

6. Integrales dobles impropias.

6.1. Integrales impropias convergentes y no convergentes.

La teoría de integrales dobles, triples y múltiples en general desarrollada hasta el momento, es aplicable a la integración de funciones acotadas en conjuntos acotados (pues tienen que estar contenidos en rectángulos).

La integración en \mathbb{R}^2 , \mathbb{R}^3 y \mathbb{R}^q se extiende mediante las llamadas integrales impropias a los siguientes dos casos:

- El dominio D no es acotado. Esto da lugar a las llamadas integrales impropias de primera especie. Por ejemplo:

$$\iint_D \frac{1}{((x^2 + y^2)^5 + 1)} dx dy$$

donde

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy \geq 0\}$$

La función integrando $1/((x^2 + y^2)^5 + 1)$ está acotada y es continua en D , pero D no está contenido en ningún rectángulo, porque no es acotado, ya que D es todo el primer cuadrante del plano x, y .

- El dominio D es acotado, pero la función integrando en un punto (x_0, y_0) del borde de D , no está definida o no está acotada en ningún entorno de ese punto. Esto da lugar a las llamadas integrales impropias de segunda especie. Por ejemplo:

$$\iint_D \frac{1}{x^2 + y^2} dx dy$$

donde

$$D = [0, 1] \times [0, 1] \setminus \{(0, 0)\}$$

El dominio D está acotado, pero la función integrando $1/(x^2 + y^2)$ no está acotada en ningún entorno del origen $(0, 0)$, que está en el borde de D .

Nota 6.1.1. La teoría que desarrollaremos a continuación será válida solamente para integrales dobles, triples o q -múltiples con $q \geq 2$. No es válida para integrales impropias de funciones de una sola variable real, que se vieron en el curso de Cálculo 1.

En particular la definición de integral doble o triple impropia convergente que veremos aquí, no es la misma que la se usa para integrales impropias en la recta real para funciones de varias variables, sino que es mucho más exigente, y *no equivale a ella*.

Como consecuencia, uno de los resultados que se obtienen ahora es que toda integral doble, triple o q -múltiple (con $q \geq 2$) impropia, *es convergente si y solo si es absolutamente convergente*.

Ese resultado es falso para funciones de una sola variable, como se sabe del curso de cálculo 1. Para funciones de una sola variable, toda integral impropia absolutamente convergente es convergente, pero no vale el recíproco.

Definición 6.1.2. Conjuntos medibles.

Un conjunto acotado D de R^q se dice que es *medible* (según Jordan) si su frontera es un conjunto de medida nula.

Por ejemplo, los conjuntos simples de R^2 y de R^3 y los conjuntos descomponibles en simples, son conjuntos medibles. Esta afirmación, en el caso de dominios planos, resulta inmediatamente de aplicar la definición 2.2.11, y las proposiciones 5.3.2 y 5.3.3.

Haremos el desarrollo de la teoría para integrales dobles. La generalización a integrales triples y q -múltiples se realiza como se explicó en la subsección 5.6.

Definición 6.1.3. Sucesión básica de conjuntos de integración.

Sea D un conjunto no vacío de R^2 , y sea $f(x, y)$ una función definida en D .

Se llama *sucesión básica de conjuntos de integración de f en D* , si existe alguna, a una sucesión creciente de dominios D_n compactos y medibles contenidos en D :

$$D_1 \subset D_2 \subset D_3 \subset D_4 \subset \dots \subset D_n \subset D_{n+1} \subset \dots \subset D$$

tales que todo compacto K medible contenido en D está contenido en algún D_n , y además f es integrable Riemann en D_n para todo $n \geq 1$. Es decir existe:

$$I_n = \iint_{D_n} f(x, y) \, dx dy$$

La condición de que todo compacto K medible contenido en D esté contenido en algún D_n se dice abreviadamente: “ D_n aproxima de D ”.

Con esta definición no es difícil demostrar que si existe una sucesión básica de conjuntos de integración de f en D entonces f es integrable Riemann en todo conjunto compacto y medible K contenido en D . (Usar el teorema 5.4.1 de Riemann-Lebesgue.)

Ejemplo 6.1.4. Sea $f(x, y) = 1/(\sqrt{xy})$ en $D = (0, 1] \times (0, 1]$. Una sucesión básica de conjuntos de integración de f en D es

$$D_n = [1/n, 1] \times [1/n, 1]$$

En efecto, al crecer n el conjunto D_n (que es simple, por lo tanto es compacto y medible) es cada vez más grande, y se aproxima de D . Además como f es continua en D_n (ya que su único punto de discontinuidad es el origen que no pertenece a D_n), y D_n es un dominio simple, entonces f es integrable Riemann en D_n . (Ver corolario 5.4.2.)

Existen infinitas otras elecciones de conjuntos D_n . Por ejemplo, otra elección de una sucesión básica de conjuntos de integración es

$$D_n = \{0 < x \leq 1, 0 < y \leq 1, xy \geq \frac{1}{n}\}$$

Ejemplo 6.1.5. Sea $f(x, y) = 1/((x^2 + y^2)^5 + 1)$ en $D = [0, +\infty) \times [0, +\infty)$. El conjunto D es el primer cuadrante. Una sucesión básica de conjuntos de integración de f en D es

$$D_n = [0, n] \times [0, n]$$

Estos D_n son cuadrados de vértices $(0,0)$, $(0,n)$, (n,n) , $(n,0)$. Existen infinitas elecciones para la sucesión básica de conjuntos de integración. Otra elección posible es

$$\tilde{D}_n = \{0 \leq x, 0 \leq y, 0 \leq x^2 + y^2 \leq n^2\}$$

Estos \tilde{D}_n son las intersecciones con el primer cuadrante de discos compactos de centro en el origen y radio n .

Definición 6.1.6. Integral doble impropia convergente.

Sea D un conjunto no vacío de R^2 , y sea $f(x,y)$ una función real definida en D .

Se dice que la integral (impropia)

$$\iint_D f(x,y) dx dy = L$$

es convergente, e igual al número real L si existe alguna y **para toda** sucesión $\{D_n\}$ básica de conjuntos de integración de f en D se cumple:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \iint_{D_n} f(x,y) dx dy = L$$

(Nota: el número L debe ser el mismo para cualquier sucesión básica de conjuntos de integración de f en D que se elija.)

