Integrales paramétricas e integrales dobles y triples.

Eleonora Catsigeras *

19 de julio de 2006

Notas para el curso de Cálculo II
de la Facultad de Ingeniería.

PRÓLOGO:

Este texto es complementario al libro de Burgos sobre funciones de varias variables (referencia [1] de la Bibliografía al final de este texto). Fue escrito para ser estudiado después de los capítulos 1, 2 y 3 del libro de Burgos y antes de su capítulo 4.

Está dirigido a estudiantes universitarios de grado de las carreras de Ingeniería que están cursando Cálculo II.

Se supone conocidos el Cálculo Diferencial e Integral de funciones reales de una variable real (curso de Cálculo I) y el Cálculo Diferencial de funciones reales de varias variables (los primeros tres capítulos del libro de Burgos).

Los objetivos de este texto son:

- Estudiar las integrales simples paramétricas (continuidad y derivabilidad respecto al parámetro).
- Introducir el tema de integrales dobles y triples, como integrales iteradas de funciones continuas, antes de estudiar las mismas como integrales de Riemann.
- Dar ejemplos resueltos de cálculo de integrales dobles y triples, y del cálculo de áreas y volúmenes.

El texto está dividido en seis secciones temáticas que no son independientes, sino que cada una presupone conocido el contenido de las anteriores.

Para seguir el texto es imprescindible dibujar figuras. Pedimos disculpas por no incluir las figuras en estas notas.

*Instituto de Matemática y Estadística Rafael Laguardia (IMERL), Fac. Ingenieria. Universidad de la República. Uruguay. Address: Herrera y Reissig 565. Montevideo. Uruguay.

Índice

1. Integrales paramétricas.

1.1. Integrales paramétricas con límites de integración independientes.

1.1.1. Límites de integración constantes.

Sea $R = [a,b] \times [c,d]$ el rectángulo $\{a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$ contenido en $\mathbb{R}^2$, donde $a < b,\ c < d$ son números reales fijos.

Sea $f(x,y)$ continua para todo $(x,y) \in R$.

Para cada segmento vertical $x = x_0$ fijo, con $x_0 \in [a,b]$ (hacer figura) se considera la integral $\int_c^d f(x_0,y)\,dy$, de $f(x_0,y)$ respecto de y en el intervalo $[c,d]$, como función de una sola variable y (con x_0 constante). Es un número real, que depende del valor constante x_0 que se haya elegido en $[a,b]$. Llamémosle entonces $F(x_0)$, y definamos:

Definición 1.1.2. Integral paramétrica con límites de integración constantes.

Dada $f(x,y)$ continua $\forall\,(x,y) \in [a,b] \times [c,d]$ su integral respecto de y en el intervalo $[c,d]$ (tomando, mientras se integra respecto de y, un valor constante para x en el intervalo $[a,b]$) es:

$$F(x) = \int_c^d f(x,y)\,dy$$

y se llama *Integral paramétrica de parámetro x (fijo), con límites de integración (c y d) constantes.*

Ejemplo 1.1.3. Sea $f(x,y) = 3(x+y)^2\ \forall\,(x,y) \in [a,b]\times[c,d]$. La integral paramétrica con límites de integración c, d y con parámetro x, es:

$$F(x) = \int_c^d 3(x+y)^2\,dy = \int_c^d (3x^2 + 6xy + 3y^2)\,dy$$

$$F(x) = 3x^2 y + 6x\frac{y^2}{2} + 2\frac{y^3}{3}\Big|_{y=c}^{y=d}$$

$$F(x) = 3x^2(d-c) + 3x(d^2-c^2) + (d^3-c^3) \qquad (1)$$

Teorema 1.1.4. Continuidad y derivabilidad de la integral paramétrica con límites de integración constantes.

