Producto vectorial

Definición

Interpretación geométrica

Producto mixto

Producto vectorial - definición

Dados

$$X = (x_1, x_2, x_3) \qquad Y = (y_1, y_2, y_3)$$

Producto vectorial - definición

Dados

$$X = (x_1, x_2, x_3) \qquad Y = (y_1, y_2, y_3)$$

el producto vectorial $X \wedge Y$ se define como:

Producto vectorial - definición

Dados

$$X = (x_1, x_2, x_3) \qquad Y = (y_1, y_2, y_3)$$

el producto vectorial $X \wedge Y$ se define como:

$$X \wedge Y = \left(\begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} x_1 & x_3 \\ y_1 & y_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} \right)$$

Producto vectorial - definición

Dados

$$X = (x_1, x_2, x_3) \qquad Y = (y_1, y_2, y_3)$$

el producto vectorial $X \wedge Y$ se define como:

$$X \wedge Y = \left(\begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} x_1 & x_3 \\ y_1 & y_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} \right)$$

$$\begin{vmatrix} \circ & \circ & \circ \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix}$$

Observación 1

Se puede recordar por la fórmula

$$X \wedge Y = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix}$$

Observación 2

Producto escalar:

$$\begin{aligned} \cdot \ : \ \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (X, Y) &\longmapsto X \cdot Y \end{aligned}$$

Observación 2

Producto vectorial:

$$\begin{aligned} \wedge : \quad \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (X, Y) &\longmapsto X \wedge Y \end{aligned}$$

Ejemplo

$$X = (1, 2, 3),\ Y = (3, 2, 1)$$

Ejemplo

$$X = (1,2,3),\ Y = (3,2,1)$$

$$X \wedge Y = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} =$$

Ejemplo

$$X = (1, 2, 3), \; Y = (3, 2, 1)$$

$$X \wedge Y = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = (2 - 6, 9 - 1, 2 - 6)$$

Ejemplo

$$X = (1,2,3),\ Y = (3,2,1)$$

$$X \wedge Y = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = (-4, 8, -4)$$

Propiedades

Antisimetría

Para todo par de vectores $X, Y \in \mathbb{R}^3$ se tiene:

Antisimetría

Para todo par de vectores $X, Y \in \mathbb{R}^3$ se tiene:

$$X \wedge Y = -Y \wedge X$$

Antisimetría

Para todo par de vectores $X, Y \in \mathbb{R}^3$ se tiene:

$$X \wedge Y = -Y \wedge X$$

el producto vectorial es ANTISIMÉTRICO

Multilinealidad

Para todo $X, Y, Z \in \mathbb{R}^3$, y para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

- $(\alpha X) \wedge Z = \alpha(X \wedge Z)$

Multilinealidad

Para todo $X, Y, Z \in \mathbb{R}^3$, y para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

- $(\alpha X) \wedge Z = \alpha(X \wedge Z)$
- $(X + Y) \wedge Z = (X \wedge Z) + (Y \wedge Z)$

Multilinealidad

Para todo $X, Y, Z \in \mathbb{R}^3$, y para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

- $(\alpha X) \wedge Z = \alpha(X \wedge Z)$
- $(X + Y) \wedge Z = (X \wedge Z) + (Y \wedge Z)$
- $X \wedge (\alpha Z) = \alpha(X \wedge Z)$

Multilinealidad

Para todo $X, Y, Z \in \mathbb{R}^3$, y para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

- $(\alpha X) \wedge Z = \alpha(X \wedge Z)$
- $(X + Y) \wedge Z = (X \wedge Z) + (Y \wedge Z)$
- $X \wedge (\alpha Z) = \alpha(X \wedge Z)$
- $X \wedge (Y + Z) = (X \wedge Y) + (X \wedge Z)$

Multilinealidad

Para todo $X, Y, Z \in \mathbb{R}^3$, y para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

- $(\alpha X) \wedge Z = \alpha(X \wedge Z)$
- $(X + Y) \wedge Z = (X \wedge Z) + (Y \wedge Z)$
- $X \wedge (\alpha Z) = \alpha(X \wedge Z)$
- $X \wedge (Y + Z) = (X \wedge Y) + (X \wedge Z)$

el producto vectorial es MULTILINEAL

Interpretación geométrica (I)

Para todo $X, Y \in \mathbb{R}^3$:

- $X \wedge Y \perp X$

Interpretación geométrica (I)

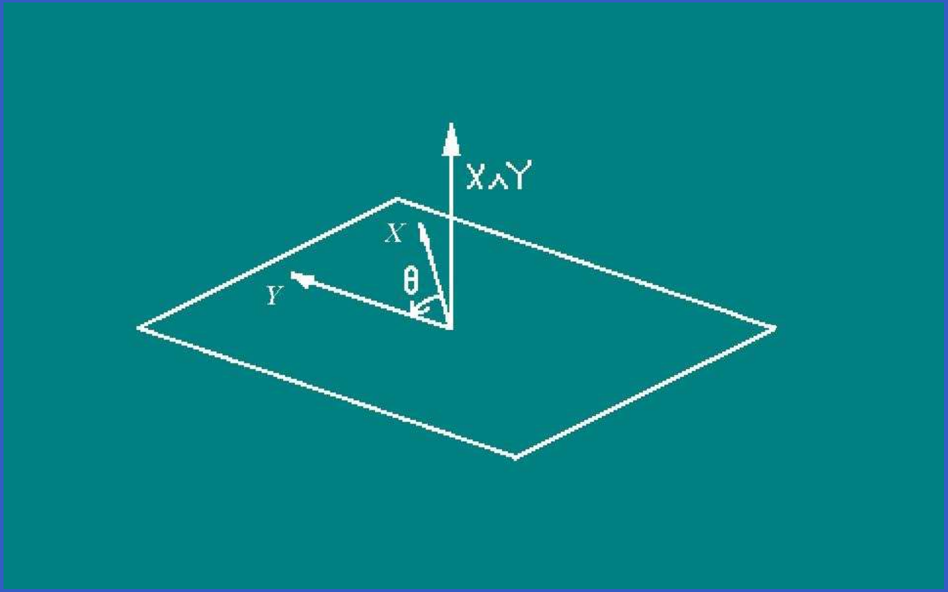
Para todo $X, Y \in \mathbb{R}^3$:

