Sistemas de ecuaciones lineales

Presentación general

Método de escalerización de Gauss

Ejemplo

$$
\left\{
\begin{array}{rrrrrrrl}
-x_1 & & & x_4 & & & & = 200 \\
& x_2 & & -x_4 & +x_5 & & & = 100 \\
& & x_3 & & +x_5 & & & = 700 \\
x_1 & & & & & -x_6 & & = 100 \\
& x_2 & & & & -x_6 & +x_7 & = 600 \\
& & x_3 & & & & +x_7 & = 900
\end{array}
\right.
$$

Nuestro objeto de estudio

será:

- una manera sistemática de resolución

Nuestro objeto de estudio

será:

- una manera sistemática de resolución
- las propiedades del conjunto de las soluciones

Sistema $m \times n$

también Sistema lineal de m ecuaciones con n incógnitas

$$(S)\left\{\begin{array}{cccccc} a_{11}x_1 & +a_{12}x_2 & +\ldots+ & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & +a_{22}x_2 & +\ldots+ & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & & \\ a_{m1}x_1 & +a_{m2}x_2 & +\ldots+ & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}\right.$$

Sistema $m \times n$

también Sistema lineal de m ecuaciones con n incógnitas

$$(S)\left\{\begin{array}{llllll} a_{11}x_1 & +a_{12}x_2 & +\ldots+ & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & +a_{22}x_2 & +\ldots+ & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & & \\ a_{m1}x_1 & +a_{m2}x_2 & +\ldots+ & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}\right.$$

coeficientes

Sistema $m \times n$

también Sistema lineal de m ecuaciones con n incógnitas

$$(S)\left\{\begin{array}{llllll} a_{11}x_1 & + a_{12}x_2 & + \ldots + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + a_{22}x_2 & + \ldots + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & & \\ a_{m1}x_1 & + a_{m2}x_2 & + \ldots + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}\right.$$

coeficientes (dato)

Sistema $m \times n$

también Sistema lineal de m ecuaciones con n incógnitas

$$(S) \begin{cases} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \ldots + a_{1n} x_n = b_1 \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \ldots + a_{2n} x_n = b_2 \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \\ a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \ldots + a_{mn} x_n = b_m \end{cases}$$

coeficientes (dato)

términos independientes

Sistema $m \times n$

también Sistema lineal de m ecuaciones con n incógnitas

$$(S) \begin{cases} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \ldots + a_{1n} x_n = b_1 \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \ldots + a_{2n} x_n = b_2 \\ \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \\ a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \ldots + a_{mn} x_n = b_m \end{cases}$$

coeficientes (dato)

términos independientes (dato)

Sistema $m \times n$

también Sistema lineal de m ecuaciones con n incógnitas

$$(S)\begin{cases} a_{11}\,x_1 + a_{12}\,x_2 + \ldots + a_{1n}\,x_n = b_1 \\ a_{21}\,x_1 + a_{22}\,x_2 + \ldots + a_{2n}\,x_n = b_2 \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \\ a_{m1}\,x_1 + a_{m2}\,x_2 + \ldots + a_{mn}\,x_n = b_m \end{cases}$$

coeficientes (dato)

términos independientes (dato)

incógnitas

Sistema $m \times n$

también Sistema lineal de m ecuaciones con n incógnitas

$$(S)\left\{\begin{array}{lllll} a_{11}x_1 & +a_{12}x_2 & +\ldots+ & a_{1n}x_n & = b_1 \\ a_{21}x_1 & +a_{22}x_2 & +\ldots+ & a_{2n}x_n & = b_2 \\ \vdots & & \vdots & & \\ a_{m1}x_1 & +a_{m2}x_2 & +\ldots+ & a_{mn}x_n & = b_m \end{array}\right.$$

coeficientes (dato)

términos independientes (dato)

incógnitas (variables a determinar)

Solución del sistema (S)

cualquier tira (ordenada) de números

$$X = (x_1, \ldots, x_n)$$

que verifique (S)

Conjunto solución S del sistema (S)

es el conjunto de todas las X que son soluciones de (S)

