5. Integrales dobles de Riemann.

El desarrollo de la teoría de integrales múltiples de Riemann lo haremos con detalle para integrales dobles. Al final se explica cómo generalizar los resultados para integrales triples y múltiples en general.

5.1. Sumas de Riemann.

Sea el rectángulo compacto

$$R = [a, b] \times [c, d]$$

donde $a < b$ y $c < d$ son números reales fijos.

Sea $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{i-1} < x_i < \ldots < x_n = b$ una partición del intervalo $[a, b]$ en n subintervalos $[x_{i-1}, x_i]$ de longitud $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$. Sea $\Delta x = \max_{1 \leq i \leq n} \Delta x_i$.

Sea $c = y_0 < y_1 < \ldots < y_{j-1} < y_j < \ldots < y_m = d$ una partición del intervalo $[c, d]$ en subintervalos $[y_{j-1}, y_j]$ de longitud $\Delta y_j = y_j - y_{j-1}$. Sea

$$\Delta y = \max_{1 \leq j \leq m} \Delta y_j$$

Esas particiones de los segmentos $[a, b]$ y $[c, d]$ en los ejes de las x y de las y respectivamente, definen una partición $\mathcal{P}$ del rectángulo $R = [a, b] \times [c, d]$, formada por nm rectangulitos compactos

$$R_{i,j} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j], \qquad \text{de lados con longitudes } \Delta x_i, \ \Delta y_j$$

La unión de todos los rectangulitos $R_{i,j}$ es todo R, y tienen interiores dos a dos disjuntos.

Definición 5.1.1. Norma de una partición. Se llama *norma de la partición* $\mathcal{P}$ del rectángulo R en los rectángulitos $R_{i,j}$ (definidos como antes) al número real positivo:

$$||\mathcal{P}|| = ||(\Delta x, \Delta y)|| = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} = \max_{i,j}\{\text{diagonal de} R_{i,j}\}$$

(Hacer un dibujo tomando en horizontal el eje de las x y en vertical el de las y, en ellos los intervalos $[a, b]$ y $[c, d]$ (por ejemplo para mayor comodidad tomar $0 < a < b$ en el eje de las x y $0 < c < d$ en el eje de las y). Partir uno de esos intervalos en, por ejemplo, $n = 3$ subintervalos, y el otro en, por ejemplo, $m = 5$ subintervalos. Trazar los segmentos de recta verticales $x = x_i$ contante y que están dentro del rectángulo $R = [a, b] \times [c, d]$, y los segmento de recta horizonales $y = y_j$ contante dentro de R. Queda la partición de R en los nm rectangulitos $R_{i,j}$ descriptos antes.)

Definición 5.1.2. Elección "t" de puntos intermedios subordinada a una partición.

Sea dada una partición $\mathcal{P}$ del rectángulo R en nm rectangulitos $R_{i,j}$ como fue definida al principio de la sección 5.1. Una *elección de puntos intermedios subordinada a la partición $\mathcal{P}$,* que denotamos[21] como $\mathbf{t}$, es una colección de mn puntos $(\overline{x}_i, \overline{y}_j)$, cada uno perteneciente al rectangulito $R_{i,j}$ respectivo en $R \subset \mathbb{R}^2$. Es decir:

$$\mathbf{t} = \{(\overline{x}_i, \overline{y}_j) \in R_{i,j}\}_{1 \leq i \leq n, \ 1 \leq j \leq m} \quad \text{naturales.}$$

[21] Hay que estar advertido que $\mathbf{t}$ no es un número real.

Se denota con $\mathbf{T}(\mathcal{P})$ a todas las elecciones posibles de puntos intermedios subordinadas a la partición $\mathcal{P}$.

Cuando se escribe para cierta afirmación A lo siguiente:

$$A \quad \forall \mathbf{t} \in \mathbf{T}(\mathcal{P})$$

estamos indicando que la afirmación A es verdadera para toda elección de puntos intermedios subordinada a la partición $\mathcal{P}$, siendo $\mathcal{P}$ una partición fija dada de antemano.

Sea $f(x, y)$ una función acotada (no necesariamente continua) en R.

Definición 5.1.3. Sumas de Riemann.
Dadas:

- Una función $f(x, y)$ acotada en el rectángulo $R = [a, b] \times [c, d]$.
- Una partición $\mathcal{P}$ del rectángulo R en nm rectangulitos $R_{i,j}$, para $1 \leq i \leq n,\ 1 \leq j \leq m$, con lados de longitudes Δx_i y Δy_j.
- Una elección $\mathbf{t} \in \mathbf{T}(\mathcal{P})$ de puntos intermedios $(\overline{x}_i, \overline{y}_j) \in R_{i,j}$.

Se llama *suma de Riemann de f en la partición $\mathcal{P}$ y en los puntos intermedios $\mathbf{t}$,* al número real:

$$\sigma(f, \mathcal{P}, \mathbf{t}) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} f(\overline{x}_i, \overline{y}_j) \Delta x_i \Delta y_j$$

A veces, en la suma de Riemann a la derecha de la igualdad anterior, se sustituye el producto $\Delta x_i \Delta y_j$ por área $R_{i,j}$, ya que el producto de las longitudes de los lados de un rectángulo es igual a su área.

Intepretación geométrica de la suma de Riemann. (Hacer una figura tomando en el plano horizontal x, y el rectángulo R con su partición $\mathcal{P}$ en nm rectangulitos, y en el eje vertical z. Dibujar la superficie gráfica $z = f(x, y)$ de un función f continua y positiva en R.)

Cada sumando $f(\overline{x}_i, \overline{y}_j) \Delta x_i \Delta y_j$ de la suma de Riemann, cuando $f \geq 0$, es el volumen del prisma rectangular en el espacio x, y, z con base en el rectángulito $R_{i,j}$ del plano $z = 0$ y altura igual a $z_{i,j} = f(\overline{x}_i, \overline{y}_j)$. Este punto $(\overline{x}_i, \overline{y}_j, z_{i,j})$, que está en la tapa horizontal superior del prisma, se encuentra sobre la (superficie, si f es continua) gráfica de f, y se proyecta verticalmente sobre el punto $(\overline{x}_i, \overline{y}_j)$ de su base (el rectangulito $R_{i,j}$).