- $X \wedge Y \perp X$
- $X \wedge Y \perp Y$

Interpretación geométrica (I)

Para todo $X, Y \in \mathbb{R}^3$:

- $X \wedge Y \perp X$
- $X \wedge Y \perp Y$



Vector normal a un plano

Si la ecuación paramétrica de π es

Vector normal a un plano

Si la ecuación paramétrica de π es

$$\pi)X = P + \lambda U + \mu V \qquad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

Vector normal a un plano

Si la ecuación paramétrica de π es

$$\pi) X = P + \lambda U + \mu V \qquad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

entonces $N = U \wedge V$ es un vector normal al plano,

Vector normal a un plano

Si la ecuación paramétrica de π es

$$\pi) X = P + \lambda U + \mu V \qquad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

entonces $N = U \wedge V$ es un vector normal al plano, $\therefore$

$$\pi) (X - P) \cdot N = 0$$

es una ecuación reducida del plano π

Ejemplo 1

Si las ecuaciones paramétricas de π son:

$$\begin{cases} x = & 1 & +\lambda & -\mu \\ y = & -1 & +2\lambda & +\mu \\ z = & -2 & +\lambda & -2\mu \end{cases}$$

Ejemplo 1

Si las ecuaciones paramétricas de π son:

$$\begin{cases} x = & 1 & +\lambda & -\mu \\ y = & -1 & +2\lambda & +\mu \\ z = & -2 & +\lambda & -2\mu \end{cases}$$

$$P = (1, -2, -2) \quad U = (1, 2, 1) \quad V = (-1, 1, -2)$$

Ejemplo 1

Si las ecuaciones paramétricas de π son:

$$\begin{cases} x = & 1 & +\lambda & -\mu \\ y = & -1 & +2\lambda & +\mu \\ z = & -2 & +\lambda & -2\mu \end{cases}$$

$$P = (1, -2, -2) \quad U = (1, 2, 1) \quad V = (-1, 1, -2)$$

$$U \wedge V = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \end{vmatrix} =$$

Ejemplo 1

Si las ecuaciones paramétricas de π son:

$$\begin{cases} x = & 1 & +\lambda & -\mu \\ y = & -1 & +2\lambda & +\mu \\ z = & -2 & +\lambda & -2\mu \end{cases}$$

$$P = (1, -2, -2) \quad U = (1, 2, 1) \quad V = (-1, 1, -2)$$

$$U \wedge V = (-5, 1, 3)$$

Ejemplo 1

Si las ecuaciones paramétricas de π son:

$$\begin{cases} x = & 1 & +\lambda & -\mu \\ y = & -1 & +2\lambda & +\mu \\ z = & -2 & +\lambda & -2\mu \end{cases}$$

$$P = (1, -2, -2) \quad U = (1, 2, 1) \quad V = (-1, 1, -2)$$

$$U \wedge V = (-5, 1, 3)$$

$\therefore$

$$\pi)(X - P) \perp (-5, 1, 3) = 0$$

Ejemplo 1

Si las ecuaciones paramétricas de π son:

$$\left\{\begin{array}{rcrrr} x & = & 1 & +\lambda & -\mu \\ y & = & -1 & +2\lambda & +\mu \\ z & = & -2 & +\lambda & -2\mu \end{array}\right.$$

$$P = (1, -2, -2) \quad U = (1, 2, 1) \quad V = (-1, 1, -2)$$

$$U \wedge V = (-5, 1, 3)$$

$\therefore$

$$\pi) - 5(x-1) + (y+1) + 3(z+2) = 0$$

Ejemplo 1

Si las ecuaciones paramétricas de π son:

$$\begin{cases} x = & 1 & +\lambda & -\mu \\ y = & -1 & +2\lambda & +\mu \\ z = & -2 & +\lambda & -2\mu \end{cases}$$

$$P = (1, -2, -2) \quad U = (1, 2, 1) \quad V = (-1, 1, -2)$$

$$U \wedge V = (-5, 1, 3)$$

$\therefore$

$$\pi) - 5x + y + 3z + 12 = 0$$

Intersección de 2 planos

El vector director de la recta dada por:

$$r) \begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z & = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z & = d_2 \end{cases}$$

Intersección de 2 planos

El vector director de la recta dada por:

$$r)\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z & = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z & = d_2 \end{cases}$$

es:

$$(a_1, b_1, c_1) \wedge (a_2, b_2, c_2)$$

Interpretación gemoétrica (II)

