Producto escalar

Longitudes, distancias y ángulos en $\mathbb{R}^3$

Producto escalar - definición

Dados

$$X = (x_1, x_2, x_3) \qquad Y = (y_1, y_2, y_3)$$

Producto escalar - definición

Dados

$$X = (x_1, x_2, x_3) \qquad Y = (y_1, y_2, y_3)$$

el producto escalar $X \cdot Y$ se define como:

Producto escalar - definición

Dados

$$X = (x_1, x_2, x_3) \qquad Y = (y_1, y_2, y_3)$$

el producto escalar $X \cdot Y$ se define como:

$$X \cdot Y = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3$$

Ejemplo

$$X = (1,2,3),\ Y = (3,2,1)$$

$$X \cdot Y = 1.3 + 2.2 + 3.1 = 10$$

Proposición

Dados $X, Y \in \mathbb{R}^3$,

Proposición

Dados $X, Y \in \mathbb{R}^3$, y $\alpha \in \mathbb{R}$,

Proposición

Dados $X, Y \in \mathbb{R}^3$, y $\alpha \in \mathbb{R}$, valen las siguientes propiedades:

Proposición

Dados $X, Y \in \mathbb{R}^3$, y $\alpha \in \mathbb{R}$, valen las siguientes propiedades:

- $X \cdot X \geq 0$

Proposición

Dados $X, Y \in \mathbb{R}^3$, y $\alpha \in \mathbb{R}$, valen las siguientes propiedades:

- $X \cdot X \geq 0$
- $X \cdot X = 0 \Leftrightarrow X = (0, 0, 0)$

Proposición

Dados $X, Y \in \mathbb{R}^3$, y $\alpha \in \mathbb{R}$, valen las siguientes propiedades:

- $X \cdot X \geq 0$
- $X \cdot X = 0 \Leftrightarrow X = (0, 0, 0)$
- MULTILINEALIDAD:

Proposición

Dados $X, Y \in \mathbb{R}^3$, y $\alpha \in \mathbb{R}$, valen las siguientes propiedades:

- $X \cdot X \geq 0$
- $X \cdot X = 0 \Leftrightarrow X = (0, 0, 0)$
- MULTILINEALIDAD:
  - $(X + Y) \cdot Z = X \cdot Z + Y \cdot Z$

Proposición

Dados $X, Y \in \mathbb{R}^3$, y $\alpha \in \mathbb{R}$, valen las siguientes propiedades:

- $X \cdot X \geq 0$
- $X \cdot X = 0 \Leftrightarrow X = (0, 0, 0)$
- MULTILINEALIDAD:
  - $(X + Y) \cdot Z = X \cdot Z + Y \cdot Z$
  - $(\alpha X) \cdot Y = \alpha (X \cdot Y)$

Proposición

Dados $X, Y \in \mathbb{R}^3$, y $\alpha \in \mathbb{R}$, valen las siguientes propiedades:

- $X \cdot X \geq 0$
- $X \cdot X = 0 \Leftrightarrow X = (0, 0, 0)$
- MULTILINEALIDAD:
  - $(X + Y) \cdot Z = X \cdot Z + Y \cdot Z$
  - $(\alpha X) \cdot Y = \alpha(X \cdot Y)$
- SIMÉTRICA: $X \cdot Y = Y \cdot X$

Módulo de un vector

Dado $X \in \mathbb{R}^3$

Módulo de un vector

Dado $X \in \mathbb{R}^3$

el módulo de X se define como:

Módulo de un vector

Dado $X \in \mathbb{R}^3$

el módulo de X se define como:

$$|X| = \sqrt{X \cdot X}$$

Ejemplos

- $|(1,2,3)| = \sqrt{14}$

Ejemplos

- $|(1,2,3)| = \sqrt{14}$
- $|(1,0,0)| = 1$

Ejemplos

- $|(1,2,3)| = \sqrt{14}$
- $|(1,0,0)| = 1$
- $|(-1,0,0)| = 1$

Propiedades

Dados $X, Y \in \mathbb{R}^3$, se cumplen:

Propiedades

Dados $X, Y \in \mathbb{R}^3$, se cumplen:

- $|X+Y|^2 = |X|^2 + |Y|^2 + 2X \cdot Y$

Propiedades

Dados $X, Y \in \mathbb{R}^3$, se cumplen:

- $|X+Y|^2 = |X|^2 + |Y|^2 + 2X \cdot Y$
- $(X+Y) \cdot (X-Y) = |X|^2 - |Y|^2$

Desigualdad de Cauchy-Schwartz

Para todo par de vectores X e Y de $\mathbb{R}^3$ se cumple:

Desigualdad de Cauchy-Schwartz

Para todo par de vectores X e Y de $\mathbb{R}^3$ se cumple:

$$|X \cdot Y| \leq |X||Y|$$

Desigualdad de Cauchy-Schwartz

Para todo par de vectores X e Y de $\mathbb{R}^3$ se cumple:

$$|X \cdot Y| \leq |X||Y|$$

Además

$$|X \cdot Y| = |X||Y| \Leftrightarrow X||Y$$

Desigualdad de Cauchy-Schwartz

Para todo par de vectores X e Y de $\mathbb{R}^3$ se cumple:

$$|X \cdot Y| \leq |X||Y|$$

Además

$$|X \cdot Y| = |X||Y| \Leftrightarrow X||Y$$

Consecuencia

$$-1 \leq \frac{X \cdot Y}{|X||Y|} \leq 1$$

Ángulo entre vectores no nulos

Dados $X, Y \neq (0,0,0)$ en $\mathbb{R}^3$,

Ángulo entre vectores no nulos

Dados $X, Y \neq (0,0,0)$ en $\mathbb{R}^3$,

el ángulo entre X e Y se define como el único número $\theta \in (-\pi, \pi]$ que cumple:

Ángulo entre vectores no nulos

Dados $X, Y \neq (0,0,0)$ en $\mathbb{R}^3$,

el ángulo entre X e Y se define como el único número $\theta \in (-\pi, \pi]$ que cumple:

$$X \cdot Y = |X||Y| \cos \theta$$

Ángulo entre vectores no nulos

Dados $X, Y \neq (0,0,0)$ en $\mathbb{R}^3$,

el ángulo entre X e Y se define como el único número $\theta \in (-\pi, \pi]$ que cumple:

$$X \cdot Y = |X||Y| \cos\theta$$

a veces anotamos:

$$\theta = \angle(X, Y)$$

Ejemplo

Sea $X = (\sqrt{3}, 1, 0)$

Ejemplo

Sea $X = (\sqrt{3}, 1, 0)$ y consideremos los vectores:

$$e_1 = (1, 0, 0) \quad e_2 = (0, 1, 0) \quad e_3 = (0, 0, 1)$$

Ejemplo

Sea $X = (\sqrt{3}, 1, 0)$ y consideremos los vectores:

$$e_1 = (1,0,0) \quad e_2 = (0,1,0) \quad e_3 = (0,0,1)$$

tenemos que

$$|e_i| = 1 \qquad \text{para } i = 1,2,3$$

Ejemplo

Sea $X = (\sqrt{3}, 1, 0)$ y consideremos los vectores:

$$e_1 = (1, 0, 0) \quad e_2 = (0, 1, 0) \quad e_3 = (0, 0, 1)$$

y también

$$|X| = 2$$

Ejemplo

Sea $X = (\sqrt{3}, 1, 0)$ y consideremos los vectores:

$$e_1 = (1,0,0) \quad e_2 = (0,1,0) \quad e_3 = (0,0,1)$$

por lo tanto:

$$\angle(X, e_1) = \arccos \frac{\sqrt{3}}{2} = \pi/6$$

Ejemplo

Sea $X = (\sqrt{3}, 1, 0)$ y consideremos los vectores:

$$e_1 = (1, 0, 0) \quad e_2 = (0, 1, 0) \quad e_3 = (0, 0, 1)$$

por lo tanto:

$$\angle(X, e_1) = \arccos \frac{\sqrt{3}}{2} = \pi/6$$

$$\angle(X, e_2) = \arccos 1/2 = \pi/3$$

Ejemplo

Sea $X = (\sqrt{3}, 1, 0)$ y consideremos los vectores:

$$e_1 = (1, 0, 0) \quad e_2 = (0, 1, 0) \quad e_3 = (0, 0, 1)$$

por lo tanto:

$$\angle(X, e_1) = \arccos \frac{\sqrt{3}}{2} = \pi/6$$

$$\angle(X, e_2) = \arccos 1/2 = \pi/3$$

$$\angle(X, e_3) = \arccos 0 = \pi/2$$

Ortogonalidad - definición

Dos vectores X e Y de $\mathbb{R}^3$ que cumplan:

Ortogonalidad - definición

Dos vectores X e Y de $\mathbb{R}^3$ que cumplan:

$$X \cdot Y = 0$$

Ortogonalidad - definición

Dos vectores X e Y de $\mathbb{R}^3$ que cumplan:

$$X \cdot Y = 0$$

se llaman ortogonales

Ortogonalidad - definición

Dos vectores X e Y de $\mathbb{R}^3$ que cumplan:

$$X \cdot Y = 0$$

se llaman ortogonales

Observación: esto incluye que X o Y sea el vector nulo

Ortogonalidad - definición

Dos vectores X e Y de $\mathbb{R}^3$ que cumplan:

$$X \cdot Y = 0$$

se llaman ortogonales

Observación: esto incluye que X o Y sea el vector nulo

Si además se cumple que $|X| = |Y| = 1$, entonces X e Y se llaman ortonormales

Teorema de Pitágoras

Si X e Y son vectores ortogonales de $\mathbb{R}^3$.

Teorema de Pitágoras

Si X e Y son vectores ortogonales de $\mathbb{R}^3$. Entonces

$$|X+Y|^2 = |X|^2 + |Y|^2$$

Proposición

Para todos los $X, Y \in \mathbb{R}^3$, $\alpha \in \mathbb{R}$, el módulo $|.|$ cumple:

- $|X| \geq 0$

Proposición

Para todos los $X, Y \in \mathbb{R}^3$, $\alpha \in \mathbb{R}$, el módulo $|.|$ cumple:

- $|X| \geq 0$
- $|X| = 0 \Leftrightarrow X = (0, 0, 0)$

Proposición

Para todos los $X, Y \in \mathbb{R}^3$, $\alpha \in \mathbb{R}$, el módulo $|.|$ cumple:

- $|X| \geq 0$
- $|X| = 0 \Leftrightarrow X = (0,0,0)$
- HOMOGENEIDAD: $|\alpha X| = |\alpha||X|$

Proposición

Para todos los $X, Y \in \mathbb{R}^3$, $\alpha \in \mathbb{R}$, el módulo $|.|$ cumple:

- $|X| \geq 0$
- $|X| = 0 \Leftrightarrow X = (0, 0, 0)$
- HOMOGENEIDAD: $|\alpha X| = |\alpha||X|$
- DESIGUALDAD $\triangle$: $|X + Y| \leq |X| + |Y|$

Distancia

Dados $X, Y \in \mathbb{R}^3$,

Distancia

Dados $X, Y \in \mathbb{R}^3$, definimos distancia entre X e Y

Distancia

Dados $X, Y \in \mathbb{R}^3$, definimos distancia entre X e Y como:

$$d(X,Y) = |X - Y|$$

Propiedades de la distancia

Para todo $X, Y, Z \in \mathbb{R}^3$ se cumple:

- $d(X, Y) \geq 0$

Propiedades de la distancia

Para todo $X, Y, Z \in \mathbb{R}^3$ se cumple:

- $d(X, Y) \geq 0$
- $d(X, Y) = 0 \iff X = Y$

Propiedades de la distancia

Para todo $X, Y, Z \in \mathbb{R}^3$ se cumple:

- $d(X,Y) \geq 0$
- $d(X,Y) = 0 \iff X = Y$
- SIMETRÍA $d(X,Y) = d(Y,X)$

Propiedades de la distancia

Para todo $X, Y, Z \in \mathbb{R}^3$ se cumple:

- $d(X, Y) \geq 0$
- $d(X, Y) = 0 \iff X = Y$
- SIMETRÍA $d(X, Y) = d(Y, X)$
- DESIGUALDAD $\triangle$: $d(X, Z) \leq d(X, Y) + d(Y, Z)$

Proyecciones

Versor

Llamamos vector unitario o versor

Versor

Llamamos vector unitario o versor a cualquier vector de módulo 1.

Versor

Llamamos vector unitario o versor a cualquier vector de módulo 1.

Dado $X \neq (0,0,0)$, llamamos versor asociado a X al vector

Versor

Llamamos vector unitario o versor a cualquier vector de módulo 1.

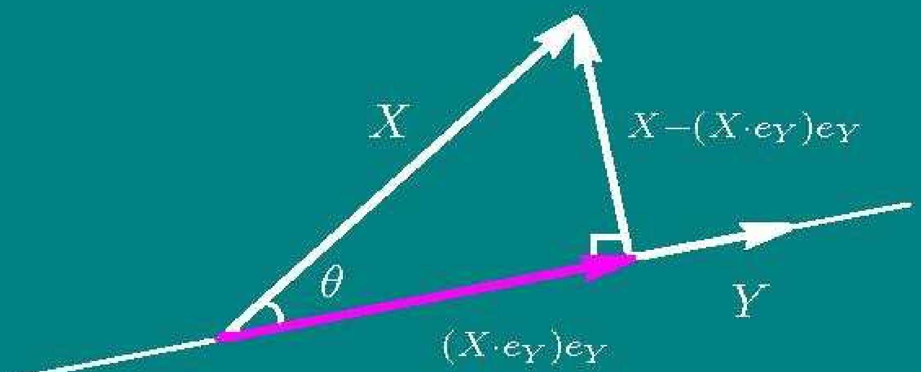
Dado $X \neq (0,0,0)$, llamamos versor asociado a X al vector

$$e_X = \frac{X}{|X|}$$

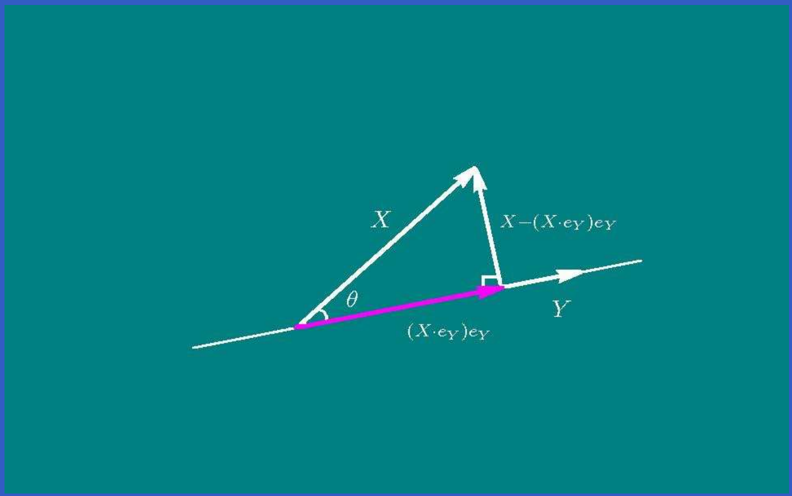
Proposición

Todo conjunto de versores ortonormales es L.I.

