencia uniforme, y se prueba el teorema de convergencia uniforme e integración de series.

1. Funciones complejas de variable compleja.

1.1. *Notaciones y conceptos previos.*

En lo que sigue: $z = x + iy$ es un número complejo con parte real x y parte imaginaria y.

$\mathbb{C}$ denota el conjunto de los complejos, con su estructura de cuerpo conmutativo con las operaciones de suma y producto entre complejos. También denota al plano complejo $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$, identificando cada complejo $z = x + iy \in \mathbb{C}$ con el punto $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

El módulo de un complejo z es $|z| = \sqrt{(x^2 + y^2)}$.

Se cumple: $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ (llamada propiedad triangular) y además $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$.

El conjugado $\overline{z}$ de un complejo $z = x + iy$ es $\overline{z} = x - iy$.

$D_r(z_0)$ denota al disco abierto de centro z_0 y radio $r > 0$, es decir:

$$D_r(z_0) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r\}$$

$\overline{D_r(z_0)}$ denota al disco cerrado de centro z_0 y radio $r > 0$, es decir:

$$\overline{D_r(z_0)} = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| \leq r\}$$

Ω denota un conjunto abierto no vacío del plano complejo $\mathbb{C}$. Se recuerda que Ω es abierto si para todo z_0 existe un disco $D_r(z_0)$ con $r > 0$, contenido en Ω.

Un conjunto se dice cerrado si su complemento es abierto.

Un conjunto A se dice acotado si está contenido en algún disco $D_k(0)$, es decir $|z| < k, \ \ \forall z \in A$, donde k es alguna constante real positiva.

Un conjunto se dice compacto si es cerrado y acotado.

1.1.1. Curvas o caminos.

$\gamma : z = z(t), \ a \leq t \leq b \subset \mathbb{R}$ denota una curva paramétrica con parametrización $z = z(t) = x(t) + iy(t)$ de variable real t, orientada para t creciente.

Siempre supondremos que γ es C^1 a trozos, es decir $z(t)$ es continua y excepto en una cantidad finita de puntos, existe la derivada $\dot{z}(t)$, que es continua y que tiene límites laterales finitos en los puntos donde no existe. (Nota: $\dot{z}(t)$ se define como $\dot{x}(t) + i\dot{y}(t)$.)

Se dice que la curva $\gamma : z = z(t), a \leq t \leq b$ va del punto z_1 al punto z_2 (o que tiene extremo inicial z_1 y extremo final z_2) si $z(a) = z_1, \ z(b) = z_2$.

Una curva γ parametrizada con $z = z(t), t \in [a, b]$ es cerrada si $z(a) = z(b)$, es decir su extremo inicial es el mismo que su extremo final.

Se denota con γ^* al conjunto de puntos del plano complejo recorridos por la curva γ, es decir γ^* es el recorrido de la parametrización $z = z(t), \ \ t \in [a, b]$ de la curva paramétrica γ. El conjunto γ^* es compacto. Por abuso de lenguaje, se denota $\gamma \subset \Omega$ cuando $\gamma^* \subset \Omega$ y $z \in \gamma$ cuando $z \in \gamma^*$, es decir, cuando la curva γ pasa por el punto z.

Dada una curva γ se define $-\gamma$ como la curva γ orientada en sentido opuesto. Es decir, si $\gamma : z = z(t), \ t \in [a, b]$ está orientada para t creciente, entonces $-\gamma : z = z(-\tau), \ \tau \in [-b, -a]$ está orientada para $t = -\tau$ decreciente.

Dadas dos curvas γ_1 y γ_2 tales que el extremo final de γ_1 es el extremo inicial de γ_2, se define $\gamma_1 + \gamma_2$ como la curva que se obtiene recorriendo γ_1 primero y luego γ_2, en el mismo sentido en que están orientadas ambas.

Dadas dos curvas γ_1 y γ_2 tales que tienen el mismo extremo final se define $\gamma_1 - \gamma_2 = \gamma_1 + (-\gamma_2)$. Es la curva que se obtiene recorriendo γ_1 en el mismo sentido en que está orientada y luego γ_2 en sentido opuesto al que está orientada.

1.1.2. Conexión.

Ω es conexo por definición si no existe una partición de Ω en dos abiertos no vacíos. Es decir $A \cup B = \Omega$, $A \cap B = \emptyset$, A, B abiertos, implica que o bien A o bien B es vacío.

Ω es conexo por caminos si para toda pareja de puntos z_1, z_2 en Ω existe una curva $\gamma \subset \Omega$ que va del punto z_1 a z_2.

Ω abierto es conexo si y solo si es conexo por caminos.

Una región es un abierto conexo y no vacío.

Si Ω es un abierto no vacío, se llama componente conexa de Ω a una región contenida en Ω maximal. Si Ω es conexo él es su única componente conexa. Si Ω es no conexo entonces es unión de una cantidad (que puede ser infinita) de componentes conexas.

1.1.3. Curvas homotópicas y conjuntos simplemente conexos.

Una curva cerrada γ contenida en Ω es homotópica a un punto en Ω si existe una deformación continua de γ que, sin salir de Ω, la transforma en un punto. Es decir existe $z = z_s(t) \in \Omega$ definida para todo $t \in [a, b]$ y para todo $s \in [0, 1]$, que es continua respecto a (s, t), que para cada s fijo es una curva cerrada en Ω, y que para $s = 0$ es la curva γ y para $s = 1$ es una curva constante (igual a un punto). Esa función $z = z_s(t)$ se llama homotopía.