Dados $X, Y \in \mathbb{R}^3$, tenemos

- $$|X \wedge Y| = |X||Y|\text{sen}\angle(X, Y)$$

Interpretación gemoétrica (II)

Dados $X, Y \in \mathbb{R}^3$, tenemos

- $$|X \wedge Y| = |X||Y|\mathrm{sen}\angle(X, Y)$$
- la terna $(X, Y, X \wedge Y)$ es directa

Terna directa - definición

Decimos que una terna de vectores (ordenados) $X, Y, Z \in \mathbb{R}^3$ es directa,

Terna directa - definición

Decimos que una terna de vectores (ordenados) $X, Y, Z \in \mathbb{R}^3$ es directa, si el determinante

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}$$

Terna directa - definición

Decimos que una terna de vectores (ordenados) $X, Y, Z \in \mathbb{R}^3$ es directa, si el determinante

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} \geq 0$$

Producto mixto

Dados $X, Y, Z \in \mathbb{R}^3$, se define el producto mixto de X, Y, Z como:

Producto mixto

Dados $X, Y, Z \in \mathbb{R}^3$, se define el producto mixto de X, Y, Z como:

$$[X, Y, Z] = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}$$

Producto mixto

Dados $X, Y, Z \in \mathbb{R}^3$, se define el producto mixto de X, Y, Z como:

$$[X, Y, Z] = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} = (X \wedge Y) \cdot Z$$

Observación

En particular

Una terna $X, Y, Z \in \mathbb{R}^3$ es directa $\Leftrightarrow [X, Y, Z] \geq 0$

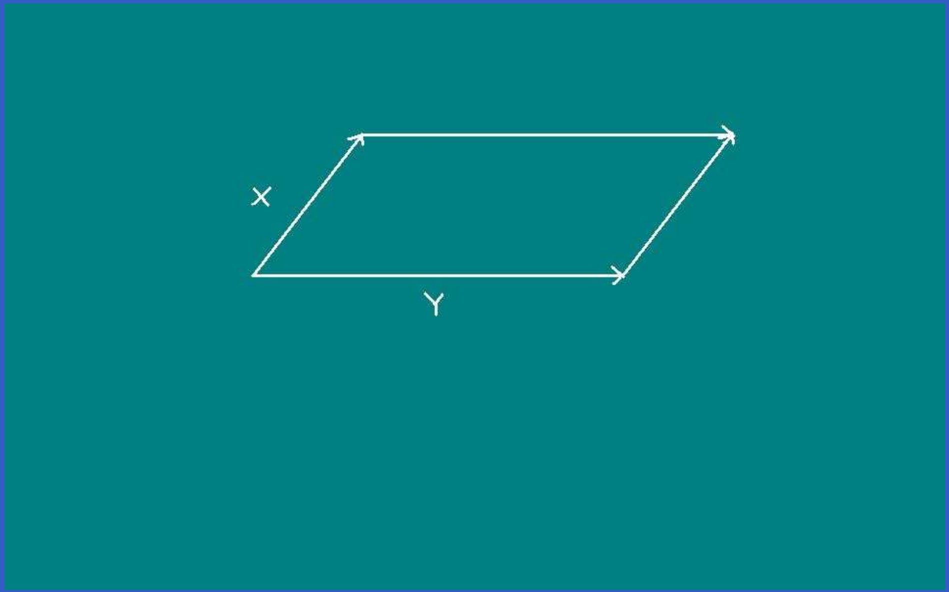
Más aplicaciones

Áreas

Todo par de vectores $X, Y \in \mathbb{R}^3$ no nulos definen un paralelogramo P.

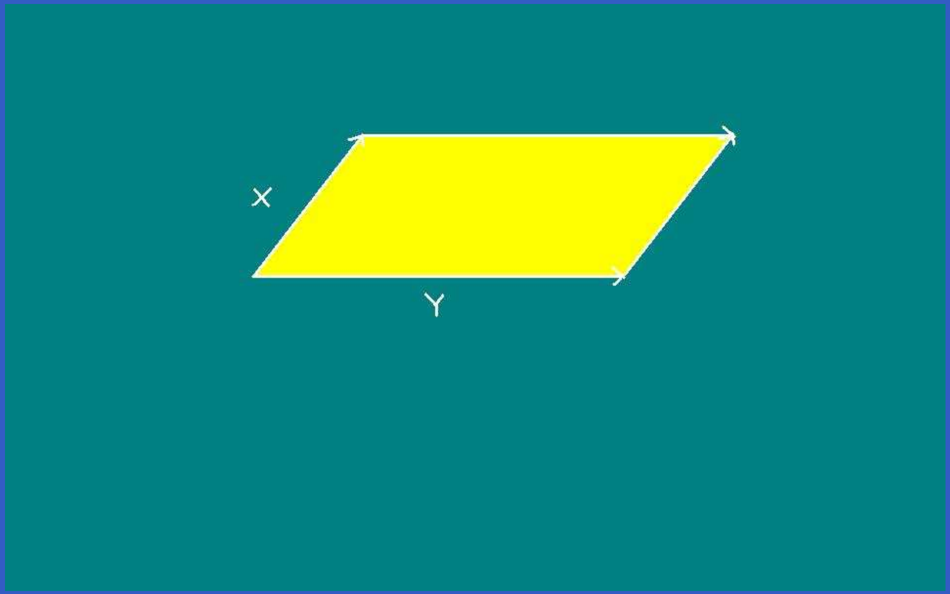
Áreas

Todo par de vectores $X, Y \in \mathbb{R}^3$ no nulos definen un paralelogramo P.