6.2. Ejemplos.

En esta subsección daremos ejemplos de todos los tipos de integrales dobles, convergentes y no convergentes, de primera y de segunda especie. Los procedimientos de clasificación varían según la función en el integrando sea positiva (esto es ≥ 0) o no lo sea.

Daremos también, intercalados entre los ejemplos, los enunciados de las propiedades básicas que se usan en la clasificación y cálculo de integrales dobles impropias. Las pruebas de estas propiedades estarán en las secciones siguientes.

Ejemplo 6.2.1. Integral impropia convergente de segunda especie, con integrando positivo.

Probar que es convergente y calcular

$$\iint_D \frac{1}{\sqrt{xy}} dx dy \text{ en } D = (0,1] \times (0,1]$$

Esta integral impropia de segunda especie se suele escribir como:

$$\int_0^1 dx \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{xy}} dy$$

Tomemos por ejemplo, como una sucesión básica de conjuntos de integración particular: $D_n = [1/n, 1] \times [1/n, 1]$. Se obtiene lo siguiente:

$$I_n = \iint_{D_n} \frac{1}{\sqrt{xy}} dx dy = \int_{1/n}^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx \int_{1/n}^1 \frac{1}{\sqrt{y}} dy = 2\sqrt{x} \Big|_{x=1/n}^{x=1} \cdot 2\sqrt{y} \Big|_{y=1/n}^{y=1} = 4(1 - 1/\sqrt{n})^2$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} 4(1 - 1/\sqrt{n})^2 = 4$$

Sin embargo, lo anterior NO es la definición de integral impropia convergente. (Ver definición 6.1.6.) Habría que verificar que **para toda** sucesión básica de conjuntos de integración D_n (y no solo para una elegida en particular), el límite de las integrales I_n existe y además que es el mismo número real L .

En general, vale lo siguiente:

Nota 6.2.2. *La integral impropia de una función f puede ser convergente o no serlo, aún cuando en una cierta sucesión particular de conjuntos básicos de integración el límite exista finito.*

Puede suceder que en otra sucesión particular el límite no exista, o exista y sea infinito, o exista, sea finito pero diferente del anterior. En estos casos la integral impropia de f es no convergente.

Como es imposible verificar de a una, en todas las sucesiones básicas de conjuntos de integración, que el límite existe, es finito y da lo mismo en todas, usaremos condiciones necesarias y suficientes de convergencia.

Veremos en el teorema 6.3.1, que si la función f en el integrando es positiva, como en este ejemplo $f(x, y) = 1/\sqrt{xy} > 0$, entonces, basta con que exista una sucesión particular de conjuntos básicos de integración donde el límite existe y es finito igual a L , para que en todas las demás sucesiones ocurra lo mismo, y el límite sea igual al mismo número L . Pero hay que tener cuidado: esa propiedad no es cierta si la función integrando f no es ≥ 0 . En resumen:

6.2.3. Condición necesaria y suficiente de convergencia de integrales impropias dobles de integrando positivo.

$f \geq 0$ en D , $\exists \{D_n\}$ sucesión básica de integración de f en D tal que

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \iint_{D_n} f \, dx dy = L \in \mathbb{R} &\Rightarrow \\ \Rightarrow \iint_D f \, dx dy \text{ es convergente e igual a } L \end{aligned}$$

Aplicando este resultado al ejemplo 6.2.1, obtenemos:

$$\int_0^1 dx \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{xy}} dy \text{ es convergente e igual a } 4. \quad \square$$

Ejemplo 6.2.4. Integral impropia no convergente de segunda especie, con integrando no positivo.

Probar que **no** es convergente la siguiente integral impropia:

$$\iint_D \frac{y-x}{xy} \, dx dy \text{ en } D = (0, 1] \times (0, 1]$$

Si elegimos una sucesión básica particular de conjuntos de integración D_n y el límite de las integrales en ellos no existe, o existe y no es finito, entonces por definición la integral impropia no es convergente. (Ver definición 6.1.6.)

Pero, si en la sucesión particular que elegimos el límite existe y es finito, entonces no podemos concluir nada. (Observar que en este caso la función integrando $(y - x)/(xy)$ no es ≥ 0 y por eso no podemos aplicar el criterio 6.2.3.

Si en la primera sucesión básica particular de conjuntos de integración que elegimos, el límite existe y es finito igual a L , pero en una segunda sucesión básica, el límite existe y es finito pero diferente de L , entonces por definición la integral impropia no es convergente. (Ver definición 6.1.6.)

Tomaremos sucesiones básicas de conjuntos de integración de la forma

$$D_{\epsilon, \delta} = \{\epsilon \leq x \leq 1, \delta \leq y \leq 1\}$$

donde ϵ y δ dependerán de n , serán positivos, y tenderán a 0 cuando $n \rightarrow +\infty$. Así por ejemplo, podremos tomar como una primera sucesión básica de conjuntos de integración $D_n = D_{1/n, 1/n}$ eligiendo $\epsilon = 1/n$ y $\delta = 1/n$. Podremos tomar como una segunda sucesión básica por ejemplo $\tilde{D}_n = D_{1/n, 2/n}$ eligiendo $\epsilon = 1/n$ y $\delta = 2/n$.