Un abierto Ω es simplemente conexo si es conexo y toda curva cerrada contenida en Ω es homotópica a un punto.

Dos curvas γ_1 y γ_2 contenidas en Ω, ambas con el mismo extremo inicial y ambas con el mismo extremo final, se dicen homotópicas en Ω, si la curva $\gamma_1 - \gamma_2$ es homotópica a un punto en Ω.

1.1.4. Funciones complejas.

$f : \Omega \mapsto \mathbb{C}$ es una función compleja $f = f(z)$ de variable compleja $z \in \mathbb{C}$.

$u(x, y)$ y $v(x, y)$ denotan $Ref(x + iy) = u(x, y)$ y $Imf(x + iy) = v(x, y)$. Entonces $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$

u_x, u_y, v_x, v_y denotan, cuando existen, las derivadas parciales de u y v respecto de x e y respectivamente.

1.1.5. Límite de funciones.

$\lim_{z \to z_0} f(z) = a + bi$ si
$\forall \epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que: $0 < |z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z) - (a + bi)| < \epsilon$.
Equivalentemente, $\lim u(x,y)_{(x,y)\to(x_0,y_0)} = a$ y $\lim v(x,y)_{(x,y)\to(x_0,y_0)} = b$.

$\lim_{z \to \infty} f(z) = a + bi$ si
$\forall \epsilon > 0$ existe $H > 0$ tal que: $|z| > H \Rightarrow |f(z) - (a + bi)| < \epsilon$.
Equivalentemente, $\lim u(x,y) = a$ y $\lim v(x,y) = b$ cuando la variable real $\sqrt{x^2 + y^2} \to +\infty$.

$\lim_{z \to z_0} f(z) = \infty$ si
$\forall K > 0$ existe $\delta > 0$ tal que: $0 < |z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z)| > K$.
Equivalentemente, la función real $|f(z)| = \sqrt{u^2(x,y) + v^2(x,y)} \to +\infty$ cuando $(x,y) \to (x_0,y_0)$.

$\lim_{z \to \infty} f(z) = \infty$ si
$\forall K > 0$ existe $H > 0$ tal que: $|z| > H \Rightarrow |f(z)| > K$.
Equivalentemente, la función real $|f(z)| = \sqrt{u^2(x,y) + v^2(x,y)} \to +\infty$ cuando la variable real $\sqrt{x^2 + y^2} \to +\infty$.

1.1.6. Funciones continuas, C^r y C^∞.

$f : \Omega \mapsto \mathbb{C}$ es continua en $z_0 = x_0 + iy_0 \in \Omega$ si y solo si u y v son continuas en (x_0, y_0).

$f : \Omega \mapsto \mathbb{C}$ es continua en $z_0 \in \Omega$ si y solo si $\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$. Esto se cumple, por definición si para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $|z - z_0| < \delta$ implica $|f(z) - f(z_0)| < \epsilon$.

$f : \Omega \mapsto \mathbb{C}$ se dice continua si lo es en z_0 para todo $z_0 \in \Omega$.

La imagen $f(K)$ por una función continua $f : \Omega \mapsto \mathbb{C}$ de un conjunto compacto $K \subset \Omega$, es compacto.

Por definición se dice que f es C^1 si u y v lo son, es decir si existen y son continuas las derivadas parciales de u y v respecto de x e y. En 2.1.7 se muestra que aunque f sea C^1, f no tiene por qué ser derivable (holomorfa). Esto es porque la definición de derivabilidad de $f(z)$ respecto a la variable compleja z exige no solo la existencia de las derivadas parciales respecto de x e y, sino además que estas cumplan ciertas condiciones llamadas ecuaciones de Cauchy-Riemann.

Por definición se dice que f es C^r si u y v lo son, es decir si existen y son continuas las derivadas parciales de u y v hasta orden r inclusive.

Por definición se dice que f es C^∞ si u y v lo son, es decir si existen y son continuas las derivadas parciales de u y v de orden r, para todo r.

En el apéndice 2.1.7 se muestra que aunque f sea C^∞, f no tiene por qué ser derivable (holomorfa).

1.1.7. Función Exponencial compleja y Argumento.

$e^z = e^x e^{iy} = e^x(\cos y + i \operatorname{sen} y), \ \forall z \in \mathbb{C}$. Es continua, C^∞ y nunca se anula.

Si $z \neq 0$, entonces $arg(z)$ es el conjunto de todos los números reales ϕ tales que $\cos \phi = x/|z|$, $\operatorname{sen} \phi = y/|z|$. Se observa que $arg(z)$ no es una función, ya que para cada $z \neq 0$ le hace corresponder no un valor real, sino un conjunto de infinitos valores reales. Si $\phi_0 \in arg(z)$, entonces

$$arg(z) = \{\phi = \phi_0 + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$$

Se cumple:

$$z = |z|e^{i\phi} \quad \forall z \neq 0, \ \forall \phi \in arg(z)$$

y recíprocamente si $z = re^{i\phi}$, con r y ϕ reales tales que $r > 0$, entonces $r = |z|$ y $\phi \in arg(z)$.