Sea $f(x,y)$ continua $\forall\,(x,y) \in [a,b] \times [c,d]$, y sea la integral paramétrica

$$F(x) = \int_c^d f(x,y)\,dy$$

Se cumple:

a) $F(x)$ es una función continua de x para todo $x \in [a,b]$.

b) Si además la derivada parcial $\partial f(x,y)/\partial x$ existe y es continua en $(a,b) \times [c,d]$, entonces $F(x)$ es derivable para todo $x \in (a,b)$, su derivada $F'(x)$ existe y es continua, y verifica la siguiente igualdad para todo $x \in (a,b)$:

$$F'(x) = \int_c^d \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\,dy$$

Demostración: Se verá junto a la demostración del teorema 1.1.8.

1.1.5. Límites de integración variables.

Sea como en el párrafo 1.1.1, el rectángulo $R = [a, b] \times [c, d]$ y $f(x, y)$ continua para todo $(x, y) \in R$.

Sean dadas dos variables reales independientes ϕ, ψ ambas tomando valores en el intervalo $[c, d]$. Para cada valor fijo de la terna $(x, \phi, \psi) \in [a, b] \times [c, d] \times [c, d]$ consideremos la integral $\int_\phi^\psi f(x, y)\, dy$, integrando respecto de y, como función de una sola variable y (con x constante). Esta integral es un número real, que depende del valor constante x que se haya elegido en $[a, b]$, y que depende también de los valores ϕ y ψ dados a los límites de integración[1] dentro del intervalo $[c, d]$. Llamémosle $H(x, \phi, \psi)$, y definamos:

Definición 1.1.6. Integral paramétrica con límites de integración variables.
Dada $f(x, y)$ continua $\forall\, (x, y) \in [a, b] \times [c, d]$, y dados valores reales ϕ y ψ en el intervalo $[c, d]$, la integral respecto de y (tomando, mientras se integra respecto de y, un valor constante para x en el intervalo $[a, b]$), con límites de integración ϕ y ψ es:

$$H(x, \phi, \psi) = \int_\phi^\psi f(x, y)\, dy$$

y se llama *Integral paramétrica de parámetro x y límites de integración ϕ y ψ.*

Ejemplo 1.1.7. Sea $f(x, y) = 3(x + y)^2 \ \forall\, (x, y) \in [a, b] \times [c, d]$. La integral paramétrica de f respecto de y con límites de integración ϕ, ψ y con parámetro x, es, aplicando la fórmula (1) del ejemplo 1.1.3:

$$H(x, \phi, \psi) = \int_\phi^\psi 3(x + y)^2\, dy = 3x^2(\psi - \phi) + 3x(\psi^2 - \phi^2) + (\psi^3 - \phi^3) \qquad (2)$$

Teorema 1.1.8. Continuidad y derivabilidad de la integral paramétrica con límites de integración variables.
Sea $f(x, y)$ continua $\forall\, (x, y) \in [a, b] \times [c, d]$, y sea la integral paramétrica

$$H(x, \phi, \psi) = \int_\phi^\psi f(x, y)\, dy \quad \forall\, (x, \phi, \psi) \in [a, b] \times [c, d] \times [c, d]$$

Se cumple:
a) *$H(x, \phi, \psi)$ es una función continua $\forall\, (x, \phi, \psi) \in [a, b] \times [c, d] \times [c, d]$.*
b) *Las derivadas parciales de $H(x, \phi, \psi)$ respecto de ϕ y ψ, existen y son continuas para todo $(x, \phi, \psi) \in [a, b] \times (c, d) \times (c, d)$, y verifican las siguientes igualdades:*

$$\frac{\partial H(x, \phi, \psi)}{\partial \psi} = f(x, \psi)$$

$$\frac{\partial H(x, \phi, \psi)}{\partial \phi} = -f(x, \phi)$$

[1] No es necesario que se cumpla $\phi \leq \psi$.

c) *Si además la derivada parcial $\partial f(x,y)/\partial x$ existe y es continua en $(a,b)\times[c,d]$, entonces la derivada parcial de $H(x,\phi,\psi)$ respecto de x, existe y es continua para todo $(x,\phi,\psi)\in(a,b)\times[c,d]\times[c,d]$ y verifica la siguiente igualdad:*

$$\frac{\partial H(x,\phi,\psi)}{\partial x}=\int_{\phi}^{\psi}\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\,dy$$

d) *En las hipótesis de la parte* **c)**, *la función $H(x,\phi,\psi)$ es diferenciable $\forall\,(x,\phi,\psi)\in(a,b)\times(c,d)\times(c,d)$.*

Demostración de los teoremas 1.1.4 y 1.1.8: Observemos primero que el teorema 1.1.4 se obtiene de aplicar las partes a) y c) del teorema 1.1.8, usando $\phi=c,\ \psi=d$, como caso particular.