Calculemos la integral doble en $D_{\epsilon, \delta}$ de f :

$$\begin{aligned} I_{\epsilon, \delta} &= \iint_{D(\epsilon, \delta)} \frac{y-x}{xy} dx dy = \int_{\epsilon}^1 dx \int_{\delta}^1 \frac{y-x}{xy} dy = \\ &= \int_{\epsilon}^1 \left(\frac{y}{x} - \text{Log} y \Big|_{y=\delta}^{y=1} \right) dx = \int_{\epsilon}^1 \frac{1-\delta}{x} + \text{Log} \delta dx = (1-\delta) \text{Log} x + (\text{Log} \delta) x \Big|_{x=\epsilon}^{x=1} \\ I_{\epsilon, \delta} &= (1-\epsilon) \text{Log} \delta - (1-\delta) \text{Log} \epsilon \end{aligned}$$

Tomando $D_n = D_{1/n, 1/n} = [1/n, 1] \times [1/n, 1]$, es decir, $\epsilon = 1/n$, $\delta = 1/n$, resulta:

$$I_n = \iint_{D_n} \frac{y-x}{xy} dx dy = \left(1 - \frac{1}{n}\right) \text{Log}(1/n) - \left(1 - \frac{1}{n}\right) \text{Log}(1/n) = 0$$

Luego:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} 0 = 0 \quad (1)$$

Por otro lado, tomando $\tilde{D}_n = D_{1/n, 2/n} = [1/n, 1] \times [2/n, 1]$, es decir, $\epsilon = 1/n$, $\delta = 2/n$, resulta:

$$\begin{aligned} \tilde{I}_n &= \iint_{\tilde{D}_n} \frac{y-x}{xy} dx dy = \left(1 - \frac{1}{n}\right) \text{Log}(2/n) - \left(1 - \frac{2}{n}\right) \text{Log}(1/n) = \\ &= \left(1 - \frac{1}{n}\right) \text{Log}(2) + \left(1 - \frac{1}{n}\right) \text{Log}(1/n) - \left(1 - \frac{1}{n}\right) \text{Log}(1/n) + \left(\frac{1}{n}\right) \text{Log}(1/n) = \\ &= \left(1 - \frac{1}{n}\right) \text{Log}(2) - \left(\frac{1}{n}\right) \text{Log}(n) \end{aligned}$$

Luego:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \tilde{I}_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \text{Log}(2) - \left(\frac{1}{n}\right) \text{Log}(n) = \text{Log} 2 \quad (2)$$

Se obtuvieron dos sucesiones básicas de conjuntos de integración D_n y \tilde{D}_n tales que los límites de las integrales en ambas existen, son finitos, pero diferentes entre sí. (En la igualdad (1) se llegó a que el límite de las integrales I_n en D_n es 0; en cambio en la igualdad (2) se llegó a que el límite de las integrales \tilde{I}_n en \tilde{D}_n es $\text{Log}(2)$.) Entonces, aplicando la definición 6.1.6, la integral impropia dada no converge. \square

Ejemplo 6.2.5. Integral impropia convergente de primera especie, con integrando positivo.

Demostrar que es convergente la integral impropia siguiente:

$$\iint_D \frac{1}{(x^2 + y^2)^5 + 1} dx dy$$

en el primer cuadrante D :

$$D = [0, +\infty) \times [0, +\infty)$$

Esta integral impropia se suele escribir como:

$$\int_0^{+\infty} dx \int_0^{+\infty} \frac{1}{(x^2 + y^2)^5 + 1} dy$$

Tomemos como sucesión básica

$$D_n = \{0 \leq x, 0 \leq y, 0 \leq x^2 + y^2 \leq n^2\}$$

Calculemos la integral de la función dada en D_n pasando a coordenadas polares ρ, φ ; $x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$, con Jacobiano $J(\rho, \varphi) = \rho$. Observemos que en coordenadas polares el dominio D_n resulta $\{0 \leq \varphi \leq \pi/2, 0 \leq \rho \leq n\}$. Se obtiene:

$$I_n = \iint_{D_n} \frac{1}{(x^2 + y^2)^5 + 1} dx dy = \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^n \frac{\rho}{(\rho^2)^5 + 1} d\rho = \frac{\pi}{2} \int_0^n \frac{\rho}{(\rho^2)^5 + 1} d\rho$$

Luego, tomando límite cuando $n \rightarrow +\infty$, y recordando la definición de integral impropia de primera especie de funciones $F(x)$ de una sola variable:

$$\int_a^{+\infty} F(x) dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b F(x) dx$$

se obtiene:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = \frac{\pi}{2} \int_0^{+\infty} \frac{\rho}{(\rho^2)^5 + 1} d\rho \quad (1)$$

Por lo tanto, para saber que ese límite existe, habrá que clasificar la integral impropia en una sola variable

$$J = \int_0^{+\infty} F(\rho) d\rho, \quad \text{donde } F(\rho) = \frac{\rho}{\rho^{10} + 1} \quad (2)$$

Más abajo explicamos que esta integral impropia J de función $F(\rho)$ en una sola variable real, es convergente.

Por lo tanto, usando (1) se deduce que $\lim I_n = L \in \mathbb{R}$. Hemos probado pues que para cierta elección de la sucesión básica de conjuntos de integración D_n , existe real finito el límite de las integrales de $f(x, y)$ en D_n .

El integrando $f(x, y) = 1/(x^2 + y^2)^5 + 1$ es una función ≥ 0 en D . Entonces, podemos aplicar el resultado siguiente, que demostraremos en el teorema 6.3.1, y que ya explicamos en el ejemplo 6.2.1:

$f \geq 0$ en D , $\exists \{D_n\}$ sucesión básica de integración de f en D tal que

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \iint_{D_n} f \, dx dy &= L \in \mathbb{R} \Rightarrow \\ \Rightarrow \iint_D f \, dx dy &\text{ es convergente e igual a } L \end{aligned}$$

Por lo tanto concluimos que la integral impropia dada es convergente. No calculamos su valor L ya que no calculamos el límite L de las integrales I_n de la igualdad (1). En este ejemplo solo probamos que existe ese límite, y que por lo tanto la integral impropia dada es convergente. \square

Quedó pendiente de probar que la integral impropia J de la igualdad (2) en una sola variable ρ , es convergente. Para ello nos remitimos a algunos conocimientos sobre integrales impropias del curso de Cálculo 1, que repasaremos a continuación.

El integrando $F(\rho) = \rho/(\rho^{10} + 1)$ en la igualdad (2), es positivo. Luego, podemos aplicar el siguiente criterio de convergencia por comparación por límites:

6.2.6. Criterio de comparación por límites de integrales impropias en una sola variable.

Sean $F(x) \geq 0$, $G(x) \geq 0$ tales que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{F(x)}{G(x)} = \lambda, \quad \lambda \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$$

Si λ es real y si $\int_a^{+\infty} G(x) \, dx$ converge, entonces $\int_a^{+\infty} F(x) \, dx$ también converge.