La suma de Riemann es entonces igual al volumen de la unión de todos esos prismas rectangulares. Si f es continua, y los rectangulitos $R_{i,j}$ en la base, son pequeños, demostraremos que las sumas de Riemann tienden a un número A. Intepretamos en ese caso que la unión de los prismas rectangulares aproxima en volumen al sólido V_f que se encuentra abajo de la superficie gráfica $z = f(x, y)$, y arriba del plano $z = 0$.

5.2. Integral de Riemann de funciones acotadas.

Definición 5.2.1. Límite de sumas de Riemann.
Dada una función acotada f en el rectángulo $R = [a, b] \times [c, d]$, se llama *límite de las sumas de Riemann de f en R,* a un número A que, si existe, cumple lo siguiente:

Para todo $\epsilon > 0$ dado, existe $\delta > 0$ tal que

$$||\mathcal{P}|| < \delta \quad \Rightarrow \quad |\sigma(f, \mathcal{P}, \mathbf{t}) \, - \, A| < \epsilon \;\; \forall \, \mathbf{t} \in \mathbf{T}(\mathcal{P})$$

Cuando existe tal número A se lo denota como:

$$A = \lim_{||\mathcal{P}|| \to 0} \sigma(f, \mathcal{P}, \mathbf{t}) = \lim_{(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} f(\overline{x}_i, \overline{y}_j) \Delta x_i \Delta y_j$$

Definición 5.2.2. Integral de Riemann en un rectángulo.
Dada una función acotada f en el rectángulo compacto R, se dice que f es *integrable Riemann en R* si existe el límite A de las sumas de Riemann como en la definición 5.2.1. A dicho límite A se le llama *integral de Riemann de f en R* y se le denota[22] por convención, como:

$$A = \lim_{||\mathcal{P}|| \to 0} \sigma(f, \mathcal{P}, \mathbf{t}) = \lim_{(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} f(\overline{x}_i, \overline{y}_j) \Delta x_i \Delta y_j = \iint_R f(x, y) \, dx \, dy$$

(Obsérvese que la igualdad anterior **no** es un teorema, sino una simple convención de notación.)

Definición 5.2.3. Integral de Riemann en un conjunto acotado.
Dada una función acotada f en un conjunto D contenido en el rectángulo compacto R, se dice que f es *integrable Riemann en D* si es integrable Riemann en R (como en la definición 5.2.2), la función extendida definida como $f(x, y)$ si $(x, y) \in D$ y $f(x, y) = 0$ si $(x, y) \notin D$.

A dicha integral Riemann en R de la función extendida se le llama *integral de Riemann de f en D* y se le denota como:

$$\lim_{||\mathcal{P}|| \to 0} \sigma(f, \mathcal{P}, \mathbf{t}) = \lim_{(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} f(\overline{x}_i, \overline{y}_j) \Delta x_i \Delta y_j = \iint_D f(x, y) \, dx \, dy$$

$$\text{donde } f(x, y) = 0 \text{ si } (x, y) \notin D.$$

(Obsérvese que la igualdad anterior **no** es un teorema, sino una simple convención de notación.)

Nota 5.2.4. No toda función *acotada* es integrable Riemann. Por ejemplo la función f en el rectángulo $[0, 1] \times [0, 1]$ dada por $f(x, y) = 1$ si las coordenadas x e y son números racionales; y $f(x, y) = 0$ si las coordenadas x e y son números irracionales; es acotada, pero se puede verificar fácilmente que no es integrable Riemann.

Veremos como consecuencia del teorema de Riemann-Lebesgue, (teorema 5.4.1), que toda función *continua* en un rectángulo compacto R (que es un caso particular de función acotada) es integrable Riemann en el rectángulo; y que toda función *continua en un dominio D descomponible en simples,* es integrable Riemann en D.

Sin embargo, advertimos que no toda función continua en un dominio cualquiera D, aunque este sea compacto y la función resulte ser acotada, es integrable Riemann en D. Eso depende de la forma de D, en especial de la "medida" del borde de D.

[22] En esta sección la notación $\iint_R f(x, y) \, dx \, dy$ **no** indica integral doble iterada como en la definición 2.1.2. Indica el límite, cuando existe, de las sumas $\sigma(f, \mathcal{P}, \mathbf{t})$ de Riemann de f. Este límite cuando existe, es llamado *integral de Riemann de f*.

Al final de esta sección, en el teorema 5.5.1, probaremos que son iguales (cuando existen ambas), la integral de Riemann y la integral doble iterada de f. Por eso usamos la misma notación para ambas.

Nota 5.2.5. En el capítulo 4, parágrafo 53, del libro de Burgos (ver referencia en la Bibliografía al final de este texto) se da otra manera de definir integral de Riemann de f en un rectángulo R. La del libro de Burgos es la más usual en los textos.

Se definen primero las sumas superior e inferior de Darboux de f en particiones de R en rectangulitos $R_{i,j}$, en forma similar a nuestra definición 5.1.3, pero sustituyendo $f(\overline{x}_i, \overline{y}_j)$ por el supremo e ínfimo respectivamente de f en $R_{i,j}$.

Se llama integral superior e inferior de f en R al ínfimo de las sumas superiores y al supremo de las sumas inferiores de Darboux, respectivamente, cuando se toman todas las particiones $\mathcal{P}$ de R.

Se define entonces:

f es integrable Riemann en R si las integrales superior e inferior de f en R coinciden; en ese caso se llama integral de Riemann de f en R al valor común de las integrales superior e inferior.

Esta otra definición de integral de Riemann resulta ser equivalente a la definición 5.2.2 que damos nosotros en este texto, como se demuestra en el parágrafo 58 del libro de Burgos.

5.3. Conjuntos de medida nula.

Sea $A \subset \mathbb{R}^2$ un subconjunto cualquiera de $\mathbb{R}^2$. (A puede ser en particular el conjunto vacío.)

Una colección $\{R_n\}_{1 \leq n \leq N}$ de N rectángulos R_n de $\mathbb{R}^2$, se dice que es un *cubrimiento finito por rectángulos de A* si

$$A \subset \bigcup_{n=1}^{N} R_n$$

Una sucesión $\{R_n\}_{n \geq 1}$ de rectángulos R_n de $\mathbb{R}^2$, se dice que es un *cubrimiento numerable por rectángulos de A* si

$$A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} R_n$$

(La unión en la afirmación de arriba denota, por convención, al conjunto de todos los puntos que pertenece a alguno de los rectángulos R_n, para algún valor natural de $n \geq 1$.)