Prueba de la parte a) del teorema 1.1.8: Probaremos que H es uniformemente continua en su dominio, que es el conjunto $M=[a,b]\times[c,d]\times[c,d]$.

Por la definición de continuidad uniforme, dado $\epsilon>0$ habrá que probar que existe $\delta>0$ tal que

$$(x,\phi,\psi)\in M,\ (x_0,\phi_0,\psi_0)\in M,\ ||(x,\phi,\psi)-(x_0,\phi_0,\psi_0)||<\delta \quad\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\quad |H(x,\phi,\psi)-H(x_0,\phi_0,\psi_0)|<\epsilon\ \text{ (a probar)}\qquad(1)$$

Tomemos un valor de $\epsilon^*>0$, cuya elección se especificará después.

Por ser $f(x,y)$ continua en el rectángulo compacto $R=[a,b]\times[c,d]$, es uniformemente compacto en R. Luego, existe $\delta_1>0$ tal que

$$(x,y)\in R,\ (x_0,y)\in R,\ ||(x,y)-(x_0,y)||=|x-x_0|<\delta_1 \quad\Rightarrow\quad |f(x,y)-f(x_0,y)|<\epsilon^*\qquad(2)$$

Acotemos ahora $H(x,\phi,\psi)-H(x_0,\phi,\psi)$:

$$|H(x,\phi,\psi)-H(x_0,\phi,\psi)|=\left|\int_{\phi}^{\psi}f(x,y)-f(x_0,y)\,dy\right|\le\left|\int_{\phi}^{\psi}|f(x,y)-f(x_0,y)|\,dy\right|\qquad(3)$$

Sustituyendo (2) en (3) se obtiene:

$$|x-x_0|<\delta_1\quad\Rightarrow\quad|H(x,\phi,\psi)-H(x_0,\phi,\psi)|\le\left|\int_{\phi}^{\psi}\epsilon^*\,dy\right|=\epsilon^*\cdot|\psi-\phi|\qquad(4)$$

Siendo ψ y ϕ reales del intervalo $[c,d]$, se cumple $|\psi-\phi|\le(d-c)$, y por lo tanto de (4) se deduce:

$$|x-x_0|<\delta_1\quad\Rightarrow\quad|H(x,\phi,\psi)-H(x_0,\phi,\psi)|\le\epsilon^*\cdot(d-c)\qquad(5)$$

Por otro lado, llamando M al máximo de $|f(x,y)|$ en el rectángulo compacto R (tal M existe porque por hipótesis f es una función continua en el compacto R), se obtiene:

$$|H(x_0,\phi,\psi)-H(x_0,\phi_0,\psi_0)|=\left|\int_{\phi}^{\psi}f(x_0,y)\,dy-\int_{\phi_0}^{\psi_0}f(x_0,y)\,dy\right|=$$

$$=\left|\int_{\phi}^{\phi_0}f(x_0,y)\,dy+\int_{\psi_0}^{\psi}f(x_0,y)\,dy\right|\le M\cdot|\phi-\phi_0|+M\cdot|\psi-\psi_0|\qquad(6)$$

En la igualdad del medio de (6) hemos usado que la integral de una función entre ϕ y ψ es igual a la integral de la misma función entre ϕ y ϕ_0, más la integral entre ϕ_0 y ψ_0, más la integral entre ψ_0 y ψ.