Si $\lambda \neq 0$ y si $\int_a^{+\infty} G(x) \, dx$ no converge entonces $\int_a^{+\infty} F(x) \, dx$ tampoco.

Para saber con qué función $G(x)$ vamos a comparar, recordemos la siguiente propiedad de las integrales impropias de primera especie en una sola variable:

6.2.7. Integrales impropias de referencia de primera especie en una sola variable.

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} \, dx \text{ converge si y solo si } \alpha > 1$$

Volviendo a nuestra función $F(\rho) = \rho/(\rho^{10} + 1)$, a la que llegamos en el desarrollo del ejemplo 6.2.5, teníamos que clasificar la integral impropia de primera especie

$$J = \int_0^{+\infty} \frac{\rho}{\rho^{10} + 1} \, d\rho$$

en una sola variable ρ .

Aplicaremos el criterio de comparación por límites 6.2.6, con una función $G(\rho)$ adecuada, que se pueda clasificar según la referencia 6.2.7. Veamos entonces a qué función $G(\rho) = \rho^\alpha$ es equivalente el límite de $F(\rho)$ cuando $\rho \rightarrow +\infty$

$$\lim_{\rho \rightarrow +\infty} \frac{\rho}{\rho^{10} + 1} = \lim_{\rho \rightarrow +\infty} \frac{1}{\rho^9} = 0$$

Usaremos como función $G(\rho) = 1/\rho^9$. Entonces se cumple:

$$\lim_{\rho \rightarrow +\infty} \frac{F(\rho)}{G(\rho)} = \lim_{\rho \rightarrow +\infty} \frac{\rho/(\rho^{10} + 1)}{1/\rho^9} = \lim_{\rho \rightarrow +\infty} \frac{\rho^{10}}{\rho^{10} + 1} = 1 \in \mathbb{R}$$

Por el criterio 6.2.6 la integral $\int_0^{+\infty} F(\rho) d\rho$ converge si converge la de $G(\rho)$. Por la clasificación del párrafo 6.2.7, la integral $\int_0^{+\infty} G(\rho) d\rho$ es convergente porque $G(\rho) = 1/\rho^9$, con exponente $9 > 1$. Entonces

$$J = \int_0^{+\infty} \frac{\rho}{\rho^{10} + 1} d\rho \quad \text{converge.} \quad \square$$

Ejemplo 6.2.8. Integral impropia convergente de primera especie, con integrando no positivo.

Demostrar que es convergente la siguiente integral impropia:

$$\iint_D \frac{y - x}{(x + y + 1)[(x^2 + y^2)^5 + 1]} dx dy \quad \text{donde } D = [0, +\infty) \times [0, +\infty)$$

No podemos aplicar el mismo procedimiento que en el ejemplo 6.2.5, porque la función en el integrando no es siempre ≥ 0 en D . Aunque demos que existe finito el límite L de las integrales en una sucesión básica D_n de conjuntos de integración, este límite no tiene por qué existir en otra sucesión de conjuntos \tilde{D}_n , y si existe no tiene por qué ser el mismo, en todas las sucesiones básicas de conjuntos de integración.

Usaremos el siguiente resultado, a probar en el teorema 6.4.1:

6.2.9. Criterio de convergencia absoluta.

$$\iint_D |f(x, y)| dx dy \text{ converge} \quad \Leftrightarrow \quad \iint_D f(x, y) dx dy \text{ converge}$$

Notamos que la propiedad anterior es falsa para integrales impropias de funciones de una variable. Para estas últimas, la convergencia en valor absoluto es suficiente pero no necesaria para la convergencia sin el valor absoluto. Sin embargo, para integrales impropias dobles, triples, y múltiples en general (con $q \geq 2$ variables), la convergencia absoluta es equivalente (es decir necesaria y suficiente) para la convergencia sin el valor absoluto.

Aplicando el criterio 6.2.9 de convergencia absoluta, para probar que converge la integral impropia dada en el ejemplo 6.2.8, probaremos que converge la integral impropia:

$$\iint_D \left| \frac{y - x}{(x + y + 1)[(x^2 + y^2)^5 + 1]} \right| dx dy \quad \text{donde } D = [0, +\infty) \times [0, +\infty)$$

La función en el integrando ahora es positiva. Por lo tanto podemos usar el mismo procedimiento que en el ejemplo 6.2.5. Sin embargo, para ahorrar expresar esta integral en una sucesión básica de conjuntos de integración, y no tener que reducirla al cálculo de integrales iteradas simples, aplicaremos ahora algunos criterios de convergencia de integrales impropias múltiples, que demostraremos en la próxima subsección.

6.2.10. Criterio de comparación para integrales impropias dobles:

$$0 \leq f(x, y) \leq g(x, y) \quad \forall (x, y) \in D$$

$$\iint_D g(x, y) dx dy \text{ converge} \quad \Rightarrow \quad \iint_D f(x, y) dx dy \text{ converge.}$$

Dicho en palabras, si f es menor que g y la integral de g converge (ya sea de primera o de segunda especie), entonces la de f también.

Análogamente, exponemos el criterio de no convergencia (que es el contrarrecíproco del anterior):

$$f(x, y) \geq g(x, y) \geq 0 \quad \forall (x, y) \in D$$

$$\iint_D g(x, y) \, dx dy \text{ no converge} \quad \Rightarrow \quad \iint_D f(x, y) \, dx dy \text{ no converge.}$$

Observar que aquí la hipótesis se invierte: es f mayor que g . Dicho en palabras, si f es mayor que g y la integral de g no converge entonces la de f tampoco.