Por convención, si $\{R_n\}_{1 \leq n \leq N}$ es *un cubrimiento finito, se dice también que es numerable,* definiendo $R_n = \emptyset$ para $n > N$, y definiendo área(R_n) =área$(\emptyset) = 0$ si $n > N$.

Definición 5.3.1. Conjuntos de medida nula. Se dice que A tiene *medida nula* si para cada $\epsilon > 0$ existe un cubrimiento numerable por rectángulos $\{R_n\}$ de A tal que la suma de sus áreas es menor que ϵ; es decir:

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \{R_n\}_{n \geq 1} \text{ tal que } \quad A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} R_n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \text{área} R_n < \epsilon$$

Es sencillo demostrar la siguiente proposición:

Proposición 5.3.2. Propiedades de los conjuntos de medida nula.

1) *Si A es un conjunto de medida nula y si $B \subset A$ entonces B también es de medida nula.*

2) *Si A y B son conjuntos de medida nula, entonces $A \cup B$ también lo es.*

Ahora damos el ejemplo de conjunto de medida nula que usaremos en la subsección siguiente:

Proposición 5.3.3. Medida nula de las curvas gráficas de funciones continuas.

1) *La curva gráfica* $\{y = \phi(x), \quad x \in [a, b]\}$, *de cualquier función continua* $\phi : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ *es un conjunto de medida nula.*

2) *La curva gráfica* $\{x = \eta(y), \quad y \in [c, d]\}$, *de cualquier función continua* $\eta : [c, d] \mapsto \mathbb{R}$ *es un conjunto de medida nula.*

Demostración: La afirmación 2) es la misma afirmación 1), en la que simplemente se ha permutado el nombre de las variables x e y entre sí. Entonces, basta demostrar 1).

Sea $A = \{y = \phi(x), \ x \in [a, b]\}$ el conjunto curva gráfica de ϕ.

Como ϕ es continua en el compacto $[a, b]$ entonces es uniformemente continua. Por lo tanto para todo $\epsilon^* > 0$ existe $\delta > 0$ tal que:

$$|x_1 - x_2| < \delta \quad \Rightarrow \quad |\phi(x_1) - \phi(x_2)| < \epsilon^* \quad (1)$$

Tomemos una partición fija del intervalo $[a, b]$:

$$0 = x_0 < x_1 < \ldots < x_{i-1} < x_i < \ldots < x_N = b$$

en N intervalitos $[x_{i-1}, x_i]$ iguales de longitud $\Delta x = (b - a)/N = x_i - x_{i-1}$, tomando fijo un valor natural de N suficientemente grande para que $(b - a)/n < \delta$. Entonces:

$$\Delta x < \delta \qquad (2)$$

Consideremos para cada $i = 1, 2, \ldots, N$ el rectángulo

$$R_i = [x_{i-1}, x_i] \times [\phi(x_i) - \epsilon^*, \phi(x_i) + \epsilon^*] \quad (3)$$

Afirmamos que la unión de estos N rectángulos contiene al conjunto A, es decir $\{R_i\}_{1 \leq i \leq N}$ es un cubrimiento finito de A. En efecto, dado $(x, y) \in A$, se cumple

$$y = \phi(x)$$

Además existe algún intervalito $[x_{i-1}, x_i]$ de la partición donde está la abscisa x dada. Es decir

$$x \in [x_{i-1}, x_i] \quad (4)$$

Entonces la distancia entre x y x_i es menor o igual que la longitud Δx del intervalito $[x_{i-1}, x_i]$; en otras palabras:

$$|x - x_i| < \Delta x \quad (5)$$

Reuniendo (5) con (2) y (1), se deduce:

$$|x - x_i| < \delta, \quad |\phi(x) - \phi(x_i)| < \epsilon^*$$

De lo anterior se deduce que

$$\phi(x) \in [\phi(x_i) - \epsilon^*, \phi(x_i) + \epsilon^*] \quad (6)$$

Reuniendo las afirmaciones (3) (4) y (6) se obtiene:

$$(x, y) = (x, \phi(x)) \in R_i$$

Hemos demostrado que cada punto $(x, y) \in A$ está contenido en alguno de los rectángulos R_i. Se concluye que

$$A \subset \bigcup_{i=1}^{N} R_i$$

En otras palabras la colección R_i es un cubrimiento finito de A por rectángulos.

Ahora solo falta demostrar que la suma de las áreas de los rectángulos R_i puede hacerse menor que ϵ, para cada valor $\epsilon > 0$ dado, arbitrario.

Calculemos la suma de las áreas de los rectángulos R_i dados en (3).

$$\text{área}(R_i) = (x_i - x_{i-1}) \cdot \epsilon^* = \Delta x \cdot \epsilon^* \quad \Rightarrow$$

$$\sum_{i=1}^{N} \text{área}(R_i) = \sum_{i=1}^{N} \Delta x \cdot \epsilon^* = \epsilon^* \sum_{i=1}^{N} \Delta x = \epsilon^* \cdot \Delta x \cdot \sum_{i=1}^{N} = \epsilon^* \cdot \frac{b-a}{N} \cdot N = \epsilon^* \cdot (b-a) < \epsilon$$

donde dado $\epsilon > 0$ se eligió $\epsilon^* > 0$ tal que $\epsilon^* < \epsilon/(b-a)$. Esto es posible porque toda la construcción anterior fue hecha para un valor genérico $\epsilon^* > 0$, cualquiera sea este. $\square$

5.4. Teorema de Riemann-Lebesgue.

Teorema 5.4.1. Teorema de Riemann-Lebesgue.

Si f es acotada en el rectángulo $R = [a, b] \times [c, d]$ y sus puntos de discontinuidad (si existen) *están contenidos en un conjunto C de medida nula, entonces existe el límite de las sumas de Riemann* (integral de Riemann de f en R.)[23].

Demostraremos una versión particular del teorema de Riemann-Lebesgue, agregando como hipótesis que el conjunto C que contiene las discontinuidades de f sea compacto. En lo que sigue sólo usaremos el teorema de Riemann-Lebesgue en este caso particular.

