Teorema de Stokes

Jana Rodriguez Hertz
Cálculo 3

IMERL

17 de mayo de 2011

teorema de Stokes

teorema de Stokes

- $D \subset \mathbb{R}^2$ simplemente conexo

teorema de Stokes

teorema de Stokes

- $D \subset \mathbb{R}^2$ simplemente conexo
- $\Phi : D \to \mathbb{R}^3$ superficie regular

teorema de Stokes

teorema de Stokes

- $D \subset \mathbb{R}^2$ simplemente conexo
- $\Phi : D \to \mathbb{R}^3$ superficie regular
- $\vec{X}$ campo vectorial

teorema de Stokes

teorema de Stokes

- $D \subset \mathbb{R}^2$ simplemente conexo
- $\Phi : D \to \mathbb{R}^3$ superficie regular
- $\vec{X}$ campo vectorial
- $\partial S = \Phi(\partial D)$ orientada en forma compatible con N

teorema de Stokes

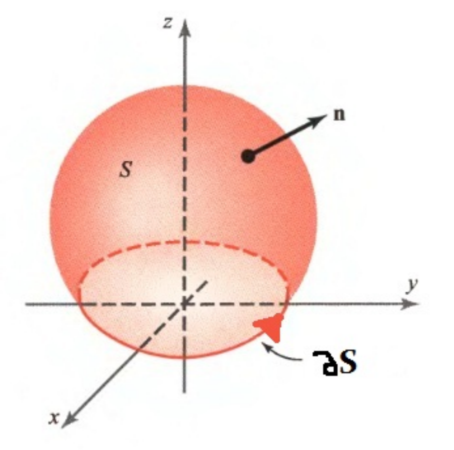
teorema de Stokes

- $D \subset \mathbb{R}^2$ simplemente conexo
- $\Phi : D \to \mathbb{R}^3$ superficie regular
- $\vec{X}$ campo vectorial
- $\partial S = \Phi(\partial D)$ orientada en forma compatible con N
- $\Rightarrow$

$$\iint_S \mathrm{rot}\,\vec{X}.N\,dS = \int_{\partial S} \vec{X}\,ds$$

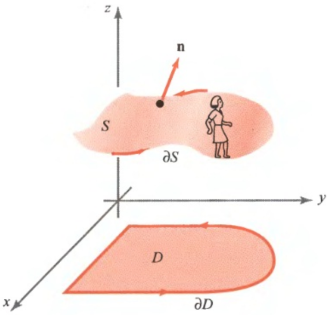
orientación compatible

orientación compatible



orientación compatible

observación



si uno camina por el borde de la curva, la superficie queda a la izquierda

observación

observación

- El teorema de Stokes vale también para superficies donde D es unión finita de simplemente conexos.

observación

observación

- El teorema de Stokes vale también para superficies donde D es unión finita de simplemente conexos.
- en ese caso, el borde ∂S puede quedar disconexo (más de una curva)

observación

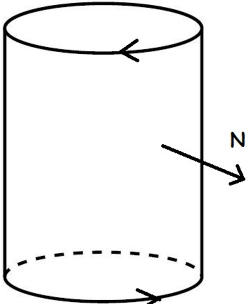
observación

- El teorema de Stokes vale también para superficies donde D es unión finita de simplemente conexos.
- en ese caso, el borde ∂S puede quedar disconexo (más de una curva)
- prestar atención a la orientación de las curvas borde !

observación

observación

- El teorema de Stokes vale también para superficies donde D es unión finita de simplemente conexos.
- en ese caso, el borde ∂S puede quedar disconexo (más de una curva)
- prestar atención a la orientación de las curvas borde !



ejemplo

ejemplo

- calcular el flujo del rotor del campo

$$\vec{X} = (y + x^2, y^2 + z + x, z + y)$$

ejemplo

ejemplo

- calcular el flujo del rotor del campo

$$\vec{X} = (y + x^2, y^2 + z + x, z + y)$$

- a través de la superficie S dada por

ejemplo

ejemplo

- calcular el flujo del rotor del campo

$$\vec{X} = (y + x^2, y^2 + z + x, z + y)$$

- a través de la superficie S dada por
- $z = xy(1 - x)(1 - y)$, con $x, y \in [0, 1]$

ejemplo

ejemplo

- calcular el flujo del rotor del campo

$$\vec{X} = (y + x^2, y^2 + z + x, z + y)$$

- a través de la superficie S dada por
- $z = xy(1 - x)(1 - y)$, con $x, y \in [0, 1]$
- orientada con la normal que forma ángulo agudo con k