Conjunto solución $\mathcal{S}$ del sistema (S)

es el conjunto de todas las X que son soluciones de (S)

resolver (S) es encontrar todas las tiras del conjunto $\mathcal{S}$

Ejemplo 1

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 - x_2 = 1 \end{cases}$$

Ejemplo 1

$$\begin{cases} x_1 & + & x_2 & = 1 \\ x_1 & - & x_2 & = 1 \end{cases}$$

Se verifica fácilmente que

$$\mathcal{S} = \{(1,0)\}$$

Ejemplo 1

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 - x_2 = 1 \end{cases}$$

Se verifica fácilmente que

$$\mathcal{S} = \{(1,0)\}$$

Sistema compatible determinado

Ejemplo 2

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 = 2 \end{cases}$$

Ejemplo 2

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 = 2 \end{cases}$$

$(1, 0)$ es solución,

Ejemplo 2

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 = 2 \end{cases}$$

$(1,0)$ es solución, pero también $(0,1)$ verifica el sistema

Ejemplo 2

$$\begin{cases} x_1 & + & x_2 & = 1 \\ 2x_1 & + & 2x_2 & = 2 \end{cases}$$

$(1,0)$ es solución, pero también $(0,1)$ verifica el sistema y de hecho el sistema tiene infinitas soluciones

Ejemplo 2

$$\begin{cases} \ \ x_1 + \ \ x_2 = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 = 2 \end{cases}$$

$(1, 0)$ es solución, pero también $(0, 1)$ verifica el sistema y de hecho el sistema tiene infinitas soluciones
(averiguar cuáles son)

Ejemplo 2

$$\begin{cases} \ \ x_1 + \ \ x_2 = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 = 2 \end{cases}$$

$(1,0)$ es solución, pero también $(0,1)$ verifica el sistema y de hecho el sistema tiene infinitas soluciones
(averiguar cuáles son)
Sistema compatible indeterminado

Ejemplo 3

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 + x_2 = 2 \end{cases}$$

Ejemplo 3

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 + x_2 = 2 \end{cases}$$

no admite soluciones

Ejemplo 3

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 + x_2 = 2 \end{cases}$$

no admite soluciones
Sistema incompatible

en resumen

según cómo sea el conjunto solución,el sistema se clasifica en:

(S)

en resumen

según cómo sea el conjunto solución,el sistema se clasifica en:

$$(S) \quad \longrightarrow \quad \boxed{\begin{array}{l}\text{incompatible} \\ \mathcal{S} = \emptyset\end{array}}$$

en resumen

según cómo sea el conjunto solución,el sistema se clasifica en:

$$(S) \quad \rightarrow \quad \boxed{\begin{array}{l}\text{incompatible}\\ \mathcal{S} = \emptyset\end{array}}$$

$$\searrow$$

compatible

en resumen

según cómo sea el conjunto solución,el sistema se clasifica en:

$(S) \longrightarrow$ $\boxed{\text{incompatible} \quad \mathcal{S} = \emptyset}$

$\searrow$

compatible $\longrightarrow$ $\boxed{\text{determinado} \quad \mathcal{S} = \{X_0\}}$

en resumen

según cómo sea el conjunto solución,el sistema se clasifica en:

$(S) \longrightarrow$ $\boxed{\begin{array}{l}\text{incompatible} \\ \mathcal{S} = \emptyset\end{array}}$

$\searrow$

compatible $\longrightarrow$ $\boxed{\begin{array}{l}\text{determinado} \\ \mathcal{S} = \{X_0\}\end{array}}$

$\searrow$ $\boxed{\begin{array}{l}\text{indeterminado} \\ \mathcal{S} \supsetneqq \{X_0\}\end{array}}$

Método de eliminación de Gauss

Método de eliminación de Gauss

Comencemos por analizar un par de ejemplos

Ejemplo 4

Problema: Encontrar las soluciones del sistema

$$\left\{\begin{array}{rrrl} x & +y & +2z & = 8 \\ x & +2y & +z & = 0 \\ 2x & +y & +z & = 4 \end{array}\right.$$