En particular, considerando la definición de $e^z = e^x e^{iy}$, se obtiene para todo complejo z lo siguiente

$$|e^z| = e^x = e^{Re\ z}$$

$$arg\ (e^z) = \{y + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$$

o sea

$$Im\ z \in arg(e^z)$$

Otro resultado conocido es

$$\arg(z_1 z_2) = arg(z_1) + arg(z_2) \qquad |z_1 z_2| = |z_1||z_2|$$

entendiéndose que la suma de los conjuntos $arg(z_1)$ y $arg z_2$ es el conjunto que se obtiene sumando cada número real en el primer conjunto con cada número real de segundo conjunto.

1.1.8. Campos en $\mathbb{R}^2$, teorema de Green y sus corolarios.

Se resume algunos resultados de los cursos de Cálculo Vectorial, que podrán ser útiles para relacionarlos con la Teoría de Cauchy de funciones analíticas:

Un campo en el abierto $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ es una pareja ordenada de funciones $(P(x,y), Q(x,y))$ continuas para todo $(x,y) \in \Omega$. Se define la integral a lo largo de una curva C^1 a trozos $\gamma \subset \Omega : z = z(t), t \in [a,b]$ del campo (P,Q) como

$$\int_\gamma P\,dx + Q\,dy = \int_a^b [P(x(t),y(t))\,\dot{x}(t) + Q(x(t),y(t))\,\dot{y}(t)]\,dt$$

El valor de esa integral es independiente de la parametrización de la curva que preserve la orientación; la integral a lo largo de la curva opuesta $-\gamma$ es el opuesto de la integral a lo largo de γ; y la integral a lo largo de $\gamma_1 + \gamma_2$ es la suma de las integrales a lo largo de γ_1 y de γ_2.

El campo se dice que es C^1 si las funciones P y Q tienen derivadas parciales continuas respecto de x y de y.

Sea el campo (P,Q) de clase C^1 en Ω. Sea $R \subset \Omega$ un abierto acotado tal que ∂R, el borde de R, es por hipótesis una curva o unión finita de curvas de clase C^1 a trozos. Por convención se orienta ∂R de forma que deja a R hacia la izquierda (en sentido antihorario). El teorema de Green afirma que

$$\int_{\partial R} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \iint_R (Q_x - P_y)\,dxdy$$

Si γ es una curva homotópica a un punto en Ω se obtiene en particular el siguiente resultado:

Corolario 1 del Teorema de Green: *Si γ es una curva cerrada homotópica a un punto en Ω y (P,Q) es un campo de clase C^1 en Ω tal que $Q_x - P_y = 0$ para todo $(x,y) \in \Omega$* (estos campos se llaman irrotacionales en Ω), *entonces*

$$\int_\gamma P\,dx + Q\,dy = 0$$

Se llama potencial escalar F de un campo P,Q continuo en Ω, cuando existe, a una función real $F = F(x,y)$ de clase C^1 en Ω y tal que $F_x = P$ y $F_y = Q$ para todo $(x,y) \in \Omega$. Se obtiene el siguiente resultado:

Corolario 2 del Teorema de Green: *Si* Ω *es simplemente conexo y* (P, Q) *es un campo de clase* C^1 *en* Ω *tal que* $Q_x - P_y = 0$ *para todo* $(x, y) \in \Omega$ (estos campos se llaman irrotacionales) *entonces existe potencial escalar* F *del campo en* Ω.

Además para cualquier curva γ *contenida en* Ω *que une el punto* (x_0, y_0) *con el punto* (x, y) *se cumple:*

$$F(x, y) - F(x_0, y_0) = \int_\gamma P\,dx + Q\,dy$$

Advertencia: Para aplicar estos corolarios del Teorema de Green no es suficiente verificar que $Q_x - P_y = 0$ en Ω. Se necesita además que existan P_x y Q_y y que todas las derivadas parciales sean continuas en Ω.

1.2. *Argumento, Logaritmo y Raíz n-ésima.*

1.2.1. Argumento.

Si $z \neq 0$, entonces $arg(z)$ es el conjunto de todos los números reales ϕ tales que $\cos\phi = x/|z|$, $\operatorname{sen}\phi = y/|z|$. Se observa que $arg(z)$ no es una función, ya que para cada $z \neq 0$ le hace corresponder no un valor real, sino un conjunto de infinitos valores reales. Si $\phi_0 \in arg(z)$, entonces

$$arg(z) = \{\phi = \phi_0 + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\} \qquad (1)$$

Se cumple:

$Arg_{[0,2\pi)}(z)$ es el único $\phi_0 \in arg(z)$ tal que $0 \leq \phi_0 < 2\pi$. Es una función real de $z \neq 0$, continua para todo $z \neq 0$ que no pertenezca al semieje real positivo, y discontinua en este semieje con salto finito igual a 2π.

$Arg_{(-\pi,\pi]}(z)$ es el único $\phi_0 \in arg(z)$ tal que $\pi < \phi_0 \leq \pi$. Es una función real de $z \neq 0$, continua para todo $z \neq 0$ que no pertenezca al semieje real negativo, y discontinua en este semieje con salto finito igual a 2π.

Sea dado fijo un real θ_0.