Eligiendo $\delta_2 = \epsilon^*/(2M)$, se deduce de (6):

$$|\phi - \phi_0| < \delta_2, \ \ |\psi - \psi_0| < \delta_2 \qquad \Rightarrow \qquad |H(x_0, \phi, \psi) - H(x_0, \phi_0, \psi_0)| \leq 2M\delta_2 = \epsilon^* \quad (7)$$

Aplicando la propiedad triangular del valor absoluto, y las desigualdades (5) y (7), se obtiene:

$$|H(x, \phi, \psi) - H(x_0, \phi_0, \psi_0)| \leq |H(x, \phi, \psi) - H(x_0, \phi, \psi)| + |H(x_0, \phi, \psi) - H(x_0, \phi_0, \psi_0)| \leq$$

$$\leq \epsilon^*(d - c) + \epsilon^* = \epsilon^*(1 + d - c) < \epsilon \quad (8)$$

donde, dado $\epsilon > 0$ se eligió cualquier $\epsilon^* > 0$ menor que $\epsilon/(1 + d - c)$.

La desigualdad (8) vale para toda pareja de puntos (x, ϕ, ψ) y (x_0, ϕ_0, ψ_0) en M tales que $|x - x_0| < \delta_1$, $|\phi - \phi_0| < \delta_2$ y $|\psi - \psi_0| < \delta_2$.

Si se llama $\delta > 0$ al menor entre los números positivos δ_1 y δ_2 se deduce de (8) lo siguiente:

$$(x, \phi, \psi) \in M, \ (x_0, \phi_0, \psi_0) \in M, \ \ ||(x, \phi, \psi) - (x_0, \phi_0, \psi_0)|| < \delta \qquad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \qquad |H(x, \phi, \psi) - H(x_0, \phi_0, \psi_0)| < \epsilon$$

Esta última es la afirmación (1) que queríamos probar.

Prueba de la parte b) del teorema 1.1.8:

Sea, para $x \in [a, b]$ fijo, y para $\phi \in [c, d]$ también fijo, la función:

$$F(Y) = \int_{\phi}^{Y} f(x, y)\, dy$$

donde el extremo de integración superior Y es variable en el intervalo (c, d). Por el teorema fundamental del cálculo integral en una variable real y, se sabe que $F(Y)$ es una primitiva de $f(x, Y)$ respecto de la variable Y. (Recordar que aquí x es una constante.) Es decir, $F(Y)$ es derivable respecto de Y, y su derivada es

$$F'(Y) = f(x, Y) \ \ \forall\, Y \in (c, d) \qquad (9)$$

Observemos que, por construcción de la función $H(x, \phi, \psi)$, se cumple lo siguiente:

$$F(Y) = H(x, \phi, Y)\ \forall\, Y \in (c, d) \ \ \Rightarrow \ \ F'(Y) = \frac{\partial H(x, \phi, Y)}{\partial Y}\ \forall\, Y \in (c, d) \quad (10)$$

Por lo tanto, reuniendo (9) y (10), y usando $Y = \psi$ se obtiene:

$$\frac{\partial H(x, \phi, \psi)}{\partial \psi} = f(x, \psi) \quad \forall\, (x, \phi, \psi) \in [a, b] \times [c, d] \times (c, d)$$

Esta última es la primera de las igualdades que queríamos probar. La igualdad anterior implica que existe la derivada parcial de H respecto de ψ y es continua, porque f es por hipótesis una función continua.

Sea ahora, para $x \in [a,b]$ fijo, y para $\psi \in [c,d]$ también fijo, la función:

$$G(Y) = \int_Y^{\psi} f(x,y)\, dy = -\int_{\psi}^{Y} f(x,y)\, dy =$$

$$G(Y) = \int_{\psi}^{Y} -f(x,y)\, dy$$

donde el extremo de integración Y es variable en el intervalo (c,d).