Ejemplo 4

Problema: Encontrar las soluciones del sistema

$$\begin{cases} x & +y & +2z & = 8 \\ x & +2y & +z & = 0 \\ 2x & +y & +z & = 4 \end{cases}$$

PASO 1: eliminar las x

Ejemplo 4

Problema: Encontrar las soluciones del sistema

$$\begin{cases} x & +y & +2z & = 8 & \leftarrow \text{Fija} \\ x & +2y & +z & = 0 \\ 2x & +y & +z & = 4 \end{cases}$$

Ejemplo 4

Problema: Encontrar las soluciones del sistema

$$\begin{cases} x + y + 2z = 8 \leftarrow F_1 \\ x + 2y + z = 0 \\ 2x + y + z = 4 \end{cases}$$

Ejemplo 4

Problema: Encontrar las soluciones del sistema

$$\left\{\begin{array}{rrrl} x & +y & +2z & = 8 \quad \leftarrow F_1 \\ x & +2y & +z & = 0 \quad \leftarrow F_2 \\ 2x & +y & +z & = 4 \end{array}\right.$$

Ejemplo 4

Problema: Encontrar las soluciones del sistema

$$\left\{\begin{array}{rrrrl} x & +y & +2z & = 8 & \leftarrow F_1 \\ & +y & -z & = -8 & \leftarrow F_2 - F_1 \\ 2x & +y & +z & = 4 & \end{array}\right.$$

Ejemplo 4

Problema: Encontrar las soluciones del sistema

$$\begin{cases} x + y + 2z = 8 & \leftarrow F_1 \\ \quad + y - z = -8 & \leftarrow F_2 \\ 2x + y + z = 4 & \end{cases}$$

Ejemplo 4

Problema: Encontrar las soluciones del sistema

$$\left\{\begin{array}{rrrrl} x & +y & +2z & = 8 & \leftarrow F_1 \\ & +y & -z & = -8 & \leftarrow F_2 \\ 2x & +y & +z & = 4 & \leftarrow F_3 \end{array}\right.$$

Ejemplo 4

Problema: Encontrar las soluciones del sistema

$$\left\{\begin{array}{rrrcl} x & +y & +2z & = 8 & \leftarrow F_1 \\ & +y & -z & = -8 & \leftarrow F_2 \\ & -y & -3z & = -12 & \leftarrow F_3 - 2F_1 \end{array}\right.$$

Ejemplo 4

Problema: Encontrar las soluciones del sistema

$$\left\{\begin{array}{rrrrl} x & +y & +2z & = 8 & \leftarrow F_1 \\ & +y & -z & = -8 & \leftarrow F_2 \\ & -y & -3z & = -12 & \end{array}\right.$$

PASO 2: eliminar y

Ejemplo 4

Problema: Encontrar las soluciones del sistema

$$\left\{\begin{array}{rrrrl} x & +y & +2z & = 8 & \leftarrow F_1 \\ & +y & -z & = -8 & \leftarrow F_2 \\ & & -4z & = -20 & \leftarrow F_3 + F_2 \end{array}\right.$$

Ejemplo 4

Problema: Encontrar las soluciones del sistema

$$\left\{\begin{array}{rrrcrl} x & +y & +2z & = & 8 & \leftarrow F_1 \\ & +y & -z & = & -8 & \leftarrow F_2 \\ & & -4z & = & -20 & \leftarrow F_3 \end{array}\right.$$

Sistema escalerizado

Ejemplo 4

Problema: Encontrar las soluciones del sistema

$$\left\{\begin{array}{rrrcl} x & +y & +2z & = 8 & \leftarrow F_1 \\ & +y & -z & = -8 & \leftarrow F_2 \\ & & -4z & = -20 & \leftarrow F_3 \end{array}\right.$$

$\Rightarrow z = 5$

Ejemplo 4

Problema: Encontrar las soluciones del sistema

$$\left\{\begin{array}{rrrrl} x & +y & +2z & = 8 & \leftarrow F_1 \\ & +y & -z & = -8 & \leftarrow F_2 \\ & & -4z & = -20 & \leftarrow F_3 \end{array}\right.$$