Demostración de una versión restringida del teorema 5.4.1, asumiendo que C es compacto:

Para demostrar que existe el límite de las sumas de Riemann, como en la definición 5.2.1, alcanza probar que dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para toda pareja de particiones $\mathcal{P}_1$ y $\mathcal{P}_2$ en rectángulos de R se cumple la afirmación (1) que está más abajo:

(A probar:)

$$\forall\, \epsilon > 0, \;\; \exists \delta > 0 \;\text{ tal que:}$$

$$||\mathcal{P}_1|| < \delta,\; ||\mathcal{P}_2|| < \delta \quad \Rightarrow \quad |\sigma(f, \mathcal{P}_1, \mathbf{t}_1) - \sigma(f, \mathcal{P}_2, \mathbf{t}_2)| < \epsilon \quad \forall\, \mathbf{t}_1 \in \mathbf{T}(\mathcal{P}_1) \quad \mathbf{t}_2 \in \mathbf{T}(\mathcal{P}_2) \qquad (1)$$

En efecto, si probamos (1), entonces en particular para $\epsilon = 1/2$ existe un $\delta_1 > 0$, existe (elegimos) una partición $\mathcal{P}_1$ con norma menor que δ_1, y existe (elegimos) una familia $\mathbf{t}_1 \in \mathbf{T}(\mathcal{P}_1)$ de puntos

[23] También es cierto el recíproco. Una función f acotada en el rectángulo R es integrable Riemann en R si y solo si es continua en R excepto a lo sumo en un conjunto C de medida nula.

intermedios subordinada a $\mathcal{P}_1$, tales que, para cualquier otra partición $\mathcal{P}$ con norma también menor que δ, y para cualquier elección $\mathbf{t} \in \mathbf{T}(\mathcal{P})$ se cumple:

$$\sigma(f, \mathcal{P}, \mathbf{t}) \in [\sigma(f, \mathcal{P}_1, \mathbf{t}_1) - 1/2, \sigma(f, \mathcal{P}_1, \mathbf{t}_1) + 1/2] = I_1, \text{ con longitud de } I_1 = 1$$

Análogamente, para $\epsilon_n = 1/(2n)$, con $n \geq 2$ natural, todas las particiones $\mathcal{P}$ con diámetro menor que $\delta_n < \delta_{n-1} < \ldots < \delta_1$, y toda elección $\mathbf{t} \in \mathbf{T}(\mathcal{P})$, definen una suma de Riemann $\sigma(f, \mathcal{P}, \mathbf{t})$ que está en un intervalo compacto I_n de longitud igual a $2\epsilon_n = 1/n$, y contenido en I_{n-1}. La sucesión de intervalos compactos de reales I_n es una sucesión encajada de intervalos con longitudes que tiende a cero. Entonces, por la completitud de la recta real, la intersección de todos esos intervalos define un único real A que es el límite de las sumas de Riemann buscado.

Ahora probemos (1):

Primer caso: f es continua en $R = [a, b] \times [c, d]$, entonces es uniformemente continua en R (pues R es compacto):

Dado $\epsilon^* > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$||(x_1, y_1) - (x_2, y_2)|| < \delta \ \Rightarrow \ |f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2)| < \epsilon^* \quad (2)$$

Dadas dos particiones $\mathcal{P}_1$ y $\mathcal{P}_2$ con norma menor que δ, consideramos la partición producto

$$\mathcal{P}_1 \wedge \mathcal{P}_2$$

formada por las intersecciones (cuando no son vacías) dos a dos de todos los rectángulitos de $\mathcal{P}_1$ con todos los de $\mathcal{P}_2$.

Afirmamos que, dado $\epsilon > 0$, si se elige

$$\epsilon^* = \frac{\epsilon}{2(b-a)(d-c)}$$

entonces se cumple lo siguiente:

$$\text{A probar: } |\sigma(f, \mathcal{P}, \mathbf{t}) \ - \ \sigma(f, \mathcal{P}_1, \mathbf{t}_1)| < \epsilon/2 \quad \forall \mathbf{t} \in \mathbf{T}(\mathcal{P}) \quad \mathbf{t}_1 \in \mathbf{T}(\mathcal{P}_1) \quad (3)$$

$$\text{A probar: } |\sigma(f, \mathcal{P}, \mathbf{t}) \ - \ \sigma(f, \mathcal{P}_2, \mathbf{t}_2)| < \epsilon/2 \quad \forall \mathbf{t} \in \mathbf{T}(\mathcal{P}) \quad \mathbf{t}_2 \in \mathbf{T}(\mathcal{P}_2) \quad (4)$$

Una vez probadas (3) y (4) aplicando la propiedad triangular se obtiene

$$|\sigma(f, \mathcal{P}_1, \mathbf{t}_1) - \sigma(f, \mathcal{P}_2, \mathbf{t}_2)| \leq |\sigma(f, \mathcal{P}, \mathbf{t}) - \sigma(f, \mathcal{P}_1, \mathbf{t}_1)| + |\sigma(f, \mathcal{P}, \mathbf{t}) - \sigma(f, \mathcal{P}_2, \mathbf{t}_2)| < \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon$$

con lo cual quedará demostrada la tesis (1) como queremos.

Ahora probemos (3) y (4). Observamos que la afirmación (4) es la misma afirmación (3) sustituyendo $\mathcal{P}_2$ por $\mathcal{P}_1$. Por lo tanto basta demostrar (3).

Por la definición de suma de Riemann en 5.1.3:

$$\sigma(f, \mathcal{P}_1, \mathbf{t}_1) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} f(\overline{x}_i, \overline{y}_j) \cdot \ \text{área}(R_{i,j}) \quad (6)$$

donde $(\overline{x}_i, \overline{y}_j) \in R_{i,j}$ y $\{R_{i,j}\}_{1 \leq i \leq n,\, 1 \leq j \leq m} = \mathcal{P}_1$

Por otra parte, tenemos la partición $\mathcal{P} = \{S_k\}_{k=1,2\ldots,N}$. (Aquí no nombramos los N rectángulos S_k según dos índices i, j que numeran los intervalos en los ejes de abscisas y ordenadas respectivamente, sino que indexamos S_k ordenados con un sólo índice natural k que varía desde 1 hasta N en el orden que se desee.) La suma de Riemann correspondiente a $\mathcal{P}$ es:

$$\sigma(f, \mathcal{P}, \mathbf{t}) = \sum_{k=1}^{N} f(\tilde{x}_k, \tilde{y}_k) \cdot \text{ área}(S_k) \qquad (7)$$

donde $(\tilde{x}_k, \tilde{y}_k) \in S_k$.