$Arg_{[\theta_0,\theta_0+2\pi)}(z)$ es el único $\phi_0 \in arg(z)$ tal que $\theta_0 \leq \phi_0 < \theta_0 + 2\pi$. Es una función real de $z \neq 0$, continua para todo $z \neq 0$ que no pertenezca a la semirrecta con extremo en el origen y que forma ángulo θ_0 con el semieje real positivo; y discontinua en esta semirrecta con salto finito igual a 2π.

Denotamos con $Arg(z) = Arg_{(-\pi,\pi]}(z)$, función definida para todo $z \neq 0$, discontinua en el semieje real negativo.

Denotamos con $arg(z)$ no a una función, sino al conjunto de valores reales definido en (1), formado por infinitos reales separados uno del siguiente en 2π.

1.2.2. Logaritmo complejo.

Si $z \neq 0$, entonces $log(z)$ es el conjunto de todos los números complejos w tales que $e^w = z$. Se observa que $log(z)$ no es una función, ya que para cada $z \neq 0$ le hace corresponder no un valor complejo w, sino infinitos valores complejos. En efecto para todo $z \neq 0$:

$$w \in log(z) \;\Leftrightarrow\; e^w = z \;\Rightarrow\; e^{Re(w)} = |e^w| = |z|,\; Im(w) \in arg(e^w) = arg(z) \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; Re(w) = L|z|,\; Im(w) \in arg(z)$$

donde $L|z|$ denota el logaritmo neperiano real del número real positivo $|z|$ (esta sí es una función, real de variable real). Pero la condición $Im\ (w) \in arg(z)$ se cumple para infinitos valores de $Im(w)$, por lo tanto hay infinitos complejos $w \in log(z)$ todos con la misma parte real, y con partes imaginarias separadas en múltiplos enteros de 2π. Por lo tanto $log(z)$ no es una función.

Si $\phi_0 \in arg(z)$, entonces

$$log(z) = \{w = L|z| + i(\phi_0 + 2k\pi) : k \in \mathbb{Z}\} \qquad (2)$$

$Log_{[0,2\pi)}(z)$ es el único complejo $w_0 \in log(z)$ tal que $\pi < Im(w_0) \leq \pi$. Es decir:

$$Log_{[0,2\pi)}(z) = L|z| + i(Arg_{(-\pi,\pi]}(z))$$

$Log_{[0,2\pi)}(z)$ es una función real de $z \neq 0$, continua para todo $z \neq 0$ que no pertenezca al semieje real negativo, y discontinua en este semieje con salto finito igual a $i2\pi$.

$Log_{(-\pi,\pi]}(z)$ es el único complejo $w_0 \in log(z)$ tal que $\pi < Im(w_0) \leq \pi$. Es decir:

$$Log_{(-\pi,\pi]}(z) = L|z| + i(Arg_{(-\pi,\pi]}(z))$$

$Log_{(-\pi,\pi]}(z)$ es una función real de $z \neq 0$, continua para todo $z \neq 0$ que no pertenezca al semieje real negativo, y discontinua en este semieje con salto finito igual a $2\pi i$.

Sea dado fijo un real θ_0.

$Log_{[\theta_0,\theta_0+2\pi)}(z)$ es el único complejo $w_0 \in log(z)$ tal que $\theta_0 \leq Im(w_0) < \theta_0 + 2\pi$. Es decir:

$$Log_{[\theta_0,\theta_0+2\pi)}(z) = L|z| + i(Arg_{[\theta_0,\theta_0+2\pi)}(z))$$

$Log_{[\theta_0,\theta_0+2\pi)}(z)$ es una función real de $z \neq 0$, continua para todo $z \neq 0$ que no pertenezca a la semirrecta con extremo en el origen y que forma ángulo θ_0 con el semieje real; y discontinua en esa semirrecta con salto finito igual a $2\pi i$.

Denotamos con $Log(z) = Log_{(-\pi,\pi]}(z)$, función definida para todo $z \neq 0$, discontinua en el semieje real negativo.

Denotamos con $log(z)$ no a una función, sino al conjunto de valores complejos definido en (2), formado por infinitos números complejos, todos en una misma recta vertical, separado uno del siguiente en $i2\pi$.

1.2.3. Raíz n-ésima compleja.

Dado n natural fijo, $n \geq 2$, se define $\sqrt[n]{z}$ como el conjunto de todos los números complejos w tales que $w^n = z$. Se observa que $\sqrt[n]{z}$ no es una función, ya que para cada $z \neq 0$ le hace corresponder no un valor complejo w, sino n valores complejos diferentes. Si $\phi_0 = Arg_{(-\pi,\pi]}(z)$, entonces

$$\sqrt[n]{z} = \{w = |z|^{1/n} e^{i(\phi_0 + 2k\pi/n)} : k \in \mathbb{Z}\}$$

Cuando $z \neq 0$, los n valores complejos de $\sqrt[n]{z}$, obtenidos dando a k los valores $0, 1, \ldots, n-1$ forman los vértices de un polígono regular de n vértices y centro en el origen.