$\Rightarrow z = 5$

$\Rightarrow y = -3$

Ejemplo 4

Problema: Encontrar las soluciones del sistema

$$\left\{\begin{array}{rrrrl} x & +y & +2z & = 8 & \leftarrow F_1 \\ & +y & -z & = -8 & \leftarrow F_2 \\ & & -4z & = -20 & \leftarrow F_3 \end{array}\right.$$

$\Rightarrow z = 5$

$\Rightarrow y = -3$

$\Rightarrow x = 1$

Ejemplo 4

Problema: Encontrar las soluciones del sistema

$$\left\{\begin{array}{rrrrl} x & +y & +2z & = 8 & \leftarrow F_1 \\ & +y & -z & = -8 & \leftarrow F_2 \\ & & -4z & = -20 & \leftarrow F_3 \end{array}\right.$$

$$\begin{array}{lll} \Rightarrow z = 5 & & \\ \Rightarrow y = -3 & \Rightarrow & S_{ESC} = \{(1, -3, 5)\} \\ \Rightarrow x = 1 & & \end{array}$$

Ejemplo 4

Es fácil ver que $(1, -3, 5)$ es también solución del sistema original.

Ejemplo 4

Es fácil ver que $(1, -3, 5)$ es también solución del sistema original.
pero, ¿cómo sabemos que esas son todas las soluciones del sistema original?

Ejemplo 4

Es fácil ver que $(1, -3, 5)$ es también solución del sistema original.
pero, ¿cómo sabemos que esas son todas las soluciones del sistema original?
Es decir, sabemos que

$$\mathcal{S}_{ESC} \subset \mathcal{S}$$

pero no sabemos si $\mathcal{S}_{ESC} = \mathcal{S}$

Ejemplo 4

¿qué asegura que nuestras transformaciones no modifican el conjunto de soluciones del sistema?

Ejemplo 4

¿qué asegura que nuestras transformaciones no modifican el conjunto de soluciones del sistema?
sería bueno pensar en la respuesta a esta pregunta mientras vemos otro ejemplo

Ejemplo 5

Resolver el sistema:

$$\left\{\begin{array}{rcr} x_1+2x_2+x_3+x_5+x_6 &=& 1\\ -x_1-2x_2+x_3+x_4-x_6 &=& 0\\ x_1+2x_2+x_3+2x_4+5x_5+3x_6 &=& 1\\ x_1+2x_2+x_3+x_5+3x_6 &=& 3\\ x_1+2x_2+x_3+4x_4+9x_5+3x_6 &=& -1 \end{array}\right.$$

Ejemplo 5

Para mayor comodidad, trabajaremos sólo con los coeficientes

$$\left(\begin{array}{rrrrrr|r} 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 5 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 4 & 9 & 3 & -1 \end{array}\right)$$

Notación matricial

Ejemplo 5

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 8 & 2 & -2 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \longleftarrow F_2 + F_1 \\ \longleftarrow F_3 - F_1 \\ \longleftarrow F_4 - F_1 \\ \longleftarrow F_5 - F_1 \end{array}$$

Ejemplo 5

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 8 & 2 & -2 \end{array}\right)$$

Ejemplo 5

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 8 & 2 & -2 \end{array}\right)$$

Ejemplo 5

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & -2 \end{array}\right) \longleftarrow F_5 - 2F_3$$

Ejemplo 5

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & -2 \end{array}\right)$$

Ejemplo 5

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \longleftarrow F_5 + F_4. \end{array}$$

Ejemplo 5

$$\begin{array}{rrrrrrcl}
x_1 & +2x_2 & +x_3 & & +x_5 & +x_6 & = & 1 \\
 & & 2x_3 & +x_4 & +x_5 & & = & 1 \\
 & & & 2x_4 & +4x_5 & +2x_6 & = & 0 \\
 & & & & & 2x_6 & = & 2
\end{array}$$

Sistema escalerizado

Ejemplo 5

$$
\begin{array}{cccccccc}
x_1 & +2x_2 & +x_3 & & +x_5 & +x_6 & = & 1 \\
 & & 2x_3 & +x_4 & +x_5 & & = & 1 \\
 & & & 2x_4 & +4x_5 & +2x_6 & = & 0 \\
 & & & & & 2x_6 & = & 2
\end{array}
$$