Sabemos que la partición $\mathcal{P}$ se obtuvo de intersectar todos los rectángulos de la partición $\mathcal{P}_1$ con los de otra partición. Entonces cada rectángulo $R_{i,j}$ de la partición $\mathcal{P}_1$ es igual a la unión de una cierta cantidad finita de rectángulos $S_k \subset R_{i,j}$ de la partición $\mathcal{P}$. Es decir:

$$R_{i,j} = \bigcup_{k: S_k \subset R_{i,j}} S_k, \qquad \text{área}(R_{i,j}) = \sum_{k: S_k \subset R_{i,j}} \text{área}(S_k) \qquad (8)$$

Entonces, para cada uno de estos rectángulos $S_k \subset R_{i,j}$ la elección de puntos intermedios $\mathbf{t} \in \mathbf{T}(\mathcal{P})$ define

$$(\tilde{x}_k, \tilde{y}_k) \in S_k \subset R_{i,j} \qquad (9)$$

Reuniendo (6), (7) y (8) se obtiene:

$$\sigma(f, \mathcal{P}_1, \mathbf{t}_1) - \sigma(f, \mathcal{P}, \mathbf{t}) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \sum_{k: S_k \subset R_{i,j}} (f(\overline{x}_i, \overline{y}_j) - f(\tilde{x}_k, \tilde{y}_k)) \cdot \text{ área}(S_k)$$

Tomando valor absoluto, y usando la propiedad triangular para el valor absoluto de una suma, se deduce:

$$|\sigma(f, \mathcal{P}_1, \mathbf{t}_1) - \sigma(f, \mathcal{P}, \mathbf{t})| \leq \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \sum_{k: S_k \subset R_{i,j}} |f(\overline{x}_i, \overline{y}_j) - f(\tilde{x}, \tilde{y})| \cdot \text{ área}(S_k) \qquad (10)$$

Recordando por (9) que los puntos $(\overline{x}_i, \overline{y}_j)$ y $(\tilde{x}_k, \tilde{y}_k)$ están ambos en el mismo rectángulo $R_{i,j}$ de la partición $\mathcal{P}_1$, y que la norma de esta partición es menor que δ, se deduce:

$$||(\overline{x}_i, \overline{y}_j) - (\tilde{x}_k, \tilde{y}_k)|| < \delta$$

Luego, aplicando la afirmación (2) se deduce que:

$$|f(\overline{x}_i, \overline{y}_j) - f(\tilde{x}_k, \tilde{y}_k)| < \epsilon^*$$

Sustituyendo esta última desigualdad en (10) se obtiene:

$$|\sigma(f, \mathcal{P}_1, \mathbf{t}_1) - \sigma(f, \mathcal{P}, \mathbf{t})| < \epsilon^* \cdot \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \sum_{k: S_k \subset R_{i,j}} \text{área}(S_k)$$

$$|\sigma(f, \mathcal{P}_1, \mathbf{t}_1) - \sigma(f, \mathcal{P}, \mathbf{t})| < \ \epsilon^* \cdot \text{ área}([a, b] \times [c, d]) = \epsilon^* \cdot (b - a)(d - c) = \frac{\epsilon}{2}$$

Esta última desigualdad prueba la afirmación (3) como queríamos demostrar, en el caso de una función f continua en el rectángulo $[a,b]\times[c,d]$.

Segundo caso: f no es continua en $R=[a,b]\times[c,d]$ estando sus puntos de discontinuidad contenidos en C, donde C es un conjunto compacto y de medida nula.

Reduciremos la demostración de la afirmación (1) a su validez, ya probada, en el primer caso. Para ello construiremos una función auxiliar g que sea continua en R, y que difiera de f solo en un conjunto de área muy pequeña. Aplicaremos el resultado ya probado (1) para la función g continua; y comparando las sumas de Riemann de f con las de g, deduciremos la tesis (1) para f.

Dado $\epsilon>0$, elegiremos al final un valor de $\epsilon^*>0$ adecuado, en función de ϵ.

Para todo $\epsilon^*>0$, por definición de conjunto de medida nula, existe un cubrimiento finito[24] de C con N rectángulos compactos $\{S_k\}_{k=1,2,\dots,N}$, cuya unión llamamos S, y cuyas áreas suman menos que ϵ^*. No es restricitivo suponer que C está contenido en el interior[25] de S. En otras palabras:

$$C\subset \text{interior(S)} \quad S=\bigcup_{k=1}^{N} S_k, \quad \sum_{k=1}^{N}\text{área}(S_k)<\epsilon^* \qquad (11)$$

Aplicando el lema 2.2.13, existe una función chichón $\varphi(x,y)$ continua para todo $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ tal que $\varphi=0$ fuera del abierto $V=$ interior S, es igual a 1 en el compacto C y está comprendida entre 0 y 1 para los puntos $(x,y)\in V\setminus C$.

Construyamos la función auxiliar

$$g(x,y)=(1-\varphi(x,y))\cdot f(x,y)\ \ \forall\,(x,y)\in R=[a,b]\times[c,d]$$

Como g se anula en C y es igual al producto de funciones continuas fuera de C (producto que tiende a cero cuando el punto (x,y) tiende a un punto de C, pues el factor $1-\varphi(x,y)$ así lo hace, y el otro factor $f(x,y)$ es acotado), entonces $g(x,y)$ es continua en $[a,b]\times[c,d]$.