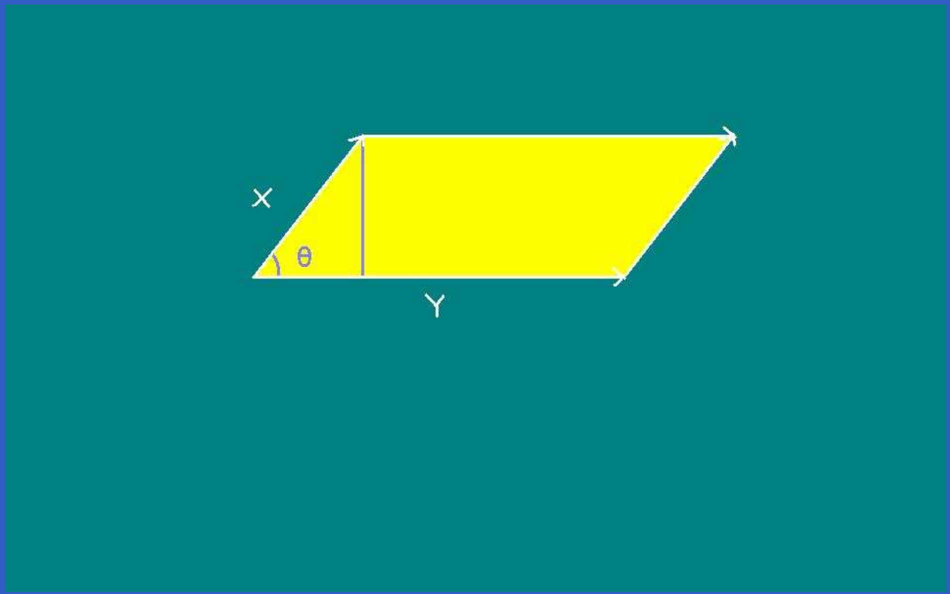
Áreas

Todo par de vectores $X, Y \in \mathbb{R}^3$ no nulos definen un paralelogramo P. que tiene un área bien definida.



Áreas

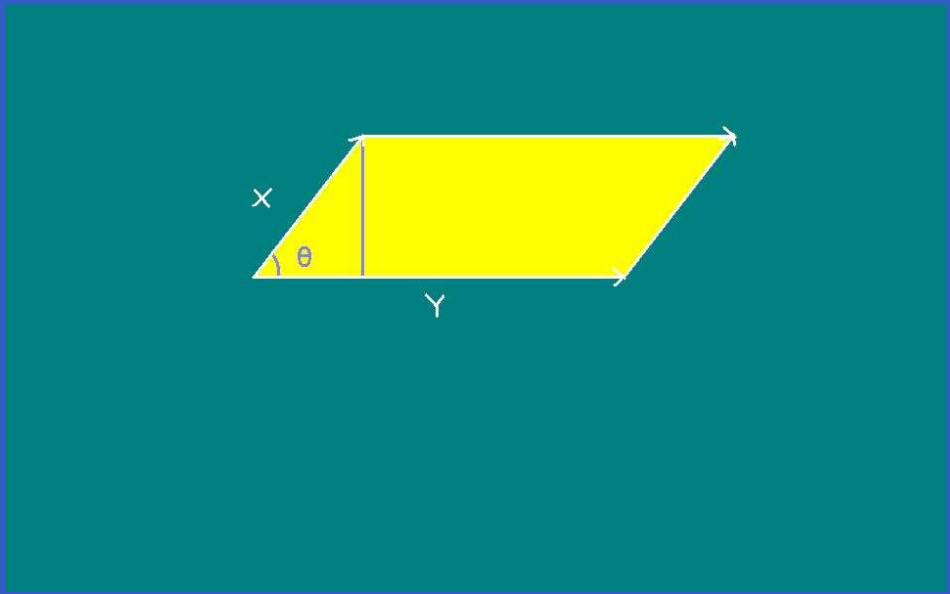
Todo par de vectores $X, Y \in \mathbb{R}^3$ no nulos definen un paralelogramo P. Para calcular



$$\text{área}(P) =$$

Áreas

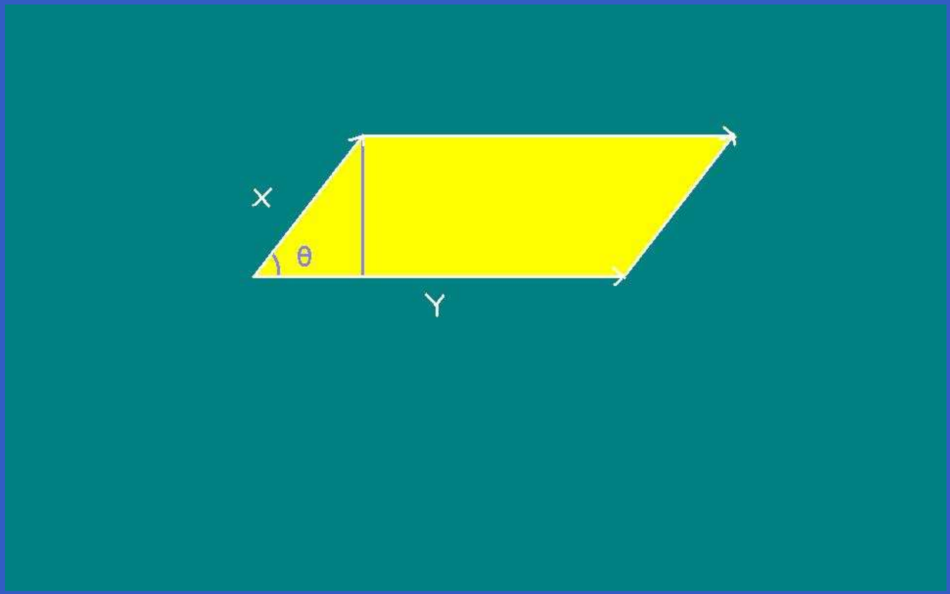
Todo par de vectores $X, Y \in \mathbb{R}^3$ no nulos definen un paralelogramo P. Para calcular