$\Rightarrow x_6 = 1$

Ejemplo 5

$$
\begin{array}{cccccccl}
x_1 & +2x_2 & +x_3 & & & +x_6 & = & 1-x_5 \\
 & & 2x_3 & +x_4 & & & = & 1-x_5 \\
 & & & 2x_4 & & +2x_6 & = & 0-4x_5 \\
 & & & & & 2x_6 & = & 2
\end{array}
$$

$$\Rightarrow x_6 = 1$$

Ejemplo 5

$$\begin{array}{cccccccc} x_1 & +2x_2 & +x_3 & & & +x_6 & = & 1-x_5 \\ & & 2x_3 & +x_4 & & & = & 1-x_5 \\ & & & 2x_4 & & +2x_6 & = & 0-4x_5 \\ & & & & & 2x_6 & = & 2 \end{array}$$

$$\Rightarrow x_6 = 1$$

$$\Rightarrow x_4 = -1 - 2x_5$$

Ejemplo 5

$$\begin{array}{cccccccc} x_1 & +2x_2 & +x_3 & & & +x_6 & = & 1-x_5 \\ & & 2x_3 & +x_4 & & & = & 1-x_5 \\ & & & 2x_4 & & +2x_6 & = & 0-4x_5 \\ & & & & & 2x_6 & = & 2 \end{array}$$

$$\Rightarrow x_6 = 1$$

$$\Rightarrow x_4 = -1 - 2x_5$$

$$\Rightarrow x_3 = \frac{x_5}{2} + 1$$

Ejemplo 5

$$\begin{array}{rrrrrcl}
x_1 & +x_3 & & & +x_6 & = & 1-x_5-2x_2 \\
& 2x_3 & +x_4 & & & = & 1-x_5 \\
& & 2x_4 & & +2x_6 & = & 0-4x_5 \\
& & & & 2x_6 & = & 2
\end{array}$$

$$\Rightarrow x_6 = 1$$

$$\Rightarrow x_4 = -1 - 2x_5$$

$$\Rightarrow x_3 = \frac{x_5}{2} + 1$$

Ejemplo 5

$$
\begin{array}{cccccc}
x_1 & +x_3 & & +x_6 & = & 1-x_5-2x_2 \\
 & 2x_3 & +x_4 & & = & 1-x_5 \\
 & & 2x_4 & +2x_6 & = & 0-4x_5 \\
 & & & 2x_6 & = & 2
\end{array}
$$

$\Rightarrow x_6 = 1$

$\Rightarrow x_4 = -1 - 2x_5$

$\Rightarrow x_3 = \frac{x_5}{2} + 1$

$\Rightarrow x_1 = -2x_2 - \frac{3x_5}{2} - 1$

Ejemplo 5

$$\begin{array}{ccccccc} x_1 & +x_3 & & & +x_6 & = & 1-x_5-2x_2 \\ & 2x_3 & +x_4 & & & = & 1-x_5 \\ & & 2x_4 & & +2x_6 & = & 0-4x_5 \\ & & & & 2x_6 & = & 2 \end{array}$$

$$\Rightarrow x_6 = 1$$

$$\Rightarrow x_4 = -1 - 2x_5$$

$$\Rightarrow x_3 = \frac{x_5}{2} + 1$$

$$\Rightarrow x_1 = -2x_2 - \frac{3x_5}{2} - 1$$

x_2 y x_5 varían libremente

Ejemplo 5

El conjunto solución consiste de las tiras

$$\left(-2x_2 - \frac{3x_5}{2} - 1, x_2, \frac{x_5}{2} + 1, -1 - 2x_5, x_5, 1\right)$$

con

$$x_2, x_5 \in \mathbb{R}$$

Ejercicio

pensar por qué si en el sistema (S_1)
se le suma a una fila un múltiplo de otra
el sistema (S_2) que se obtiene
tiene el mismo conjunto solución que (S_1)