Además g cumple:

$$g(x,y)=0\ \forall\,(x,y)\in C, \qquad g(x,y)=f(x,y)\ \forall\,(x,y)\in R\setminus S \qquad (12a)$$

$$0\le|g(x,y)|\le|f(x,y)|\ \forall\,(x,y)\in R \quad (12b)$$

Siendo g continua en R aplicamos la afirmación (1) probada en el primer caso. Entonces existe $\delta>0$ tal que

$$||\mathcal{P}_1||<\delta,\ ||\mathcal{P}_2||<\delta \quad\Rightarrow\quad |\sigma(g,\mathcal{P}_1,\mathbf{t}_1)\,-\,\sigma(g,\mathcal{P}_2,\mathbf{t}_2)|<\frac{\epsilon}{3} \quad \forall\,\mathbf{t}_1\in\mathbf{T}(\mathcal{P}_1)\quad \mathbf{t}_2\in\mathbf{T}(\mathcal{P}_2) \qquad (13)$$

[24]Siendo C compacto, de todo cubrimiento numerable de C con rectángulos, puede extraerse un cubrimiento finito.

[25]En efecto si se toman rectángulos $\tilde S_k$ alargando cada lado de S_k (para la derecha y para la izquierda los dos lados horizontales, y para arriba y para abajo los dos lados verticales) una cantidad $\tilde\epsilon>0$ tal que $\tilde\epsilon<1$, entonces C queda contenido en el interior de la unión de los rectángulos $\tilde S_k$. Además dado $\epsilon>0$ la suma de los áreas de los rectángulos $\tilde S_k$ puede hacerse menor que 2ϵ. En efecto: el área de cada uno de los nuevos rectángulos $\tilde S_k$ es igual área $(S_k)+\text{Perím}(S_k)\cdot\tilde\epsilon+4\tilde\epsilon^2\le\text{área}(S_k)+\text{Perím}(S_k)\cdot\tilde\epsilon+4\tilde\epsilon$. Luego

$$\sum_{k=1}^{N}\text{área}(\tilde S_k)\le\sum_{k=1}^{N}\text{área}(\tilde S_k)+\tilde\epsilon\sum_{k=1}^{N}(\text{Perím}(S_k)+4)<\epsilon+\tilde\epsilon\sum_{k=1}^{N}(\text{Perím}(S_k)+4)=2\epsilon$$

Para obtener la última igualdad hemos elegido, dado $\epsilon>0$, el número $\tilde\epsilon=\epsilon/\sum_{k=1}^{N}(\text{Perím}(S_k)+4)$.

Observamos que si para un valor $\delta_0 > 0$ de δ se cumple la afirmación (13), entonces para todo otro valor positivo menor que δ_0 también se cumple (13). Por lo tanto, en lo sucesivo, podemos elegir $\delta > 0$ tan pequeño como se necesite.

Para probar la afirmación (1) para f alcanza con probar que:

$$||\mathcal{P}|| < \delta, \quad \Rightarrow \quad |\sigma(f, \mathcal{P}, \mathbf{t}) \, - \, \sigma(g, \mathcal{P}, \mathbf{t})| < \frac{\epsilon}{3} \quad \forall \, \mathbf{t} \in \mathbf{T}(\mathcal{P}) \qquad \text{(a probar)} \quad (14)$$

En efecto, una vez probada las afirmación (14), por la propiedad triangular del valor absoluto se deduce que

$$|\sigma(f, \mathcal{P}_1, \mathbf{t}_1) \, - \, \sigma(f, \mathcal{P}_2, \mathbf{t}_2)| \leq |\sigma(f, \mathcal{P}_1, \mathbf{t}_1) \, - \, \sigma(g, \mathcal{P}_1, \mathbf{t}_1)| +$$
$$+ |\sigma(g, \mathcal{P}_1, \mathbf{t}_1) \, - \, \sigma(g, \mathcal{P}_2, \mathbf{t}_2)| + |\sigma(g, \mathcal{P}_2, \mathbf{t}_2) \, - \, \sigma(f, \mathcal{P}_2, \mathbf{t}_2)|$$

Aplicando (13), y la desigualdad (14) a la desigualdad anterior, se obtiene:

$$||\mathcal{P}_1|| < \delta, \; ||\mathcal{P}_2|| < \delta \quad \Rightarrow \quad |\sigma(f, \mathcal{P}_1, \mathbf{t}_1) - \sigma(f, \mathcal{P}_2, \mathbf{t}_2)| < \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon \quad \forall \, \mathbf{t}_1 \in \mathbf{T}(\mathcal{P}_1) \quad \mathbf{t}_2 \in \mathbf{T}(\mathcal{P}_2)$$

Esa es justamente la afirmación (1) que queríamos probar.

Entonces basta probar (14) para finalizar la demostración del teorema.

Por la definición de las sumas de Riemann en 5.1.3, y por la propiedad traingular del valor absoluto se tiene:

$$|\sigma(f, \mathcal{P}, \mathbf{t}) \, - \, \sigma(g, \mathcal{P}, \mathbf{t})| = |\sigma(f - g, \mathcal{P}, \mathbf{t})| \leq \sigma(|f - g|, \mathcal{P}, \mathbf{t}) \quad (15)$$

Siendo la partición $\mathcal{P}$ formada por nm rectangulitos $R_{i,j}$, la suma de Riemann de $|f - g|$ es:

$$\sigma(|f - g|, \mathcal{P}, \mathbf{t}) = \sum_{i,j=1,1}^{n,m} |f(\overline{x}_i, \overline{y}_j) - g(\overline{x}_i, \overline{y}_j)| \text{área} R_{i,j} \qquad (16)$$

La partición $\mathcal{P}$ tiene norma menor que $\delta > 0$, entonces cada uno de los rectángulos $R_{i,j}$ tiene su diagonal con longitud menor que δ.

Retomemos ahora los N rectángulos S_k que teníamos al principio, y que cumplen (11) y (12).

Los nm rectángulos $R_{i,j}$ se clasifican en dos categorías:

1) O bien $R_{i,j}$ no intersecta ningún S_k, y por lo tanto no interseca a su unión S; es decir $R_{i,j}$ está contenido en $R \setminus S$. Llamaremos A al conjunto de índices (i, j) para los cuales ocurre eso. Se cumple, aplicando (12 a):

$$(i, j) \in A \quad \Rightarrow R_{i,j} \subset R \setminus S \quad |f(\overline{x}_i, \overline{y}_j) - g(\overline{x}_i, \overline{y}_j)| = 0$$

Sumando entonces:

$$\sum_{(i,j) \in A} |f(\overline{x}_i, \overline{y}_j) - g(\overline{x}_i, \overline{y}_j)| \cdot \text{área} R_{i,j} = 0 \qquad (17)$$

2) O bien $R_{i,j}$ intersecta a algún S_k, y por lo tanto todos sus puntos distan menos que δ de algún punto de S_k. (Recordar que $\delta > 0$ es mayor que la norma de la partición $\{\mathcal{P}\}$; por lo tanto es mayor que la diagonal de todos sus rectangulitos $R_{i,j}$.)