Aplicando este criterio de comparación para integrales dobles, a la función $\left| \frac{y-x}{(x+y+1)[(x^2+y^2)^5+1]} \right|$ del ejemplo 6.2.8, se obtiene:

$$\left| \frac{y-x}{(x+y+1)[(x^2+y^2)^5+1]} \right| \leq \frac{|y|+|x|}{|x+y+1| \cdot [(x^2+y^2)^5+1]} \quad (1)$$

Siendo $(x, y) \in D$, se tiene $x \geq 0$, $y \geq 0$. Luego $|x+y| = x+y = |x|+|y|$ en D . Por lo tanto, $|x|+|y| < x+y+1 = |x+y+1| \Rightarrow (|x|+|y|)/|x+y+1| < 1$. Sustituyendo en (1) se deduce:

$$\left| \frac{y-x}{(x+y+1)[(x^2+y^2)^5+1]} \right| \leq \frac{1}{(x^2+y^2)^5+1} \quad (2)$$

Por lo visto en el ejemplo 6.2.5 la integral impropia

$$\iint_D \frac{1}{(x^2+y^2)^5+1} \, dx dy \quad \text{converge.} \quad (3)$$

Reuniendo (2) y (3), y aplicando el Criterio de Comparación para integrales dobles en 6.2.10, se deduce entonces que

$$\iint_D \left| \frac{y-x}{(x+y+1)[(x^2+y^2)^5+1]} \right| \, dx dy \quad \text{converge.}$$

y por lo tanto, por el criterio de convergencia absoluta en 6.2.9:

$$\iint_D \frac{y-x}{(x+y+1)[(x^2+y^2)^5+1]} \, dx dy \quad \text{converge.} \quad \square$$

Ejemplo 6.2.11. Integral impropia no convergente de segunda especie.

Demostrar que no converge la siguiente integral impropia:

$$\iint_D \frac{1}{x^2+y^2} \, dx dy \quad \text{en } D = [0, 1] \times [0, 1] \setminus \{0, 0\}$$

Elegimos como sucesión básica de conjuntos de integración:

$$D_n = \{0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, \frac{1}{n^2} \leq x^2+y^2\}$$

Los conjuntos D_n son los que resultan del cuadrado D al quitar el interior de un círculo de radio $1/n$ centrado en el origen.

Consideremos los dominios sustitutos

$$\tilde{D}_n = \{0 \leq x, 0 \leq y, \frac{1}{n^2} \leq x^2 + y^2 \leq 1\}$$

Estos \tilde{D}_n son los dominios D_n a los que hemos quitado el conjunto de puntos E que distan más que 1 del origen. Los conjuntos \tilde{D}_n no forman una sucesión básica de dominios de integración en D , porque su unión no es D , sino que les falta el conjunto E . Sin embargo la integral en D_n es igual a la integral en \tilde{D}_n más la integral en E .

Calculemos la integral I_n de la función dada en el dominio D_n :

$$I_n = \iint_{D_n} \frac{1}{x^2 + y^2} dx dy = \iint_{\tilde{D}_n} \frac{1}{x^2 + y^2} dx + \iint_E \frac{1}{x^2 + y^2} dx dy =$$

Llamemos A a la integral en E ; es una integral de Riemann, número real constante independiente de n . Se obtiene, calculando en coordenadas polares la integral en el dominio \tilde{D}_n :

$$\begin{aligned} I_n &= A + \iint_{\tilde{D}_n} \frac{1}{x^2 + y^2} dx dy = A + \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_{1/n}^1 \frac{\rho}{\rho^2} d\rho = \\ &= A + \int_0^{\pi/2} \text{Log}(\rho) \Big|_{\rho=1/n}^{\rho=1} d\varphi = A + \frac{\pi}{2} \text{Log}(n) \end{aligned}$$

Tomando límite cuando $n \rightarrow +\infty$ resulta:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = A + \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{2} \text{Log}(n) = +\infty$$

Por lo tanto la integral impropia dada no converge. \square

Ejemplo 6.2.12. Discusión de convergencia de una integral impropia de segunda especie.

Clasificar (esto es: decidir si es convergente o no lo es), discutiendo según el valor de la constante real α , la siguiente integral impropia:

$$\iint_D \frac{x - y - (1/2)}{(x^2 + y^2)^\alpha} dx dy \quad \text{en } D = [0, 1] \times [0, 1] \setminus \{(0, 0)\}$$

Aplicaremos el criterio de convergencia absoluta en 6.2.9. Por lo tanto la integral impropia dada es convergente o no lo es, según sea la integral de la función en valor absoluto:

$$\iint_D \frac{|x - y - (1/2)|}{(x^2 + y^2)^\alpha} dx dy \quad \text{en } D = [0, 1] \times [0, 1] \setminus \{(0, 0)\}$$

Tomemos como dominios D_n que forman una sucesión básica de integración los mismos que los del ejemplo anterior:

$$D_n = \{0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, \frac{1}{n^2} \leq x^2 + y^2\}$$

Consideremos los dominios sustitutos

$$\tilde{D}_n = \{0 \leq x, 0 \leq y, \frac{1}{n^2} \leq x^2 + y^2 \leq 1\}$$

Estos \tilde{D}_n son los dominios D_n a los que hemos quitado el conjunto de puntos E que distan más que 1 del origen. Los conjuntos \tilde{D}_n no forman una sucesión básica de dominios de integración en D , porque su unión no es D , sino que les falta el conjunto E . Sin embargo la integral en D_n es igual a la integral en \tilde{D}_n más la integral en E .

Calculemos la integral I_n de la función dada, en valor absoluto, en el dominio D_n :

$$I_n = \iint_{D_n} \frac{|x - y - (1/2)|}{(x^2 + y^2)^\alpha} dx dy = \iint_{\tilde{D}_n} \frac{|x - y - (1/2)|}{(x^2 + y^2)^\alpha} dx + \iint_E \frac{|x - y - (1/2)|}{(x^2 + y^2)^\alpha} dx dy =$$

Llamemos A a la integral en E ; es una integral de Riemann, número real constante independiente de n . Se obtiene, calculando en coordenadas polares la integral en el dominio \tilde{D}_n :

$$\begin{aligned} I_n &= A + \iint_{\tilde{D}_n} \frac{|x - y - (1/2)|}{(x^2 + y^2)^\alpha} dx dy = A + \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_{1/n}^1 \frac{|\rho(\cos \varphi - \operatorname{sen} \varphi) - (1/2)|}{\rho^{2\alpha}} \cdot \rho d\rho = \\ &= A + \frac{\pi}{2} \int_{1/n}^1 \frac{|\rho(\cos \varphi - \operatorname{sen} \varphi) - (1/2)|}{\rho^{2\alpha-1}} d\rho \end{aligned}$$