$$\text{área}(P) = |X||Y|\text{sen}\theta$$

Áreas

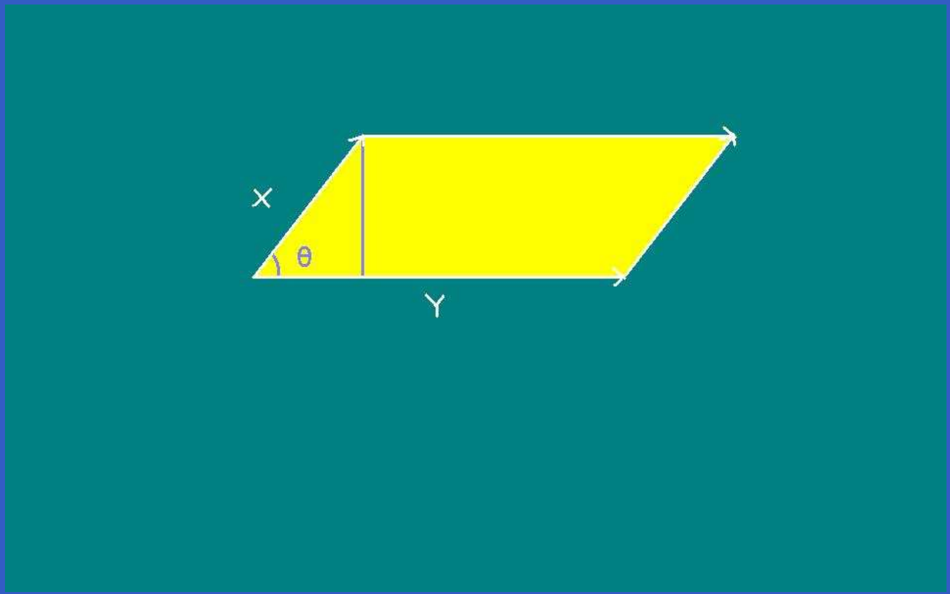
Todo par de vectores $X, Y \in \mathbb{R}^3$ no nulos definen un paralelogramo P. Para calcular



$$\text{área}(P) = |X \wedge Y|$$

Áreas

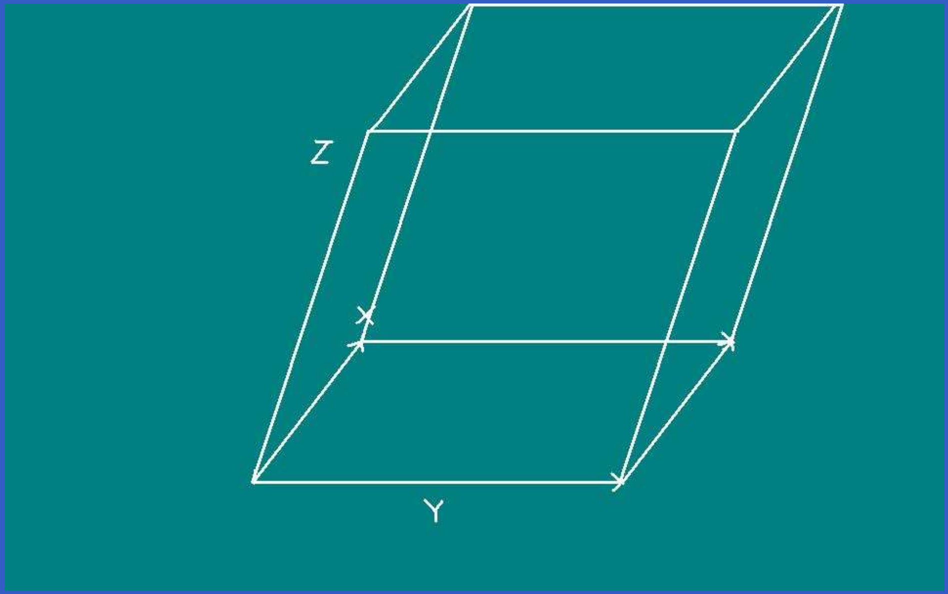
Todo par de vectores $X, Y \in \mathbb{R}^3$ no nulos definen un paralelogramo P.



$|X \wedge Y|$ es el área del paralelogramo definido por X e Y

Volúmenes

Sean $X, Y, Z \in \mathbb{R}^3$ no nulos.