ejemplo

ejemplo

- primero parametrizamos

ejemplo

ejemplo

- primero parametrizamos
- $\begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = uv(1-u)(1-v) \end{cases}$ con $u, v \in [0,1]$

ejemplo

ejemplo

- primero parametrizamos
- $\begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = uv(1-u)(1-v) \end{cases}$ con $u, v \in [0, 1]$
- orientación de la superficie

ejemplo

ejemplo

- primero parametrizamos
- $\begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = uv(1-u)(1-v) \end{cases}$ con $u, v \in [0, 1]$
- orientación de la superficie
- $\Phi_u = (1, 0, *)$

ejemplo

ejemplo

- primero parametrizamos
- $\begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = uv(1-u)(1-v) \end{cases}$ con $u, v \in [0,1]$
- orientación de la superficie
- $\Phi_u = (1, 0, *)$
- $\Phi_v = (0, 1, *)$

ejemplo

ejemplo

- primero parametrizamos
- $\begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = uv(1-u)(1-v) \end{cases}$ con $u, v \in [0,1]$
- orientación de la superficie
- $\Phi_u = (1, 0, *)$
- $\Phi_v = (0, 1, *)$
- $\Phi_u \wedge \Phi_v = (*, *, 1)$

ejemplo

ejemplo

- primero parametrizamos
- $\begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = uv(1-u)(1-v) \end{cases}$ con $u, v \in [0,1]$
- orientación de la superficie
- $\Phi_u = (1, 0, *)$
- $\Phi_v = (0, 1, *)$
- $\Phi_u \wedge \Phi_v = (*, *, 1)$
- coincide con la normal que se se pide

ejemplo

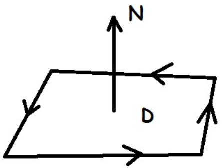
ejemplo

- orientación compatible de la curva borde:

ejemplo

ejemplo

- orientación compatible de la curva borde:

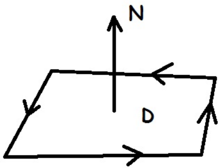


-

ejemplo

ejemplo

- orientación compatible de la curva borde:

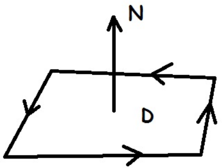


-
- Stokes: $\iint_S \operatorname{rot} \vec{X}.N\, dS = \int_{\partial S} \vec{X} ds$

ejemplo

ejemplo

- orientación compatible de la curva borde:

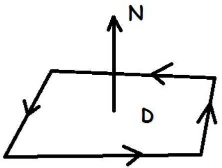


-
- Stokes: $\iint_S \text{rot}\,\vec{X}.N\,dS = \int_{\partial S} \vec{X} ds$
- $\partial S = \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2 \cup \mathcal{C}_3 \cup \mathcal{C}_4$

ejemplo

ejemplo

- orientación compatible de la curva borde:



-
- Stokes: $\int\int_S \text{rot}\,\vec{X}.N\,dS = \int_{\partial S} \vec{X}ds$
- $\partial S = \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2 \cup \mathcal{C}_3 \cup \mathcal{C}_4$
- llamamos $I_k = \int_{\mathcal{C}_k} \vec{X}ds$, con $k = 1, 2, 3, 4$

ejemplo

cálculo de I_1

- $\mathcal{C}_1 \begin{cases} x = u \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$

ejemplo

cálculo de I_1

- $\mathcal{C}_1 \begin{cases} x = u \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$
- $\vec{X} = (y + x^2, y^2 + z + x, z + y)$

ejemplo

cálculo de I_1

- $\mathcal{C}_1 \begin{cases} x = u \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$
- $\vec{X} = (y + x^2, y^2 + z + x, z + y)$
- $I_1 = \int_0^1 u^2 du$

ejemplo

cálculo de I_1

- $\mathcal{C}_1 \begin{cases} x = u \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$
- $\vec{X} = (y + x^2, y^2 + z + x, z + y)$
- $I_1 = \int_0^1 u^2 du = \frac{1}{3}$

ejemplo

cálculo I_2

- $\mathcal{C}_2 \begin{cases} x = 1 \\ y = v \\ z = 0 \end{cases}$

ejemplo

cálculo I_2

- $\mathcal{C}_2 \begin{cases} x = 1 \\ y = v \\ z = 0 \end{cases}$
- $\vec{X} = (y + x^2, y^2 + z + x, z + y)$

ejemplo

cálculo I_2

- $\mathcal{C}_2 \begin{cases} x = 1 \\ y = v \\ z = 0 \end{cases}$
- $\vec{X} = (y + x^2, y^2 + z + x, z + y)$
- $I_2 = \int_0^1 (v^2 + 1)dv$