Tomemos ahora el límite cuando $n \rightarrow +\infty$ de las integrales I_n :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = A + \int_0^1 \frac{|\rho(\cos \varphi - \operatorname{sen} \varphi) - (1/2)|}{\rho^{2\alpha-1}} d\rho \quad (1)$$

Por lo tanto el límite anterior existe real o no es real, según sea convergente o no lo sea la integral impropia en una variable real J siguiente:

$$J = \int_0^1 \frac{|\rho(\cos \varphi - \operatorname{sen} \varphi) - (1/2)|}{\rho^{2\alpha-1}} d\rho \quad (2)$$

Discusión:

- Si la integral impropia J de (2) es convergente, entonces por (1) el $\lim I_n$ existe y es real. En ese caso, la integral impropia doble en D de la función $|x - y - (1/2)|/(x^2 + y^2)^\alpha$ es convergente, aplicando el criterio 6.2.3, porque en una sucesión básica particular existe el límite real de las integrales. (Y porque la función en el integrando es positiva). Entonces, por el criterio de convergencia absoluta del párrafo 6.2.9 la integral dada es convergente.
- Si la integral impropia J de (2) no es convergente, entonces por (1) el $\lim I_n$ no es real. En ese caso, la integral impropia doble en D de la función $|x - y - (1/2)|/(x^2 + y^2)^\alpha$ no es convergente, por definición 6.1.6. Entonces, por el criterio de convergencia absoluta del párrafo 6.2.9 la integral dada no es convergente.

Hemos reducido entonces el problema a estudiar una integral impropia de segunda especie en una sola variable real, como las que se estudian en el curso de Cálculo 1.

Para clasificar la integral J usaremos los siguientes criterios vistos en el curso de Cálculo 1:

6.2.13. Criterio de comparación por límites de integrales impropias en una sola variable.

Sean $F(x) \geq 0$, $G(x) \geq 0$ tales que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{F(x)}{G(x)} = \lambda, \quad \lambda \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$$

Si λ es real y si $\int_0^b G(x) dx$ converge, entonces $\int_0^b F(x) dx$ también converge.

Si $\lambda \neq 0$ y si $\int_0^b G(x) dx$ no converge entonces $\int_0^b F(x) dx$ tampoco.

Para saber con qué función $G(x)$ vamos a comparar, recordemos la siguiente propiedad de las integrales impropias de segunda especie en una sola variable:

6.2.14. Integrales impropias de referencia de segunda especie en una sola variable.

$$\int_0^b \frac{1}{x^\alpha} dx \text{ converge si y solo si } \alpha < 1$$

Volviendo a la integral J a la que reducimos el problema del ejemplo 6.2.12, teníamos que clasificar la siguiente integral impropia:

$$J = \int_0^1 \frac{|\rho(\cos \varphi - \operatorname{sen} \varphi) - (1/2)|}{\rho^{2\alpha-1}} d\rho \quad (2)$$

Consideremos la función en el integrando

$$F(\rho) = \frac{|\rho(\cos \varphi - \operatorname{sen} \varphi) - (1/2)|}{\rho^{2\alpha-1}}$$

Para tomar una función de referencia $G(\rho)$ y aplicar el criterio de comparación por límites en 6.2.13, busquemos un equivalente de $F(\rho)$ cuando $\rho \rightarrow 0$:

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} F(\rho) = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{|\rho(\cos \varphi - \operatorname{sen} \varphi) - (1/2)|}{\rho^{2\alpha-1}} = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{1/2}{\rho^{2\alpha-1}}$$

Entonces usemos como función de referencia:

$$G(\rho) = \frac{1}{\rho^{2\alpha-1}}$$

Se tiene:

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{F(\rho)}{G(\rho)} = \lim_{\rho \rightarrow 0} |\rho(\cos \varphi - \operatorname{sen} \varphi) - (1/2)| = \frac{1}{2}$$

Luego aplicando el criterio de comparación por límites en 6.2.13, se obtiene:

$$\int_0^1 G(\rho) d\rho = \int_0^1 \frac{1}{\rho^{2\alpha-1}} d\rho \text{ converge} \quad \Leftrightarrow \quad \int_0^1 F(\rho) d\rho \text{ converge} .$$

Por lo tanto hemos reducido el problema a estudiar la convergencia de la integral impropia:

$$K = \int_0^1 \frac{1}{\rho^{2\alpha-1}} d\rho$$

Usando el criterio de referencia en 6.2.14, se tiene que K es convergente si y solo si el exponente del denominador ρ cumple: $2\alpha - 1 < 1$. Esto es equivalente a $2\alpha < 2$, o lo que es lo mismo: $\alpha < 1$.

Concluimos entonces la siguiente respuesta para el ejercicio propuesto en el ejemplo 6.2.12:

- Si $\alpha < 1$ la integral doble impropia dada es convergente.
- Si $\alpha \geq 1$ la integral doble impropia dada no es convergente. \square

6.3. Integrales impropias de funciones no negativas.

Ahora enunciaremos nuevamente y demostraremos los criterios usados para calcular o clasificar las integrales impropias de los ejemplos en la sección anterior.

Teorema 6.3.1. Condición necesaria y suficiente de convergencia de integrales impropias de funciones positivas.

Si $f \geq 0$ en D , y si existe una sucesión básica de conjuntos de integración D_n tal que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \iint_{D_n} f \, dx dy = L \in \mathbb{R}$$

entonces

$$\iint_D f \, dx dy \text{ es convergente e igual a } L.$$

y recíprocamente.

Demostración: Basta probar que para dos sucesiones básicas $\{D_n\}$ y $\{\tilde{D}_n\}$ cualesquiera de conjuntos de integración en D , se cumple

$$L = \tilde{L} \quad (\text{a probar}) \quad (1)$$

siendo

$$L = \lim_{n \rightarrow +\infty} I_n, \quad I_n = \iint_{D_n} f \, dx dy$$

$$\tilde{L} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \tilde{I}_n, \quad \tilde{I}_n = \iint_{\tilde{D}_n} f \, dx dy$$

Dado \tilde{D}_m , como es compacto contenido en D y como $\{D_n\}$ es una sucesión básica de conjuntos de integración en D , entonces existe algún N natural tal que $\tilde{D}_m \subset D_n$ para todo $n \geq N$. (Ver en la definición 6.1.3 que D_n aproxima a D .)