Entonces $R_{i,j}$ está contenido en un rectángulo $\tilde{S}_k$, un poco más grande que S_k, con el mismo centro que S_k, y lados de longitud igual a la longitud de los lados de S_k más 2δ. (Esto es $\tilde{S}_k$ se obtiene alargando cada lado horizontal de S_k una distancia δ para la izquierda y para la derecha, y lo mismo con cada lado vertical para arriba y para abajo).

Por lo tanto se cumple:

$$\sum_{(i,j)\notin A} \text{área} R_{i,j} \leq \sum_{k=1}^{N} \text{área} \tilde{S}_k \leq \sum_{k=1}^{N} \text{área} S_k + \text{perím.} S_k \delta + 4\delta^2$$

Si $\delta > 0$ se elige menor que 1 y menor que $\epsilon^* / \sum_{k=1}^{N} (\text{perím.} S_k + 4)$, entonces resulta:

$$\sum_{(i,j)\notin A} \text{área}(R_{i,j}) \leq \sum_{k=1}^{N} \text{área} S_k + \text{perím.} S_k \delta + 4\delta \leq \sum_{k=1}^{N} \text{área} S_k + \text{perím.} S_k \delta + 4\delta =$$

$$= \sum_{k=1}^{N} \text{área} S_k + \sum_{k=1}^{N} (\text{perím.} S_k + 4)\delta < \epsilon^* + \sum_{k=1}^{N} \text{área} S_k$$

Aplicando (11) a esta última desigualdad, se concluye:

$$\sum_{(i,j)\notin A} \text{área}(R_{i,j}) < 2\epsilon^*$$

Usando esta última desigualdad, aplicando (12b) y eligiendo $K > 0$ que sea una cota superior de $|f|$ en R (por hipótesis f es acotada en R), se deduce:

$$\sum_{(i,j)\notin A} |f(\overline{x}_i, \overline{y}_j) - g(\overline{x}_i, \overline{y}_j)| \cdot \text{área} R_{i,j} \leq \sum_{(i,j)\notin A} |f(\overline{x}_i, \overline{y}_j)| + |g(\overline{x}_i, \overline{y}_j)| \cdot \text{área} R_{i,j} \leq$$

$$\leq \sum_{(i,j)\notin A} 2|f(\overline{x}_i, \overline{y}_j)| \cdot \text{área} R_{i,j} \leq 2K \cdot \sum_{(i,j)\notin A} \text{área} R_{i,j} < 4K\epsilon^* \qquad (18)$$

Reuniendo las desigualdades (17) y (18) se obtiene:

$$\sum_{i,j=1,1}^{n,m} |f(\overline{x}_i, \overline{y}_j) - g(\overline{x}_i, \overline{y}_j)| \cdot \text{área} R_{i,j} = \sum_{(i,j)\in A} |f(\overline{x}_i, \overline{y}_j) - g(\overline{x}_i, \overline{y}_j)| \cdot \text{área} R_{i,j} +$$

$$+ \sum_{(i,j)\notin A} |f(\overline{x}_i, \overline{y}_j) - g(\overline{x}_i, \overline{y}_j)| \cdot \text{área} R_{i,j} < 0 + 4K\epsilon^*$$

Aplicando (16) y esta última desigualdad:

$$\sigma(|f - g|, \mathcal{P}, \mathbf{t}) < 4K\epsilon^*$$

Luego, por (15):

$$|\sigma(f, \mathcal{P}, \mathbf{t}) \ - \ \sigma(g, \mathcal{P}, \mathbf{t})| < 4K\epsilon^* = \frac{\epsilon}{3}$$

Para obtener la última desigualdad hemos elegido $\epsilon^* = \epsilon/(12 \cdot K)$. Luego concluimos:

$$||\mathcal{P}|| < \delta, \quad \Rightarrow \quad |\sigma(f, \mathcal{P}, \mathbf{t}) \ - \ \sigma(g, \mathcal{P}, \mathbf{t})| < \frac{\epsilon}{3} \quad \forall \mathbf{t} \in \mathbf{T}(\mathcal{P})$$

que es la afirmación (14) que queríamos probar. $\square$

Corolario 5.4.2. Corolario del Teorema de Riemann-Lebesgue.
Si f es continua en el dominio D, simple respecto de x o respecto de y, entonces existe el límite de las sumas de Riemann (integral de Riemann de f en el dominio D).

Demostración: Por la definición de integrabilidad Riemann en $D \subset \mathbb{R}$ (definición 5.2.3), hay que demostrar que la función f extendida, definiendo por convención $f(x, y) = 0$ si $(x, y) \notin D$, es integrable Riemann en el rectángulo R.

f es continua en D por hipótesis, y su extensión es continua en el exterior de D porque es idénticamente nula.

Entonces los puntos de discontinuidad de f en R, si existen, están en la parte de la frontera ∂D, que no es borde del rectángulo R. Esta frontera está formada por las gráficas de funciones $y = \phi(x)$ e $y = \psi(x)$ continuas (si D es simple respecto de x, ver definición 2.1.1), o por las gráficas de funciones $x = \eta(y)$ y $x = \xi(y)$ continuas (si D es simple respecto de y, ver definición 2.2.2).

Por la proposición 5.3.3, las gráficas de funciones continuas de una variable, tienen medida nula en el rectángulo bidimensional R.

De lo anterior se deduce que f es continua en R excepto a lo sumo en un conjunto que tiene medida nula (y es compacto).

Luego, por el teorema de Riemann-Lebesgue (teorema 5.4.1), la función f, extendida como la función nula fuera de D, es integrable Riemann en R, y por lo tanto la función f dada es integrable Riemann en D, como queríamos demostrar. $\square$

5.5. Teorema de Fubini.

En la sección 2 vimos el teorema de Fubini para integrales dobles iteradas (teorema 2.2.12). Ese mismo resultado está contenido en el siguiente teorema, y da otra demostración del resultado 2.2.12, probando no solo que las dos integrales iteradas son iguales entre sí, sino además que son iguales a la integral de Riemann.