ejemplo

cálculo I_2

- $\mathcal{C}_2 \begin{cases} x = 1 \\ y = v \\ z = 0 \end{cases}$
- $\vec{X} = (y + x^2, y^2 + z + x, z + y)$
- $I_2 = \int_0^1 (v^2 + 1) dv = \frac{4}{3}$

ejemplo

cálculo I_3

- $\mathcal{C}_3 \begin{cases} x = 1 - u \\ y = 1 \\ z = 0 \end{cases}$

ejemplo

cálculo I_3

- $\mathcal{C}_3 \begin{cases} x = 1 - u \\ y = 1 \\ z = 0 \end{cases}$
- $\vec{X} = (y + x^2, y^2 + z + x, z + y)$

ejemplo

cálculo I_3

- $\mathcal{C}_3 \begin{cases} x = 1 - u \\ y = 1 \\ z = 0 \end{cases}$
- $\vec{X} = (y + x^2, y^2 + z + x, z + y)$
- $I_3 = -\int_0^1 [1 + (1-u)^2] du$

ejemplo

cálculo I_3

- $\mathcal{C}_3 \begin{cases} x = 1 - u \\ y = 1 \\ z = 0 \end{cases}$
- $\vec{X} = (y + x^2, y^2 + z + x, z + y)$
- $I_3 = -\int_0^1 [1 + (1-u)^2] du = -\frac{4}{3}$

ejemplo

cálculo I_4

- $\mathcal{C}_4 \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 - v \\ z = 0 \end{cases}$

ejemplo

cálculo I_4

- $\mathcal{C}_4 \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 - v \\ z = 0 \end{cases}$
- $\vec{X} = (y + x^2, y^2 + z + x, z + y)$

ejemplo

cálculo I_4

- $\mathcal{C}_4 \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 - v \\ z = 0 \end{cases}$
- $\vec{X} = (y + x^2, y^2 + z + x, z + y)$
- $I_2 = -\int_0^1 (1 - v)^2 dv$

ejemplo

cálculo I_4

- $\mathcal{C}_4 \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 - v \\ z = 0 \end{cases}$
- $\vec{X} = (y + x^2, y^2 + z + x, z + y)$
- $I_2 = -\int_0^1 (1 - v)^2 dv = -\frac{1}{3}$

ejemplo

ejemplo

- $\int\int_S \text{rot}\, \vec{X}.N\, dS = I_1 + I_2 + I_3 + I_4$

ejemplo

ejemplo

- $\iint_S \operatorname{rot} \vec{X}.N\, dS = I_1 + I_2 + I_3 + I_4 = 0$
- Ejercicio: calcular $\iint_S \operatorname{rot} \vec{X}.N\, dS$ sin usar el teorema de Stokes.

demostración Stokes

demostración para el caso $z = z(x, y)$.

demostración Stokes

demostración para el caso $z = z(x, y)$.

- $\vec{X} = (A, B, C)$

demostración Stokes

demostración para el caso $z = z(x, y)$.

- $\vec{X} = (A, B, C)$
- $\operatorname{rot} \vec{X} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ A & B & C \end{vmatrix}$

demostración Stokes

demostración para el caso $z = z(x, y)$.

- $\vec{X} = (A, B, C)$
- $\operatorname{rot} \vec{X} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ A & B & C \end{vmatrix}$
- $\operatorname{rot} \vec{X} = (C_y - B_z, A_z - C_x, B_x - A_y)$

demostración Stokes

demostración para el caso $z = z(x, y)$.

- $\vec{X} = (A, B, C)$
- $\operatorname{rot} \vec{X} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ A & B & C \end{vmatrix}$
- $\operatorname{rot} \vec{X} = (C_y - B_z, A_z - C_x, B_x - A_y)$
- $\Phi_x \wedge \Phi_y = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & z_x \\ 0 & 1 & z_y \end{vmatrix}$

demostración Stokes

demostración para el caso $z = z(x, y)$.