Proyección

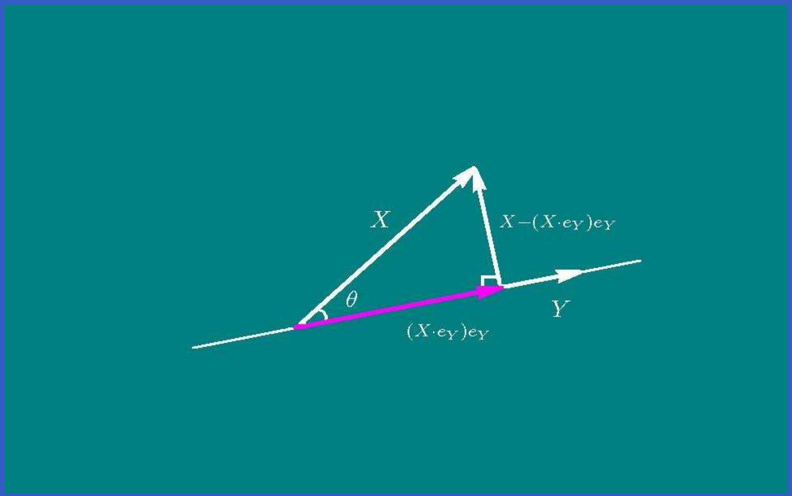


Proyección



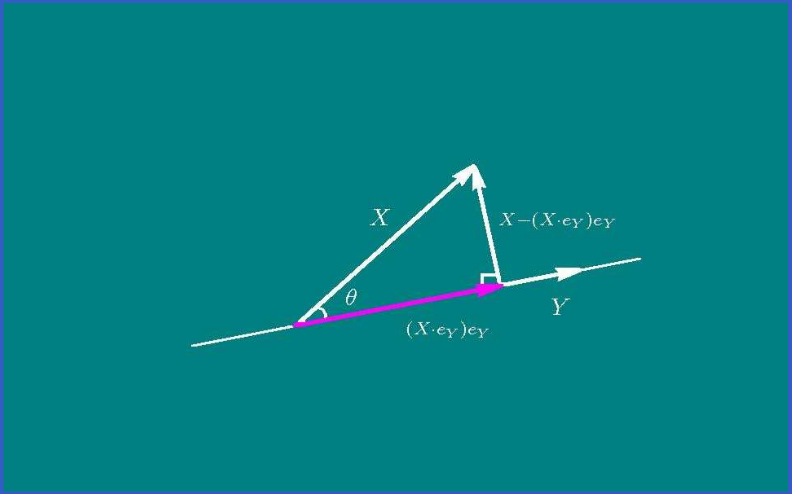
Dados $X \in \mathbb{R}^3$, $Y \neq (0,0,0)$,

Proyección



Dados $X \in \mathbb{R}^3$, $Y \neq (0,0,0)$, se llama proyección de X sobre la dirección de Y

Proyección



Dados $X \in \mathbb{R}^3$, $Y \neq (0,0,0)$, se llama proyección de X sobre la dirección de Y al vector

$$(X \cdot e_Y)e_Y$$

Producto escalar & planos

Observemos que la ecuación de cualquier plano que pasa por el origen es de la forma:

Producto escalar & planos

Observemos que la ecuación de cualquier plano que pasa por el origen es de la forma:

$$\pi_H) ax + by + cz = 0$$

Producto escalar & planos

Observemos que la ecuación de cualquier plano que pasa por el origen es de la forma:

$$\pi_H)(a, b, c)(x, y, z) = 0$$

Producto escalar & planos

Observemos que la ecuación de cualquier plano que pasa por el origen es de la forma:

$$\pi_H)(a,b,c)(x,y,z) = 0$$

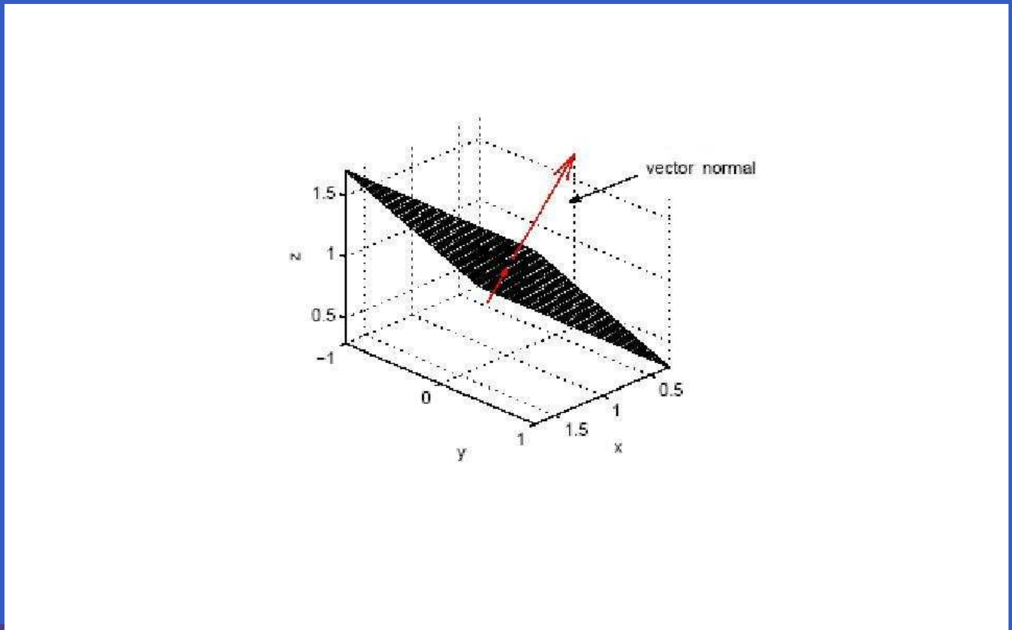
o sea que $(x,y,z) \in \pi_H \iff (x,y,z) \perp (a,b,c)$

Producto escalar & planos

Observemos que la ecuación de cualquier plano que pasa por el origen es de la forma:

$$\pi_H)(a, b, c)(x, y, z) = 0$$

o sea que $(x, y, z) \in \pi_H \iff (x, y, z) \perp (a, b, c)$



$$\pi_H) x - z = 0$$

Producto escalar & planos

Sea ahora π un plano cualquiera

$$\pi) ax + by + cz = d$$

Producto escalar & planos

Sea ahora π un plano cualquiera

$$\pi) ax + by + cz = d$$

Si

$$P = (x_0, y_0, z_0) \in \pi$$

Producto escalar & planos

Sea ahora π un plano cualquiera

$$\pi) ax + by + cz = d$$

$$P \in \pi \qquad \Rightarrow ax_0 + bx_0 + cz_0 = d$$

Producto escalar & planos

Sea ahora π un plano cualquiera

$$\pi) ax + by + cz = d$$

$$P \in \pi \qquad \Rightarrow ax_0 + bx_0 + cz_0 = d$$

restando tenemos

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

Producto escalar & planos

Sea ahora π un plano cualquiera

$$\pi) ax + by + cz = d$$

$$P \in \pi \qquad \Rightarrow ax_0 + bx_0 + cz_0 = d$$

restando tenemos

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

o sea que

$$(a, b, c) \perp (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$$

Producto escalar & planos

Sea ahora π un plano cualquiera

$$\pi) ax + by + cz = d$$

$$P \in \pi \qquad \Rightarrow ax_0 + bx_0 + cz_0 = d$$

restando tenemos

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

$$\therefore X \in \pi \Leftrightarrow (a, b, c) \perp X - P$$