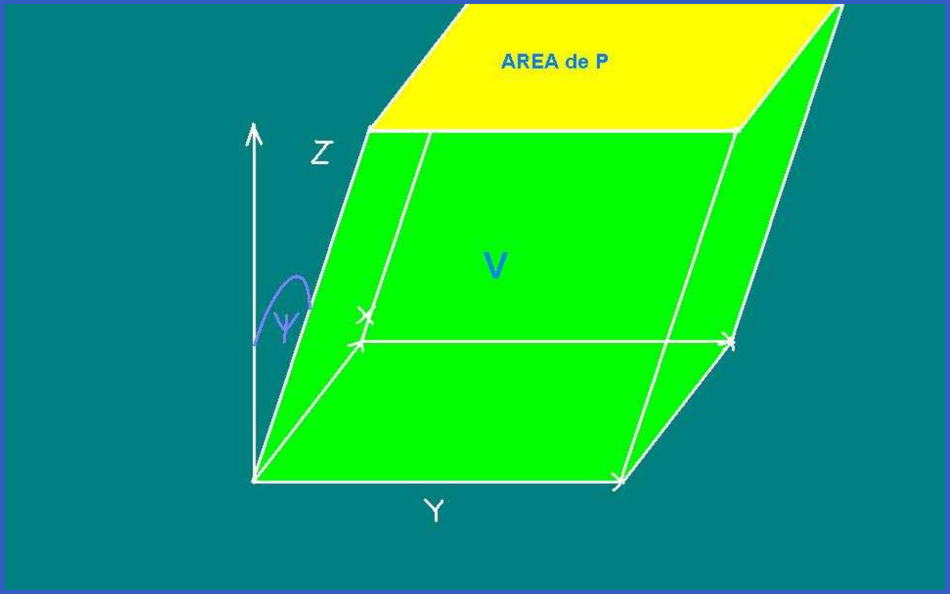


Volúmenes

Sean $X, Y, Z \in \mathbb{R}^3$ no nulos. Entonces definen un prisma de volumen V

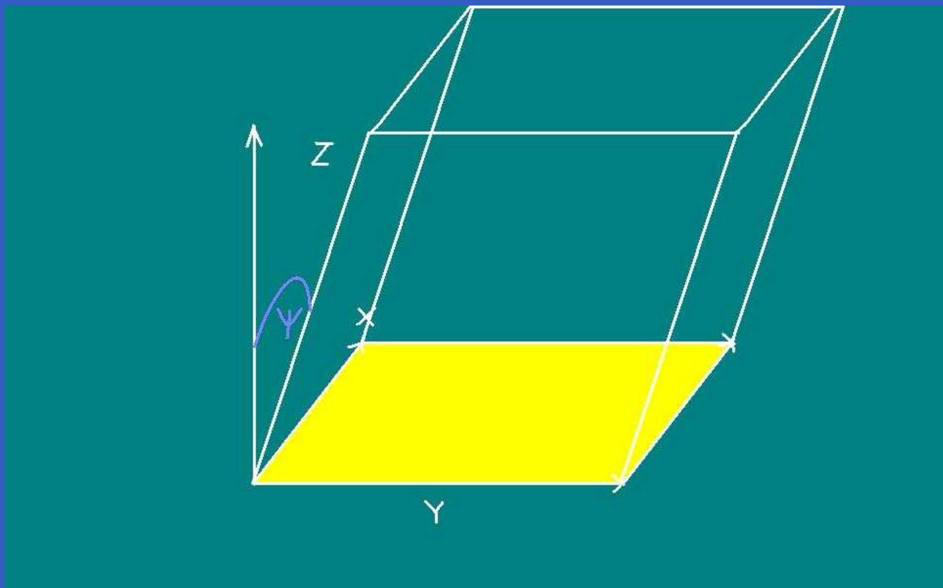
Volúmenes

Sean $X, Y, Z \in \mathbb{R}^3$ no nulos. Entonces definen un prisma de volumen V



Volúmenes

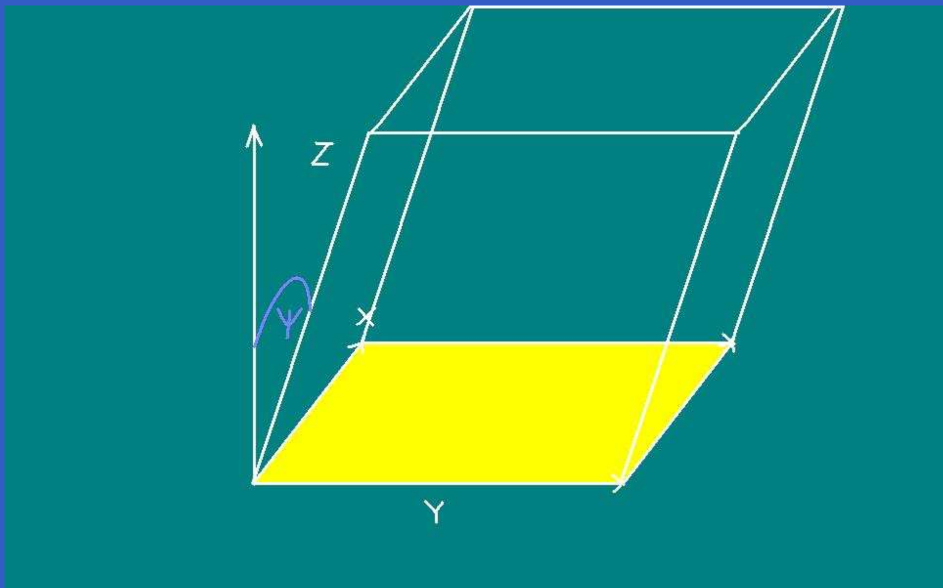
Sean $X, Y, Z \in \mathbb{R}^3$ no nulos. Entonces definen un prisma de volumen V