Por el teorema fundamental del cálculo integral en una variable real y, se sabe que $G(Y)$ es una primitiva de $-f(x,Y)$ respecto de la variable Y. (Recordar que aquí x es una constante.) Es decir, $G(Y)$ es derivable respecto de Y, y su derivada es

$$G'(Y) = -f(x,Y) \ \ \forall Y \in (c,d) \qquad (11)$$

Observemos que, por construcción de la función $H(x,\phi,\psi)$, se cumple lo siguiente:

$$G(Y) = H(x,Y,\psi)\ \forall Y \in (c,d) \ \ \Rightarrow \ \ G'(Y) = \frac{\partial H(x,Y,\psi)}{\partial Y}\ \forall Y \in (c,d) \qquad (12)$$

Por lo tanto, reuniendo (11) y (12), y usando $Y = \phi$ se obtiene:

$$\frac{\partial H(x,\phi,\psi)}{\partial \phi} = -f(x,\psi) \quad \forall\, (x,\phi,\psi) \in [a,b] \times (c,d) \times [c,d]$$

Esta última es la segunda de las igualdades que queríamos probar. La igualdad anterior implica que existe la derivada parcial de H respecto de ϕ y es continua, porque f es por hipótesis una función continua.

Prueba de la parte c) del teorema 1.1.8:

Basta demostrar que para todo $x_0 \in (a,b)$ fijo, y para todo $(\phi,\psi) \in [c,d] \times [c,d]$ fijos, se cumple:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{H(x,\phi,\psi) - H(x_0,\phi,\psi)}{x - x_0} = \int_{\phi}^{\psi} \left. \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} \right|_{x=x_0} dy \qquad (13)$$

En efecto, si probamos la igualdad (13), por definición de derivada parcial como límite de cociente incremental, deducimos que existe la derivada parcial $\partial H/\partial x$ de H respecto de x, en $x = x_0$; y que cumple la igualdad de la tesis c) que queríamos probar. Además, como es $\partial H/\partial x$ igual a la integral paramétrica de una función continua (en este caso $\partial f(x,y)/\partial x$, entonces, por la parte a) ya probada, es $\partial H/\partial x$ continua.

Ahora probemos (13). Sabiendo que $H(x,\phi\psi) = \int_{\phi}^{\psi} f(x,y)\, dy$, sustituyendo en (13) deducimos que basta probar lo siguiente:

Dado $\epsilon > 0$ probar que existe $\delta > 0$ tal que:

$$|x - x_0| < \delta \quad \Rightarrow \quad \left| \frac{\int_{\phi}^{\psi} (f(x,y) - f(x_0,y))\, dy}{x - x_0} - \int_{\phi}^{\psi} \left. \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} \right|_{x=x_0} dy \right| < \epsilon \quad \text{(a probar)} \qquad (14)$$

En efecto:

$$\left| \frac{\int_\phi^\psi (f(x,y) - f(x_0,y))\, dy}{x - x_0} - \int_\phi^\psi \frac{\partial f(x_0,y)}{\partial x}\, dy \right| \leq \int_\phi^\psi \left| \frac{f(x,y) - f(x_0,y)}{x - x_0} - \frac{\partial f(x_0,y)}{\partial x} \right| dy \qquad (15)$$

Por el teorema del valor medio del cálculo diferencial para funciones de dos variables, existe un punto intermedio ξ entre x_0 y x tal que:

$$\frac{f(x,y) - f(x_0,y)}{x - x_0} = \frac{\partial f(\xi,y)}{\partial x}, \quad \xi = x_0 + t(x - x_0), \quad t \in [0,1]$$

Luego, sustituyendo en el segundo miembro de la desigualdad (15):

$$\left| \frac{\int_\phi^\psi (f(x,y) - f(x_0,y))\, dy}{x - x_0} - \int_\phi^\psi \frac{\partial f(x_0,y)}{\partial x}\, dy \right| \leq$$

$$\leq \int_\phi^\psi \left| \frac{\partial f(\xi,y)}{\partial x} - \frac{\partial f(x_0,y)}{\partial x} \right| dy, \quad \xi = x_0 + t(x - x_0), \quad t \in [0,1] \qquad (16)$$