Por lo tanto podemos escribir

$$D_n = \tilde{D}_m \cup H, \quad \text{donde } H = D_n \setminus \tilde{D}_m$$

Por la aditividad de la integral respecto a los conjuntos donde se integra:

$$\iint_{D_n} f \, dx dy = \iint_{\tilde{D}_m} f \, dx dy + \iint_H f \, dx dy \quad (2)$$

Siendo por hipótesis $f \geq 0$, entonces la integral de f en H es mayor o igual que cero. Por lo tanto, sustituyendo en (2), resulta:

$$I_n = \iint_{D_n} f \, dx dy \geq \iint_{\tilde{D}_m} f \, dx dy = \tilde{I}_m$$

En resumen, hemos probado que dado m existe N tal que

$$\tilde{I}_m \leq I_n \quad \forall n \geq N \quad (3)$$

Luego, haciendo $n \rightarrow +\infty$ en (3), con m fijo, se deduce:

$$\tilde{I}_m \leq L = \lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$$

Por lo tanto, concluimos que para todo m natural, se cumple: $\tilde{I}_m \leq L$. Haciendo $m \rightarrow +\infty$, como L es fijo, resulta:

$$\tilde{L} = \lim_{m \rightarrow +\infty} \tilde{I}_m \leq L$$

Hemos probado que

$$\tilde{L} \leq L \quad (4)$$

Reproduciendo la prueba, con los roles de D_n y \tilde{D}_n intercambiados, resulta

$$L \leq \tilde{L} \quad (5)$$

Reuniendo (4) y (5) se deduce la igualdad (1) que queríamos probar. \square

Teorema 6.3.2. Criterio de comparación para integrales impropias múltiples de integrando positivo.

a)

$$0 \leq f(x, y) \leq g(x, y) \quad \forall (x, y) \in D$$

$$\iint_D g(x, y) \, dx dy \text{ converge} \Rightarrow \iint_D f(x, y) \, dx dy \text{ converge.}$$

b)

$$f(x, y) \geq g(x, y) \geq 0 \quad \forall (x, y) \in D$$

$$\iint_D g(x, y) \, dx dy \text{ no converge} \Rightarrow \iint_D f(x, y) \, dx dy \text{ no converge.}$$

Demostración: La parte b) es el contrarrecíproco de la parte a). En efecto, por absurdo, si la tesis de b) fuese falsa, entonces la integral de f sería convergente. Aplicando la parte a) (con los roles de f y g intercambiados) sería también convergente la integral de g , contradiciendo la hipótesis de b).

Ahora probemos la parte a):

Por el teorema 6.3.1, para probar que la integral de f es convergente, basta demostrar que para cierta sucesión básica $\{D_n\}$ de conjuntos de integración en D , se cumple que la sucesión de integrales I_n tiene límite real, siendo:

$$I_n = \iint_{D_n} f \, dx dy$$

Una sucesión de reales tiene límite real si y solo si es de Cauchy. Entonces hay que probar que I_n es de Cauchy, es decir:

Dado $\epsilon > 0$ hay que probar que existe N tal que:

$$m \geq n > N \quad \Rightarrow \quad |I_m - I_n| < \epsilon \quad (\text{a probar}) \quad (1)$$

Como por hipótesis la integral impropia de g es convergente, entonces la sucesión de integrales J_n es de Cauchy, siendo

$$J_n = \iint_{D_n} g \, dx dy$$

Siendo J_n una sucesión de Cauchy de números reales, se cumple que para todo $\epsilon > 0$ existe N tal que:

$$m \geq n > N \quad \Rightarrow \quad |J_m - J_n| < \epsilon \quad (2)$$

Siendo $m \geq n$ se cumple $D_m \supset D_n$, entonces para cualquier función h (en particular para g o f) se cumple:

$$\iint_{D_m} h \, dx dy = \iint_{D_n} h \, dx dy + \iint_H h \, dx dy, \quad \text{donde } H = D_m \setminus D_n$$

Luego, si $h \geq 0$:

$$\iint_{D_m} h \, dx dy - \iint_{D_n} h \, dx dy = \iint_H h \, dx dy \geq 0$$

Como por hipótesis $0 \leq f \leq g$ entonces:

$$\begin{aligned} I_m - I_n &= \iint_{D_m} f \, dx dy - \iint_{D_n} f \, dx dy = \iint_H f \, dx dy \leq \iint_H g \, dx dy = \\ &= \iint_H g \, dx dy = \iint_{D_m} g \, dx dy - \iint_{D_n} g \, dx dy = J_m - J_n \end{aligned} \quad (3)$$

Además como por (3) son todas integrales en H de funciones positivas, se cumple

$$|I_m - I_n| = I_m - I_n \geq 0, \quad |J_m - J_n| = J_m - J_n \geq 0 \quad (4)$$

Por lo tanto usando (3) y (4) se concluye:

$$|I_m - I_n| \leq |J_m - J_n| \quad (5)$$

Reuniendo (2) con (5) se concluye:

$$m \geq n > N \quad \Rightarrow \quad |I_n - I_m| < \epsilon$$

que es la desigualdad (1) que queríamos probar. \square

6.4. Integrales impropias absolutamente convergentes.

Teorema 6.4.1. Convergencia absoluta es equivalente a la convergencia.

$$\iint_D |f(x, y)| \, dx dy \text{ converge} \quad \Leftrightarrow \quad \iint_D f(x, y) \, dx dy \text{ converge}$$

Demostración:

Directo: Probemos primero que la convergencia absoluta (convergencia de la integral del valor absoluto de la función) implica la convergencia sin valor absoluto.