El área de la base del prisma es $|X \wedge Y|$

Volúmenes

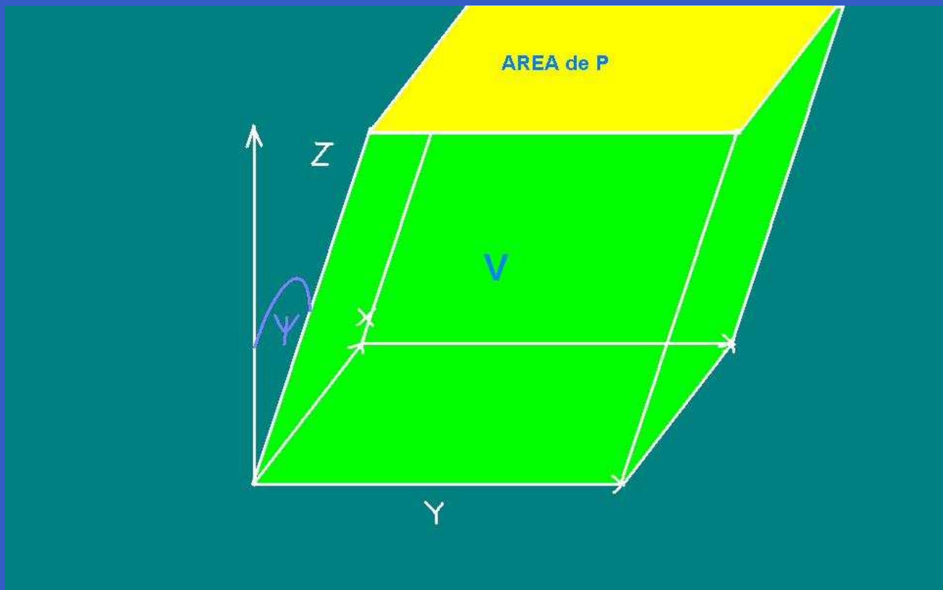
Sean $X, Y, Z \in \mathbb{R}^3$ no nulos. Entonces definen un prisma de volumen V



El área de la base del prisma es $|X \wedge Y|$La altura del prisma es $|Z| \cos \psi$

Volúmenes

Sean $X, Y, Z \in \mathbb{R}^3$ no nulos. Entonces definen un prisma de volumen V

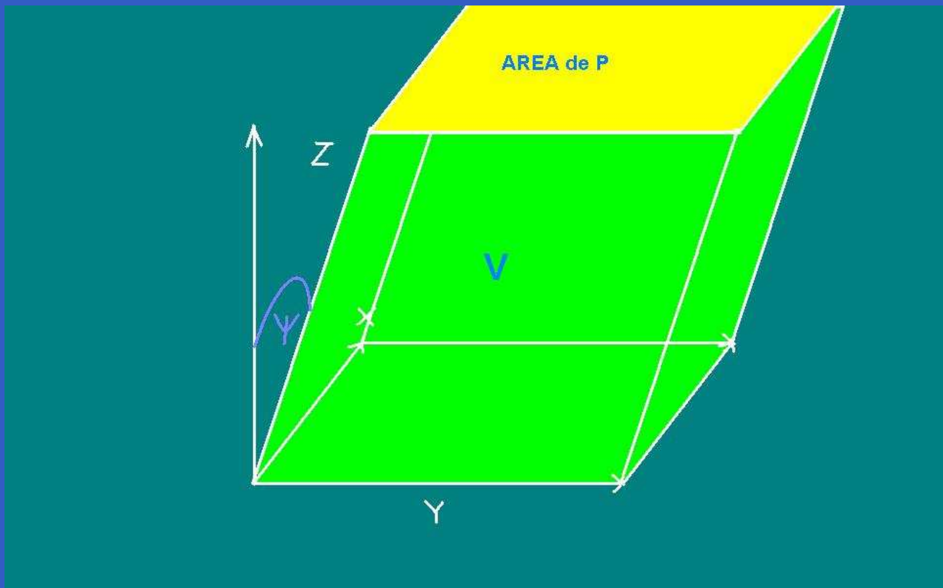


El volumen es entonces

$$V =$$

Volúmenes

Sean $X, Y, Z \in \mathbb{R}^3$ no nulos. Entonces definen un prisma de volumen V