Tomemos un intervalo cerrado $[a', b']$, tal que $x_0 \in [a', b'] \subset (a, b)$. Como por hipótesis la función $\partial f(x,y)/\partial x$ es continua en el compacto $R' = [a', b'] \times [c, d]$, es uniformemente continua en él. Por lo tanto, para todo $\epsilon^* > 0$ existe $\delta > 0$ (independiente de x, y), tal que:

$$(\xi, y) \in R', \ (x_0, y) \in R', \ \ |\xi - x_0| < \delta \quad \Rightarrow \quad \left| \frac{\partial f(\xi,y)}{\partial x} - \frac{\partial f(x_0,y)}{\partial x} \right| < \epsilon^* \qquad (17)$$

Si elegimos x tal que $|x - x_0| < \delta$, entonces para $\xi = x_0 + t(x - x_0), \ t \in [0,1]$, se cumple:

$$|x - x_0| < \delta; \ \Rightarrow \ |\xi - x_0| = |t(x - x_0)| = |t||x - x_0| < 1 \cdot \delta = \delta$$

Por lo tanto se puede aplicar (17). Sustituyendo (17) en el segundo miembro de la desigualdad (16), se deduce:

$$|x - x_0| < \delta \quad \Rightarrow$$

$$\left| \frac{\int_\phi^\psi (f(x,y) - f(x_0,y))\, dy}{x - x_0} - \int_\phi^\psi \frac{\partial f(x_0,y)}{\partial x}\, dy \right| \leq \int_\phi^\psi \epsilon^*\, dy \leq \epsilon^* |\psi - \phi| \leq \epsilon^* \cdot (d - c) < \epsilon \qquad (18)$$

Al final de la desigualdad (18) se usó que ϕ y ψ están en el intervalo $[c, d]$, y por lo tanto distan menos que la longitud $d - c$ de ese intervalo. También se eligió, dado $\epsilon > 0$, un valor de $\epsilon^* > 0$ menor que $\epsilon/(d - c)$.

Se observa que la afirmación (18) es la misma (14) que queríamos probar.

Prueba de la parte d) del teorema 1.1.8: Según lo probado en las partes b) y c) las tres derivadas parciales de H existen y son continuas para todo $(x, \phi, \psi) \in (a, b) \times (c, d) \times (c, d)$. Si una función real de tres variables tiene sus tres derivadas parciales continuas en un abierto, entonces es diferenciable en todos los puntos de ese abierto. Por lo tanto H es diferenciable en $(a, b) \times (c, d) \times (c, d)$, como queríamos demostrar. $\square$

Ejemplo 1.1.9. Retomando la igualdad (2) del ejemplo 1.1.7, con $f(x,y) = 3(x^2+y^2)$, teníamos:

$$H(x,\phi,\psi) = 3x^2(\psi-\phi) + 3x(\psi^2-\phi^2) + (\psi^3-\phi^3) \qquad (2)$$

Denotando con H_x, H_ϕ, H_ψ a las tres derivadas parciales de $H(x,\phi,\psi)$, respecto de x, de ϕ y de ψ respectivamente, resulta de (2):

$$H_x = 6x(\psi-\phi) + 3(\psi^2-\phi^2) \quad (3)$$

Por otro lado, usando la parte b) del teorema 1.1.8 se obtiene:

$$H_x = \int_\phi^\psi \frac{\partial\, 3(x+y)^2}{\partial x}\, dy =$$

$$= \int_\phi^\psi 6(x+y)\, dy = 6xy + 6\frac{y^2}{2}\Big|_{y=\phi}^{y=\psi} = 6x(\psi-\phi) + 3(\psi^2-\phi^2)$$

Este resultado coincide con el encontrado en (3).

Por un lado usando la igualdad (2) se obtiene

$$H_\psi = 3x^2 + 6x\psi + 3\psi^2 = 3(x+\psi)^2, \quad H_\phi = -3x^2 - 6x\phi + -3\phi^2 = -3(x+\phi)^2 \quad (4)$$

Por otro lado, usando la parte b) del teorema 1.1.8 se obtiene:

$$H_\psi = 3(x+y)^2\big|_{y=\psi} = 3(x+\psi)^2, \quad H_\phi = -3(x+y)^2\big|_{y=\phi} = -3(x+\phi)^2 \quad (5)$$

los resultados de (5) son los mismos encontrados en (4).