Sean la parte positiva f^+ y la parte negativa f^- de f definidas como sigue:

$$f^+ = \max f, 0, \quad f^- = \max -f, 0$$

La parte positiva f^+ de f es nula donde f es negativa y es igual a f donde $f \geq 0$. La parte negativa f^- es nula donde f es positiva, y es igual a $-f$ donde $f \leq 0$. Obsérvese que:

$$f = f^+ - f^-, \quad f^+ \geq 0, \quad f^- \geq 0, \quad |f| = f^+ + f^- \quad (1)$$

Aplicamos el criterio de comparación demostrado en el teorema 6.3.2. Siendo por hipótesis convergente la integral de la función en valor absoluto, y siendo $0 \leq f^+ \leq |f|$, $0 \leq f^- \leq |f|$, entonces son convergentes las integrales impropias de f^+ y de f^- :

Por lo tanto, para cualquier sucesión básica $\{D_n\}$ de conjuntos de integración en D , existen los límites reales L^+ y L^- siguientes, y son siempre los mismos, independientes de la sucesión:

$$L^+ = \lim_{n \rightarrow +\infty} \iint_{D_n} f^+ \, dx dy, \quad L^- = \lim_{n \rightarrow +\infty} \iint_{D_n} f^- \, dx dy \quad (2)$$

Siendo $f = f^+ - f^-$, de (2) se deduce que existe el límite real $L = L^+ - L^-$, y es por lo tanto independiente de la sucesión básica $\{D_n\}$ elegida, tal que:

$$L = \lim_{n \rightarrow +\infty} \iint_{D_n} f \, dx dy = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\iint_{D_n} f^+ \, dx dy - \iint_{D_n} f^- \, dx dy \right) = L^+ - L^-$$

Esto prueba que la integral de f en D es convergente, con queríamos demostrar.

Recíproco: Probemos ahora que la convergencia de la integral impropia de la función sin valor absoluto, implica la convergencia absoluta (convergencia de la integral de la función con valor absoluto). Esta propiedad es falsa para integrales impropias de funciones de una sola variable. Es cierta solamente para integrales múltiples impropias con $q \geq 2$ variables (integrales dobles, triples o q -múltiples).

Como en la parte anterior, igualdades (1), sean f^+ y f^- las partes positiva y negativa de f respectivamente. Si probamos que las integrales impropias en D de f^+ y de f^- son convergentes,

entonces la integral impropia de $|f| = f^+ + f^-$ también será convergente, que es lo que queremos demostrar.

Probaremos que la integral impropia en D de f^+ es convergente. Para probar que la de f^- también es convergente, habrá que aplicar la misma demostración sustituyendo f por $-f$.

Por hipótesis sabemos que la integral de $f = f^+ - f^-$ es convergente. Supongamos por absurdo que la integral de f^+ fuera no convergente. Entonces para cualquier sucesión básica $\{D_n\}$ las integrales

$$I_n^+ = \iint_{D_n} f^+ dx dy$$

formarían una sucesión creciente (porque $D_n \subset D_{n+1}$ y $f \geq 0$) de números reales ≥ 0 no acotada superiormente (porque si fuera acotada sería convergente).

Siendo $\{I_n^+\}$ creciente y no acotada superiormente, existe $n(N)$ creciente, tal que

$$I_{n(N)}^+ - I_{n(N-1)}^+ > 1 \quad (3)$$

Tomemos la siguiente sucesión básica nueva \tilde{D}_N que se obtiene intercalando inmediatamente después del conjunto $D_n = \tilde{D}_{2N-1}$ de la sucesión básica dada²⁶, el conjunto

$$\tilde{D}_{2N} = D_n \cup (D_{n(N)} \cap \{f = f^+\})$$

siguiendo²⁷ con $\tilde{D}_{2N+1} = D_{n(N)}$.

Como por hipótesis la integral de f es convergente a L , entonces las integrales \tilde{I}_N de f en los conjuntos \tilde{D}_N de la nueva sucesión básica, tienden a L . Por lo tanto:

$$\tilde{I}_{2N-1} = \iint_{D_n} f dx dy \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} L$$

$$\tilde{I}_{2N} = \iint_{\tilde{D}_{2N}} f dx dy = \iint_{D_n} f dx dy + \iint_{D_{n(N)} \setminus D_n} f^+ dx dy \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} L$$

donde $n = n(N-1)$.

Restando miembro a miembro las dos igualdades anteriores, se obtiene:

$$\iint_{D_{n(N)} \setminus D_{n(N-1)}} f^+ dx dy \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 0 \quad (4)$$

Pero por la aditividad de la integral doble respecto al dominio de integración:

$$\iint_{D_{n(N)} \setminus D_{n(N-1)}} f^+ dx dy = \iint_{D_{n(N)}} f^+ dx dy - \iint_{D_{n(N-1)}} f^+ dx dy = \tilde{I}_{n(N)}^+ - \tilde{I}_{n(N-1)}^+ > 1 \quad (5)$$

Al final de la desigualdad (5) se usó la desigualdad (3).

Las afirmaciones (4) y (5) son contradictorias. Con esto se llega a un absurdo, terminando la demostración. \square

²⁶Aquí tendría que ser $n = n(N-1)$

²⁷Como f es continua excepto en un conjunto de medida nula, previamente definimos $f = 0$ en los puntos de discontinuidad de f . Siendo así, la integral de f no cambia, y los conjuntos $\{f = f^+\}$ y $\{f = f^-\}$ son cerrados. Por lo tanto cortados con D_n son compactos.

BIBLIOGRAFÍA:

[1] de Burgos, J. : *Cálculo Infinitesimal de Varias Variables*. Editorial Mc. Graw-Hill, ISBN 84-481-1621-6, Madrid, 1995.

[2] Courant, R. : *Introducción al Cálculo y al Análisis Matemático. Vol. II* Editorial LIMUSA, ISBN 968-18-0640-9, México, 1996.

[3] Apostol, T. : *Calculus. Vol. II*. Editorial Reverté.

[4] IMERL: *Ejercicios para el curso de Cálculo II*.

Repartidos 1 a 9, Facultad de Ingeniería, UdelaR., Montevideo, 2006. Publicados en:
<http://imerl.fing.edu.uy/calculo2/material.htm>