- $\vec{X} = (A, B, C)$
- $\operatorname{rot} \vec{X} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ A & B & C \end{vmatrix}$
- $\operatorname{rot} \vec{X} = (C_y - B_z, A_z - C_x, B_x - A_y)$
- $\Phi_x \wedge \Phi_y = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & z_x \\ 0 & 1 & z_y \end{vmatrix}$
- $\Phi_x \wedge \Phi_y = (-z_x, -z_y, 1)$

demostración Stokes

- $\iint_S \operatorname{rot} \vec{X}.N\, dS =$
  $\iint_D z_x(B_z - C_y) + z_y(C_x - A_z) + (B_x - A_y) dx\, dy$ (*)

demostración Stokes

- $\iint_S \text{rot}\,\vec{X}.N\,dS =$
  $\iint_D z_x(B_z - C_y) + z_y(C_x - A_z) + (B_x - A_y)dx\,dy$ (*)
- por otro lado

demostración Stokes

- $\iint_S \operatorname{rot} \vec{X}.N\, dS =$
  $\iint_D z_x(B_z - C_y) + z_y(C_x - A_z) + (B_x - A_y) dx\, dy$ (*)
- por otro lado
- $\int_{\partial D} \vec{X} ds = \int_{\partial D} Adx + Bdy + Cdz$

demostración Stokes

- $\iint_S \text{rot}\, \vec{X}.N\, dS =$
  $\iint_D z_x(B_z - C_y) + z_y(C_x - A_z) + (B_x - A_y) dx\, dy$ (*)
- por otro lado
- $\int_{\partial D} \vec{X} ds = \int_{\partial D} Adx + Bdy + Cdz$
- $\int_{\partial D} \vec{X} ds = \int_{\partial D} (A + Cz_x) dx + (B + Cz_y) dy$

demostración Stokes

- $\iint_S \text{rot}\,\vec{X}.N\,dS =$ $\iint_D z_x(B_z - C_y) + z_y(C_x - A_z) + (B_x - A_y)dx\,dy$ (*)
- por otro lado
- $\int_{\partial D} \vec{X}ds = \int_{\partial D} Adx + Bdy + Cdz$
- $\int_{\partial D} \vec{X}ds = \int_{\partial D}(A + Cz_x)dx + (B + Cz_y)dy$
- x teorema de Green, o teorema de Stokes en el plano:

demostración Stokes

- $\iint_S \operatorname{rot} \vec{X}.N\, dS =$
  $\iint_D z_x(B_z - C_y) + z_y(C_x - A_z) + (B_x - A_y) dx\, dy$ (*)
- por otro lado
- $\int_{\partial D} \vec{X} ds = \int_{\partial D} Adx + Bdy + Cdz$
- $\int_{\partial D} \vec{X} ds = \int_{\partial D} (A + Cz_x)dx + (B + Cz_y)dy$
- x teorema de Green, o teorema de Stokes en el plano:
- $\int_{\partial D} \vec{X} ds = \iint_D \frac{\partial}{\partial x}(B + Cz_y) - \frac{\partial}{\partial y}(A + Cz_x) dx\, dy$

demostración Stokes

- $\iint_S \operatorname{rot} \vec{X}.N\, dS =$
$\iint_D z_x(B_z - C_y) + z_y(C_x - A_z) + (B_x - A_y)dx\, dy$ (*)
- por otro lado
- $\int_{\partial D} \vec{X} ds = \int_{\partial D} Adx + Bdy + Cdz$
- $\int_{\partial D} \vec{X} ds = \int_{\partial D} (A + Cz_x)dx + (B + Cz_y)dy$
- x teorema de Green, o teorema de Stokes en el plano:
- $\int_{\partial D} \vec{X} ds = \iint_D \frac{\partial}{\partial x}(B + Cz_y) - \frac{\partial}{\partial y}(A + Cz_x)dx\, dy$
- $= \iint_D B_x + B_z z_x + C_x z_y + C_z z_x z_y + Cz_{xy} - A_y - A_z z_y - C_y z_x - C_z z_y z_x - Cz_{yx} dx\, dy$

demostración Stokes

- $\iint_S \text{rot}\, \vec{X}.N\, dS =$ $\iint_D z_x(B_z - C_y) + z_y(C_x - A_z) + (B_x - A_y) dx\, dy$ (*)
- por otro lado
- $\int_{\partial D} \vec{X} ds = \int_{\partial D} Adx + Bdy + Cdz$
- $\int_{\partial D} \vec{X} ds = \int_{\partial D} (A + Cz_x)dx + (B + Cz_y)dy$
- x teorema de Green, o teorema de Stokes en el plano:
- $\int_{\partial D} \vec{X} ds = \iint_D \frac{\partial}{\partial x}(B + Cz_y) - \frac{\partial}{\partial y}(A + Cz_x) dx\, dy$
- $= \iint_D B_x + B_z z_x + C_x z_y + C_z z_x z_y + Cz_{xy} - A_y - A_z z_y - C_y z_x - C_z z_y z_x - Cz_{yx} dx\, dy$
- $=$ (*)