1.2. Integrales paramétricas con límites de integración dependientes del parámetro.

Ahora consideraremos los límites de integración dependientes del parámetro x:

Sea como en los párrafos 1.1.1 y 1.1.5, el rectángulo $R = [a,b] \times [c,d]$.

Sean dadas dos funciones reales continuas $\phi, \psi : [a,b] \mapsto [c,d]$ y usemos los resultados vistos hasta ahora usando $\phi = \phi(x)$, $\psi = \psi(x)$ como límites de integración. (Tomaremos para fijar ideas $\phi(x) \le \psi(x)$ para todo $x \in [a,b]$).

Consideremos el dominio D contenido en el rectángulo $[a,b] \times [c,d]$ dado por la siguiente condición:

$$D = \{a \le x \le b,\ \phi(x) \le y \le \psi(x)\}$$

Hacer figura: En el plano (x,y) dibujar el rectángulo $[a,b] \times [c,d]$, y en él las gráficas de las funciones $y = \phi(x)$ y $y = \psi(x)$ cuando $x \in [a,b]$, cumpliendo $\phi(x) \le \psi(x)$. Entonces D es la región comprendida entre esas gráficas, que se proyecta en el eje de las x sobre el intervalo $[a,b]$. Está formada por la unión de "bastones" verticales (es decir segmentos de recta verticales), con abscisa x constante, con extremo inferior de ordenada $\phi(x)$ y extremo superior de ordenada $\psi(x)$. Al variar x en el intervalo $[a,b]$ este segmento vertical barre el dominio D.

Sea dada una función $f(x,y)$ continua para todo $(x,y) \in D$.

Para cada valor fijo de $x \in [a,b]$ tomemos la terna $(x, \phi(x), \psi(x)) \in [a,b] \times [c,d] \times [c,d]$ Ahora no son las tres variables (x, ϕ, ψ) independientes entre sí, sino que las dos últimas dependen de la primera. Consideremos la integral $\int_{\phi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\, dy$, integrando respecto de y, como función de una sola variable y (con x constante). Esta integral es un número real. Llamémosle $F(x)$, y definamos:

Definición 1.2.1. Integral paramétrica con límites de integración variables dependientes del parámetro.

Sean dadas dos funciones continuas[2] $\phi = \phi(x)$ y $\psi = \psi(x)$ del intervalo [a,b] al intervalo $[c,d]$, y sea dada $f(x,y)$ continua $\forall\,(x,y) \in D = \{x \in [a,b], y \in I(x)\}$, donde $I(x)$ es el segmento vertical de extremos $(x, \phi(x))$, $(x, \psi(x))$.

Consideremos la integral de $f(x,y)$ respecto de y (tomando, mientras se integra respecto de y, un valor constante para x en el intervalo $[a,b]$), con límites de integración $\phi(x)$ y $\psi(x)$:

$$F(x) = H(x, \phi(x), \psi(x)) = \int_{\phi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\, dy$$

A $F(x)$, definida por la fórmula anterior, se le llama *integral paramétrica de parámetro x y límites de integración $\phi(x)$ y $\psi(x)$.*

(Observación: En esta definición, la función H es la definida en 1.1.6.)

Observación: Un caso particular es cuando las funciones ϕ y ψ son constantes $\phi(x) = c, \quad \psi(x) = d$ para todo $x \in [a,b]$. En ese caso la función $F(x)$ definida en 1.2.1 coincide con la función $F(x)$ definida en 1.1.2.

Ejemplo 1.2.2. Sea $f(x,y) = 3(x+y)^2 \;\forall\,(x,y) \in [a,b] \times [c,d]$. La integral paramétrica de f respecto de y con límites de integración $\phi = 2x, \psi = x^3$ es, aplicando la fórmula (2) del ejemplo 1.1.7:

$$F(x) = \int_{2x}^{x^3} 3(x+y)^2\, dy = 3x^2(x^3 - 2x) + 3x(x^6 - 4x^2) + (x^9 - 8x^3) = x^9 + 3x^7 + 3x^5 - 26x^3 \qquad (6)$$

Teorema 1.2.3. Continuidad y derivabilidad de la integral paramétrica con límites de integración dependientes del parámetro.