El valor principal de la raíz $n-$ésima de z, denotado como $v.p. \sqrt[n]{z}$, se define como 0 si $z = 0$ y si $z \neq 0$, $v.p. \sqrt[n]{z}$ se define como el único complejo $w_0 \in \sqrt[n]{z}$ tal que $Arg_{(-\pi,\pi]} w_0 = (1/n) Arg_{(-\pi,\pi]} z$. Es decir:

$$v.p. \sqrt[n]{z} = w = |z|^{1/n} e^{i(1/n)(Arg_{(-\pi,\pi]}(z)} \ \ \forall z \neq 0$$

$v.p. \sqrt[n]{z}$ es una función real de $z \neq 0$, continua para todo $z \neq 0$ que no pertenezca al semieje real negativo, y discontinua en este semieje con salto finito igual a $|z|^{1/n} e^{i(2\pi)/n)}$.

1.3. *Compactificación del plano complejo.*

Definición 1.3.1. Se llama *plano complejo compactificado,* denotado como $\overline{\mathbb{C}}$, al conjunto

$$\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$$

donde ∞ debe interpretarse como un objeto cualquiera que no pertenezca al conjunto de los números complejos.

Se llama *entorno de* ∞ *en* $\overline{\mathbb{C}}$*, o disco abierto de centro* ∞ *y radio* $1/R > 0$ al conjunto:

$$D_{1/R}(\infty) = \{\infty\} \cup \{z \in \mathbb{C} : \ |z| > R\}$$

Con esa definición, una función $f : \overline{\mathbb{C}} \mapsto \overline{\mathbb{C}}$ es continua en ∞ si

$$f(\infty) = \lim_{z \to \infty} f(z)$$

y si $f(a) = \infty$, entonces f es continua en a si

$$\lim_{z \to a} f(z) = \infty = f(a)$$

Por ejemplo la función:

$$f(z) = \frac{z+i}{z-i} \ \ \forall z \neq i, \quad f(i) = \infty = \lim_{z \to i} \frac{z+i}{z-i}, \quad f(\infty) = 1 = \lim_{z \to \infty} \frac{z+i}{z-i}$$

es una función continua de $\overline{\mathbb{C}}$ en $\overline{\mathbb{C}}$.

1.3.2. Esfera de Riemann y proyección estereográfica.

Construyamos una representación gráfica de $\overline{\mathbb{C}}$. En lo que sigue hágase un dibujo.

Sea en el espacio $\mathbb{R}^3$ de las ternas ordenadas de reales (x, y, z), el plano $x0y$ identificado con el plano complejo $\mathbb{C}$. Es decir a cada punto $(x, y, 0)$ lo identificamos con el complejo $z = x + iy$.

Consideremos el elemento extraño al plano complejo ∞ que forma $\overline{\mathbb{C}}$, y representémoslo en $\mathbb{R}^3$ como el punto $N = (0, 0, a)$, donde $a \neq 0$ es real. N no está en el plano complejo $x0y = \mathbb{C}$. Para fijar ideas tomemos por ejemplo $a = 2$.

Dibujemos una esfera $\mathbb{E}$ que pase por el punto N y tenga centro en el eje de las z (el centro no puede coincidir con N). Para fijar ideas dibujemos por ejemplo $\mathbb{E}$ centrada en $(0, 0, 1)$. En ese caso la esfera $\mathbb{E}$ pasa por el origen, pero esto no es necesario, es solo un ejemplo.

Esta esfera $\mathbb{E}$ que pasa por el punto $N = (0, 0, a)$, $a \neq 0$, con centro en $(0, 0, b)$, $b \neq a$, se llama *esfera de Riemann* y al punto N se le llama *polo norte.*

Definamos *la proyección estereográfica* $\Pi : \mathbb{E} \mapsto \overline{\mathbb{C}}$. A cada punto $P \in \mathbb{E}$ que no sea el polo norte, le hacemos corresponder un número complejo de la siguiente forma:

$$\Pi(P) = z = (\text{ semirrecta } NP) \cap (\text{ plano } x0y) \ \in \ \mathbb{C} \quad \forall P \neq N, \ \ P \in \mathbb{E}$$

Y al polo norte N le hacemos corresponder el elemento ∞, es decir:

$$\Pi(N) = \infty \ \in \ \overline{\mathbb{C}}, \quad \text{para } N \in \mathbb{E}$$

La proyección estereográfica es invertible, pues está definida su inversa $\Pi^{-1} : \overline{\mathbb{C}} \mapsto \mathbb{E}$:

$$\Pi^{-1}(\infty) = N, \;\; \Pi^{-1}(z) = (\text{ semirrecta } Nz) \cap (\text{ esfera } \mathbb{E}) \quad \forall z \; \in \mathbb{C}$$

Además la proyección Π y su inversa Π^{-1} son continuas. A cualquier disco abierto $D_R(z_0)$ cuando $z_0 \in \mathbb{C}$ la transformación Π^{-1} le hace corresponder biunívocamente un casquete abierto en el esfera $\mathbb{E}$; y al entorno $D_{1/R}(\infty)$ de ∞ en $\overline{\mathbb{C}}$, la transformación Π^{-1} también le hace corresponder biunívocamente un casquete abierto en el esfera $\mathbb{E}$, centrado en su polo norte N.

1.4. *Transformaciones de Moebius o bilineales.*

Definición 1.4.1. Transformación de Moebius o bilineal.
Se llama *transformación de Moebius o bilineal* a una función de $\overline{\mathbb{C}} \mapsto \overline{\mathbb{C}}$ definida como

$$w = \frac{az+b}{cz+d}, \quad \text{con } ad - bc \neq 0$$

donde a, b, c y d son números complejos fijos.