Por ese motivo se emplea la siguiente notación.

Notación: Se usa el mismo símbolo

$$\int\int_D f(x, y)\, dxdy$$

para referirse a la integral de Riemann, o a cualquiera de las integrales iteradas, sin importar el orden de las variables en que se integra.

Teorema 5.5.1. Teorema de Fubini para integrales de Riemann.
a) *Si f es continua en el dominio D simple respecto de x (o respecto de y), entonces la integral doble iterada de f* (definida en 2.1.2 o en 2.2.3), *es igual a la integral de Riemann de f en D.*

b) *Si f es continua en el dominio D simple en cualquier orden* (es decir respecto de x y respecto de y a la vez), *entonces las dos integrales dobles iteradas de f* (definidas en 2.1.2 y 2.2.3), *son iguales entre sí,* (se puede cambiar el orden de integración de las variables), *y su valor es la integral de Riemann de f en D.*

Demostración: La parte b) es una consecuencia inmediata de la parte a): en efecto, por la parte a) cada una de las dos integrales iteradas es igual a la integral Riemann. Por lo tanto son iguales entre sí.

Para probar la parte a) consideramos el resultado del Corolario 5.4.2 del teorema de Riemann-Lebesgue: la función f es integrable Riemann en D. Entonces por definición de integrabilidad Riemann (ver definición 5.2.2), existe el límite A de las sumas de Riemann σ de f:

$$A = \lim_{||(\Delta x, \Delta y)|| \to 0} \sigma \quad (1)$$

Hemos usado la definición 5.2.2, donde aplicamos la igualdad que define la norma de una partición $||\mathcal{P}|| = ||(\Delta x, \Delta y)||$.

Por otro lado, por la proposición 2.1.7 (si el dominio D es simple respecto de x) o por la proposición 2.2.5 (si el dominio D es simple respecto de y) se obtiene que el límite iterado de las sumas de Riemann existe y es igual a la integral doble iterada I de f.

El objetivo es probar que

$$A = I \quad \text{a probar.}$$

Para fijar ideas supongamos que D es simple respecto de x, contenido en el rectángulo $R = [a, b] \times [c, d]$, y usemos la proposición 2.1.7:

$$I = \lim_{\Delta x \to 0} \lim_{\Delta y \to 0} \sigma$$

Esto quiere decir que para toda partición $\{x_i\}_{1 \leq i \leq n}$ fija en $[a, b]$, existe el límite

$$F(\{x_i\}) = \lim_{\Delta y \to 0} \sigma \quad (2)$$

y que a su vez existe

$$I = \lim_{\Delta x \to 0} F(\{x_i\}) \quad (3)$$

Por (1), para todo $\epsilon^* > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$||(\Delta x, \Delta y)|| < \delta \;\Rightarrow\; |\sigma - A| < \epsilon^* \quad (4)$$

Tomemos el límite cuando $\Delta y \to 0$ en la desigualdad (4) con la partición $\{x_i\}$ del intervalo $[a, b]$ fija, cumpliendo $\Delta x < \delta/2$ y la partición del intervalo $[c, d]$ cualquiera cumpliendo $\Delta y < \delta/2$ y $\Delta y \to 0$. Resulta:

$$\Delta x < \delta/2 \;\Rightarrow\; |\lim_{\Delta y \to 0} \sigma - A| \leq \epsilon* < \epsilon$$

En la última desigualdad hemos elegido, dado $\epsilon > 0$, cualquier otro $\epsilon^* > 0$ estrictamente menor que ϵ.

Sustituyendo (2) en la desigualdad anterior, resulta:

$$\Delta x < \delta/2 \;\Rightarrow\; |F(\{x_i\}) - A| < \epsilon \quad (5)$$

Resumiendo, la afirmación (5) prueba que dado $\epsilon > 0$ existe $\delta_1 = \delta/2$ tal que

$$\Delta x < \delta_1 \;\Rightarrow\; |F(\{x_i\}) - A| < \epsilon$$

Lo anterior es por definición de límite, lo mismo que:

$$A = \lim_{\Delta x \to 0} F(\{x_i\}) \quad (6)$$

Reuniendo (3) y (6) se concluye $A = I$ como queríamos demostrar. $\square$

5.6. Generalización para integrales múltiples.

Para integrales triples y para integrales múltiples en general, valen los mismos argumentos, sustituyendo los rectángulos R de $\mathbb{R}^2$ por prismas rectangulares R en $\mathbb{R}^3$ (para integrales triples), o por intervalos q-dimensionales contenidos en $\mathbb{R}^q$ (para integrales múltiples en general, con $q \geq 1$ natural).

Hay que sustituir también, donde aparece, el área de un rectángulo en $\mathbb{R}^2$ por el volumen de un prisma rectangular en $\mathbb{R}^3$ (en intergrales triples), o por la medida q-dimensional de un intervalo q-dimensional en $\mathbb{R}^q$ (para integrales múltiples generales).

También habrá que sustituir en algunos de los enunciados y demostraciones, el conjunto simple bidimensional $D \subset \mathbb{R}^2$ por el conjunto simple tridimensional $D \subset \mathbb{R}^3$ (para integrales triples), o por el conjunto simple q-dimensional (para integrales múltiples en general.)

Las gráficas (curvas) de funciones continuas $y = \phi(x), \quad x \in [a, b]$ que forman parte del borde en dominios simples D bidimensionales de $\mathbb{R}^2$, usados para estudiar las integrales Riemann dobles, tendrán que ser sustituidas por las gráficas (superficies) de funciones continuas $z = \phi(x, y)$, que forman parte del borde en dominios simples D de $\mathbb{R}^3$ (para integrales triples), o por las gráficas (hipersuperficies) de funciones continuas $x_q = \phi(x_1, x_2, \ldots, x_{q-1})$ que forman parte del borde en dominios simples de $\mathbb{R}^q$ (para integrales múltiples en general).

Las funciones $f(x, y)$ integrables e integradas Riemann en dominios D bidimensionales, en el caso de las integrales dobles, deben sustituirse por funciones $f(x, y, z)$ en las integrales triples, y por $f(x_1, x_2, \ldots, x_q)$ en dominios de $\mathbb{R}^q$ para las integrales múltiples en general.