Sean dadas dos funciones continuas $\phi = \phi(x)$ y $\psi = \psi(x)$ del intervalo $[a,b]$ al intervalo $[c,d]$, y sea dada $f(x,y)$ continua $\forall\,(x,y) \in D = \{x \in [a,b], y \in I(x)\}$, donde $I(x)$ es el segmento vertical de extremos $(x, \phi(x))$, $(x, \psi(x))$.

Sea la integral paramétrica

$$F(x) = H(x, \phi(x), \psi(x)) = \int_{\phi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\, dy \quad \forall\, x \in [a,b]$$

Se cumple:

a) *$F(x)$ es una función continua $\forall\, x \in [a,b]$.*

b) *Si además la derivada parcial $\partial f(x,y)/\partial x$ existe y es continua*[3] *en D, y las derivadas $\phi'(x)$ y $\psi'(x)$ existen y son continuas*[4] *en $[a,b]$; entonces $F(x)$ es derivable $\forall\, x \in (a,b)$, su derivada*

[2] No es necesario que $\phi(x) \leq \psi(x)$

[3] Quiere decir que existe en el interior de D y tiene una extensión continua al borde de D

[4] Quiere decir que existen en el interior del intervalo [a,b] y que tienen extensiones continuas a los extremos de ese intervalo.

$F'(x)$ es continua y verifica la siguiente igualdad:

$$F'(x) = \int_{\phi(x)}^{\psi(x)} \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\, dy + f(x,\psi(x))\psi'(x) - f(x,\phi(x))\phi'(x)$$

Demostración: La función $F(x)$ es la composición siguiente:

$$F(x) = H(x, \phi(x), \psi(x)) \;\; \forall\, x \in [a,b]$$

donde $H(x,\phi,\psi)$ es la función definida en el teorema 1.1.8.

Por el resultado de la parte d) del teorema 1.1.8, la función H es diferenciable, con derivadas parciales continuas, y por hipótesis $\phi(x)$ y $\psi(x)$ también lo son. Luego, por la regla de la cadena $F'(x)$ existe, es continua y cumple:

$$F'(x) = \frac{\partial H}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial \phi}\phi'(x) + \frac{\partial H}{\partial \psi}\psi'(x) \qquad (1)$$

Usando las fórmulas de las partes b) y c) del teorema 1.1.8, se tiene:

$$\frac{\partial H}{\partial \phi} = -f(x,\phi), \qquad \frac{\partial H}{\partial \psi} = f(x,\psi)$$

Sustituyendo en (1) se concluye la tesis del teorema. $\square$

Ejemplo 1.2.4. Hallar la derivada de la siguiente función $F(x)$ (sin hallar la función $F(x)$):

$$F(x) = \int_{2x}^{x^3} 3(x+y)^2\, dy$$

Llamando

$$H(x,\phi,\psi) = \int_{\phi}^{\psi} 3(x+y)^2\, dx$$

se cumple, para $\phi = x$ y para $\psi = x^2$ la siguiente igualdad:

$$F(x) = H(x, 2x, x^3)$$

Por la regla de la cadena (llamando H_x, H_ϕ, H_ψ a las tres derivadas parciales de H respecto de x, de ϕ y de ψ respectivamente):

$$F'(x) = H_x + H_\phi\phi'(x) + H_\psi\psi'(x) = H_x + 2H_\phi + 3x^2 H_\psi \qquad (7)$$

Usando las igualdades al final de la parte b) del teorema 1.1.8 se encuentran los resultados (3) y (4) del ejemplo 1.1.9:

$$H_x = 6x(\psi - \phi) + 3(\psi^2 - \phi^2), \quad H_\psi = 3(x+\psi)^2, \quad H_\phi = -3(x+\phi)^2 \qquad (8)$$

Sustituyendo (8) en (7), y recordando que $\phi = 2x, \;\; \psi = x^3$, resulta:

$$F'(x) = 9x^8 + 21x^6 + 15x^4 - 78x^2. \quad \square$$