Se sobrentiende en la definición anterior que $w(\infty) = \lim_{z\to\infty}(az+b)/(cz+d)$ y que si $c \neq 0$ entonces $w(c) = \lim_{z\to -d/c}(az+b)/(cz+d) = \infty$.

La condición $ad - bc \neq 0$ se pide para que $w = w(z)$ sea invertible. En efecto, despejando z en función de w, se obtiene la inversa de la transformación de Moebius de la definición 1.4.1:

$$z = \frac{-dw+b}{cw-a}, \quad \text{con } (-d)(-a) - bc \neq 0$$

Hemos probado así la primera de las propiedades de una transformación de Moebius:

Proposición 1.4.2. Inversa de una transformación de Moebius.
Toda transformación de Moebius (del plano compactificado en sí mismo) es invertible y su inversa es otra transformación de Moebius.

Consideremos la composición de dos transformaciones de Moebius:

$$z \mapsto w_1 = \frac{az+b}{cz+d}, \;\; ad-bc \neq 0, \;\; w_1 \mapsto w = \frac{a'w_1+b'}{c'w_1+d'}, \;\; a'd' - b'c' \neq 0$$

La transformación compuesta es:

$$z \mapsto w = \frac{a'((az+b)/(cz+d)) + b'}{c'((az+b)/(cz+d)) + d'} = \frac{a'(az+b) + b'(cz+d)}{c'(az+b) + d'(cz+d)} = \frac{a''z+b''}{c''z+d''} \qquad (1)$$

donde

$$\begin{bmatrix} a'' & b'' \\ c'' & d'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

Como el determinante del producto de dos matrices es el producto de los determinantes, y por hipótesis $ad - bc \neq 0, \;\; a'd' - b'c' \neq 0$ se deduce $a''d'' - b''c'' \neq 0$ y la transformación compuesta (1) es una transformación de Moebius. Hemos probado la siguiente proposición:

Proposición 1.4.3. Composición de transformaciones de Moebius.
La composición de transformaciones de Moebius es una transformación de Moebius.

Ahora analicemos geométricamente cómo actúa una transformación de Moebius:
1er. caso: $c = 0$. Entonces como $ad - bc \neq 0$ se tiene $a \neq 0,\ d \neq 0$. La transformación $w = (a/d)z + (b/d)$ es la composición de:

- Una rotohomotecia dada por $z \mapsto (a/d)z = w_1$.

  En efecto, multiplicar un complejo z variable por un complejo constante $\alpha = (a/d) \neq 0$ es girar el complejo z alrededor del origen un ángulo igual al argumento de α (rotación), y después multiplicar $|z|$ por una constante real positiva igual $|\alpha|$ (homotecia).

- Una traslación dada por $w_1 \mapsto w_1 + (b/d) = w$.

  En efecto, sumar un complejo variable w_1 más un complejo fijo $\beta = (b/d)$ es trasladar el punto w_1 del plano complejo según el vector β.

2do. caso: $c \neq 0$. La transformación $w = (az + b)/(cz + d)$ se puede escribir como

$$w = \frac{a}{c} + \frac{bc - ad}{c^2 z + cd}$$

Es la composición de:

- Una rotohomotecia dada por $z \mapsto (c^2)z = w_1$.
- Una traslación dada por $w_1 \mapsto w_1 + (cd) = w_2$.
- Una transformación llamada *inversión* dada por $w_2 \mapsto 1/w_2 \ = \ w_3$.
- Una rotohomotecia dada por $w_3 \mapsto (bc - ad)w_3 = w_4$.
- Una traslación dada por $w_4 \mapsto (a/c) + w_4 = w$.

Hemos probado lo siguiente:

Proposición 1.4.4. Interpretación geométrica de la transformación de Moebius.
Toda transformación de Moebius es la composición en algún orden, de una cantidad finita de traslaciones, rotohomotecias y quizás una inversión.

Veamos algunas consecuencias de esa interpretación geométrica:

Proposición 1.4.5. Imágenes de rectas y circunferencias.
Toda transformación de Moebius transforma rectas y circunferencias en rectas y circunferencias.

Eso quiere decir que a cada recta le hace corresponder o bien una recta o bien una circunferencia; y a cada circunferencia le hace corresponder o bien una recta o bien una circunferencia.
Demostración:
Las rotaciones, las homotecias y las traslaciones llevan rectas en rectas y circunferencias en circunferencias. Solo resta ver entonces que la inversión $z \mapsto (1/z)$ lleva rectas y circunferencias en rectas y circunferencias.

Sea la ecuación de una recta $mx + my + p = 0$. Podemos escribirla equivalentemente como

$$\beta z + \overline{\beta}\overline{z} + \gamma = 0$$

donde $z = x + iy$, $\beta = (m - in)$, y $\gamma = p$ es real.

Sea la ecuación de una circunferencia (aún siendo el conjunto vacío si el radio es negativo): $qx^2 + qy^2 + mx + ny + p = 0$. Podemos escribirla equivalentemente como

$$\alpha|z|^2 + \beta z + \overline{\beta}\overline{z} + \gamma = 0$$

donde $z = x + iy$, $\alpha = q$ es real, $\beta = (m - in)$, y $\gamma = p$ es real.

Luego:

$$\alpha|z|^2 + \beta z + \overline{\beta}\overline{z} + \gamma = 0 \quad (1)$$

con α y γ constantes reales, y β constante compleja, es la ecuación o bien de una recta o bien de una circunferencia (una recta si $\alpha = 0$, y una circunferencia si $\alpha \neq 0$).

Apliquemos la inversión $z \mapsto (1/z) = w$, $\quad z = 1/w$ a la ecuación (1). Resulta:

$$\alpha\frac{1}{|w|^2} + \beta\frac{1}{w} + \overline{\beta}\frac{1}{\overline{w}} + \gamma = 0$$

que es la ecuación de la imagen de la recta o circunferencia que tenía ecuación (1). Multiplicando por $|w|^2 = w\,\overline{w}$ se obtiene:

$$\alpha + \beta\overline{w} + \overline{\beta}w + \gamma|w|^2 = 0$$

Llamando $\alpha_1 = \gamma$, $\beta_1 = \overline{\beta}$, $\gamma_1 = \alpha$ resulta:

$$\alpha_1|w|^2 + \beta_1 w + \overline{\beta_1}\overline{w} + \gamma_1 = 0$$

con α_1 y γ_1 constantes reales, y β_1 constante compleja. Como vimos antes, esta es la ecuación o bien de una recta o bien de una circunferencia. $\square$

Definición 1.4.6. Transformaciones conformes.

Sea Ω un abierto no vacío del plano complejo $\mathbb{C}$. Una función $f : \Omega \mapsto \mathbb{C}$ se llama *conforme* si preserva la medida de los ángulos y su orientación.

Más precisamente si $\gamma_1 : z = z_1(t)$ y $\gamma_2 : z = z_2(t)$ son dos curvas de clase C^1 contenidas en Ω y que se intersecan en el punto $z_0 = z_1(t_1) = z_2(t_2)$ y tienen vectores tangentes no nulos en ese punto, respectivamente $v_1 = \dot{z}_1(t_1) \neq 0$ y $v_2 = \dot{z}_2(t_2) \neq 0$, entonces:

El ángulo que forman (en el punto $z_0 \in \gamma_1 \cap \gamma_2$) *los vectores tangentes* v_1 *y* v_2 *a las curvas* γ_1 *y* γ_2 *respectivamente, con signo, es igual al ángulo que forman los vectores tangentes a las curvas imágenes de* γ_1 *y* γ_2 *por* f (en el punto $f(z_0) \in f(\gamma_1) \cap f(\gamma_2)$.)

Las curvas imágenes de γ_1 y γ_2 por f son respectivamente $f(\gamma_1) : w = f(z_1(t))$ y $f(\gamma_2) : w = f(z_2(t))$ que se intersecan en el punto $f(z_0) = f(z_1(t_1)) = f(z_2(t_2))$. Se sobrentiende que si f es conforme entonces estas curvas imágenes son también de clase C^1 y sus vectores tangentes en el punto de intersección son no nulos.

1.4.7. Orientación del plano. Una consecuencia de la conformalidad de una transformación f biyectiva y continua, es que preserva la orientación del plano. Esto quiere decir lo siguiente:

Si $\gamma : z = z(t)$, $t \in [a, b]$ es una curva orientada para t creciente que deja una región R del plano hacia su izquierda, entonces la curva imagen $f(\gamma) : w = f(z(t))$, $t \in [a, b]$ orientada para t creciente, deja la región imagen $f(R)$ también hacia su izquierda.

Véase un ejemplo en 1.4.9

Proposición 1.4.8. Conformalidad de las transformaciones de Moebius.
Toda transformación de Moebius es conforme y por lo tanto preserva la orientación del plano.

Veremos una demostración general, no solo aplicable a las transformaciones de Moebius, en 2.2.1.

Ejemplo 1.4.9. Sea la transformación de Moebius:

$$w = \frac{-iz+1}{z-i}$$

Cumple:

$$w(-1) = -1, \;\; w(-i) = 0, \;\; w(i) = \infty$$

Luego lleva la circunferencia que pasa por -1, por $-i$ y por i, a la recta (porque pasa por ∞ en el plano compactificado) que pasa por -1 y por 0.

Transforma entonces la circunferencia $x^2+y^2=1$ en la recta $y=0$. A la región R encerrada por la circunferencia, $R: \; x^2+y^2<1$ la transforma en alguno de los dos semiplanos, o bien $y>0$ o bien $y<0$, limitados por la recta $y=0$.

Para determinar cuál de los dos semiplanos es el correspondiente de R, orientamos la circunferencia borde de R de algún modo, por ejemplo recorriendo en este orden los tres puntos dados: $-1, \; -i, \; i$ (quedó orientada en sentido antihorario). La circunferencia así orientada deja a la región R a la izquierda. Entonces, recorriendo los puntos imágenes en ese mismo orden $-1, \; 0, \; \infty$, se deja a la región imagen $w(R)$ también a la izquierda. Luego $w(R) = \{y>0\}$.

Proposición 1.4.10. Determinación de una transformación de Moebius dados tres puntos y sus imágenes.
Dados tres puntos z_1, z_2 y z_3 diferentes entre sí en $\overline{\mathbb{C}}$ (alguno de ellos puede ser ∞) *y dados tres puntos w_1, w_2 y w_3 diferentes entre sí en $\overline{\mathbb{C}}$* (alguno de ellos puede ser ∞), *existe y es única una transformación de Moebius $w=w(z)$ tal que*

$$w_1 = w(z_1), \;\; w_2 = w(z_2), \;\; w_3 = w(z_3)$$

Demostración:

Primera parte. Primero supongamos que $z_1 = \infty, \quad z_2 = 0 \quad z_3 = 1$. Busquemos una transformación de Moebius

$$w = w(z) = \frac{az+b}{cz+d}, \quad ac-bd \neq 0$$

que cumpla las condiciones del enunciado.

Se debe cumplir:

$$w(\infty) = w_1 = \frac{a}{c}, \qquad w(0) = w_2 = \frac{b}{d}, \qquad w(1) = w_3 = \frac{a+b}{c+d}, \qquad (1)$$

entendiéndose que algún $w_i = \infty$ si y solo sí se anula el denominador correspondiente.

Primer caso: $w_1 = \infty, \; w_2 \neq \infty, w_3 \neq \infty$. Entonces las igualdades (1) son equivalentes a:

$$c=0, \;\; d \neq 0, \;\; b = dw_2, \;\; a = d(w_3 - w_2)$$

Esto determina una y solo una transformación de Moebius, cualquiera sea el valor complejo de $d \neq 0$ que se elija, pues

$$w = \frac{a}{d}z + \frac{b}{d} = (w_3 - w_2)z + w_2$$

Segundo caso: $w_1 \neq \infty,\ w_2 = \infty, w_3 \neq \infty$. Entonces las igualdades (1) son equivalentes a:

$$d = 0, \quad c \neq 0, \quad a = cw_1, \quad b = c(w_3 - w_1)$$

Esto determina una y solo una transformación de Moebius, cualquiera sea el valor complejo de $c \neq 0$ que se elija, pues

$$w = \frac{(a/c)z + (b/c)}{z} = \frac{w_1 z + (w_3 - w_1)}{z}$$

Tercer caso: $w_1 \neq \infty,\ w_2 \neq \infty, w_3 = \infty$. Entonces las igualdades (1) son equivalentes a:

$$c \neq 0, \quad a = cw_1, \quad d = -c, \quad b = dw_2 = -cw_2$$

Esto determina una y solo una transformación de Moebius, cualquiera sea el valor complejo de $c \neq 0$ que se elija, pues

$$w = \frac{(a/c)z + (b/c)}{z + (d/c)} = \frac{w_1 z - w_2}{z - 1}$$

Cuarto caso: $w_1 \neq \infty,\ w_2 \neq \infty, w_3 \neq \infty$. Entonces las igualdades (1) son equivalentes a:

$$c \neq 0, \quad a = cw_1, \quad d = c\frac{w_3 - w_1}{w_2 - w_3}, \quad b = c\frac{(w_3 - w_1)w_2}{w_2 - w_3}$$

Esto determina una y solo una transformación de Moebius, cualquiera sea el valor complejo de $c \neq 0$ que se elija, pues

$$w = \frac{(a/c)z + (b/c)}{z + (d/c)} = \frac{w_1(w_2 - w_3)z + w_2(w_3 - w_1)}{(w_2 - w_3)z + (w_3 - w_1)}$$

Hemos probado que cualesquiera sean $w_1,\ w_2,\ w_3$ dados en $\overline{\mathbb{C}}$ y distintos entre sí, existe una única transformación de Moebius tal que

$$w(\infty) = w_1, \quad w(0) = w_2, \quad w(1) = w_3$$

Segunda parte: Ahora probemos el caso general enunciado en la proposición.

Dados z_1, z_2, z_3 distintos entre sí en $\overline{\mathbb{C}}$, por lo demostrado antes, existe única transformación de Moebius f tal que

$$f(\infty) = z_1, \quad f(0) = z_2, \quad f(1) = z_3$$

Consideremos la inversa de f. Es la única transformación de Moebius que lleva z_1, z_2 y z_3 respectivamente a $\infty, 0$ y 1.

Por otro lado, dados w_1, w_2, w_3 distintos entre sí en $\overline{\mathbb{C}}$, según lo demostrado antes, existe única transformación de Moebius g tal que

$$g(\infty) = w_1, \quad g(0) = w_2, \quad g(1) = w_3 \quad (2)$$

Luego la transformación compuesta

$$h = g \circ f^{-1}$$

(que es una transformación de Moebius por ser composición de dos transformaciones de Moebius), lleva z_1, z_2, z_3 a w_1, w_2, w_3 respectivamente. Hemos demostrado la existencia.

Ahora probemos la unicidad de h. Si h_1 es una transformación de Moebius que lleva z_1, z_2, z_3 a w_1, w_2, w_3 respectivamente, entonces consideramos la transformación compuesta $g_1 = h_1 \circ f$, donde f es la transformación de Moebius que lleva $\infty, 0, 1$ a z_1, z_2, z_3. La transformación g_1 es una transformación de Moebius que lleva $\infty, 0, 1$ a w_1, w_2, w_3 respectivamente. Pero por lo visto en la primera parte, esta transformación en única. Luego $g_1 = g$, donde g es la construida en (2). Entonces $g = h_1 \circ f$ de donde se deduce que $h_1 = g \circ f^{-1}$. Por lo tanto h_1 coincide con la transformación $h = g \circ f^{-1}$ construida antes, probando la unicidad. $\square$