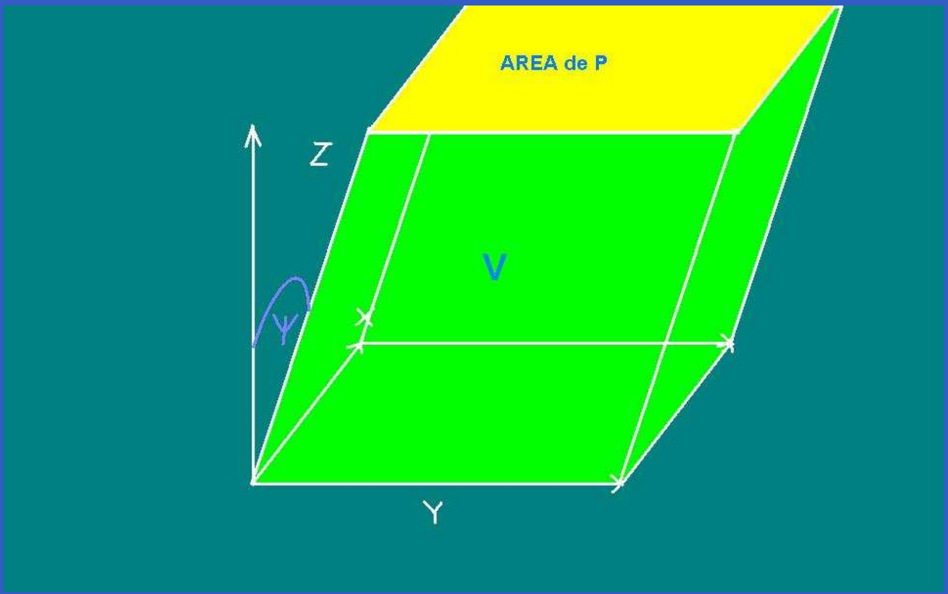


El volumen es entonces

$$V = |X \wedge Y||Z| \cos \psi$$

Volúmenes

Sean $X, Y, Z \in \mathbb{R}^3$ no nulos. Entonces definen un prisma de volumen V

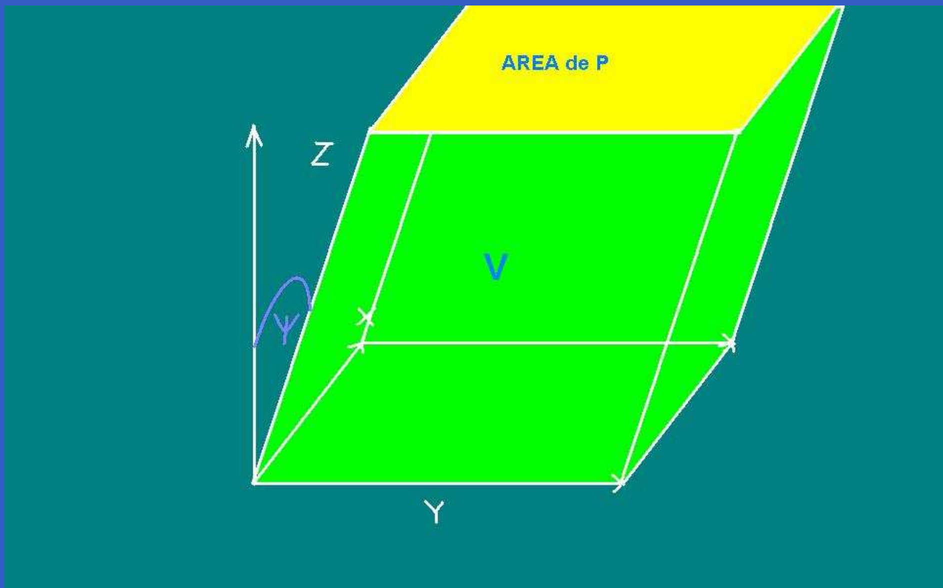


El volumen es entonces

$$V = \pm(X \wedge Y) \cdot Z$$

Volúmenes

Sean $X, Y, Z \in \mathbb{R}^3$ no nulos. Entonces definen un prisma de volumen V



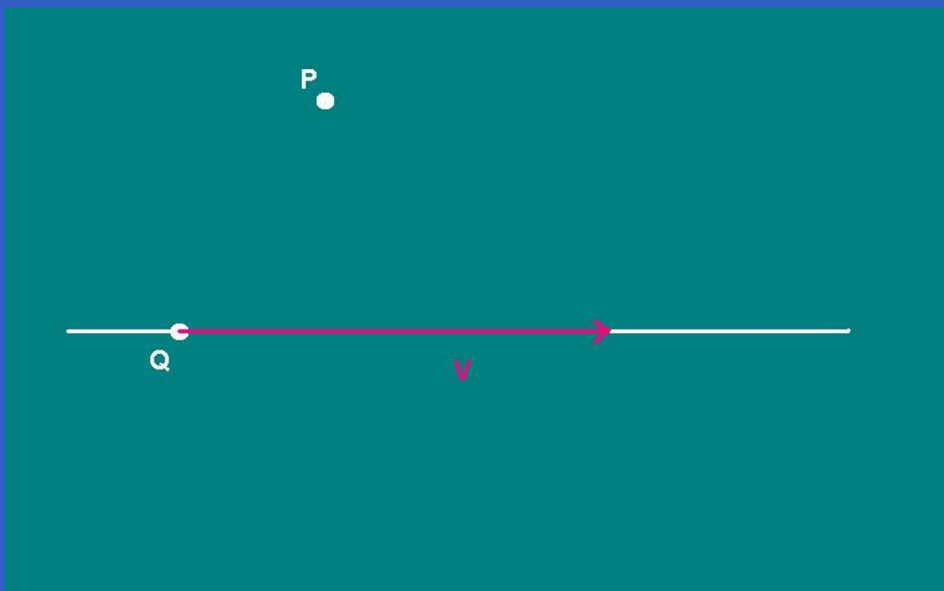
El volumen es entonces

$$V = \pm[X, Y, Z]$$

Distancia de un punto a una recta

Dado un punto $P \in \mathbb{R}^3$ y una recta

$$r) X = Q + \lambda V$$

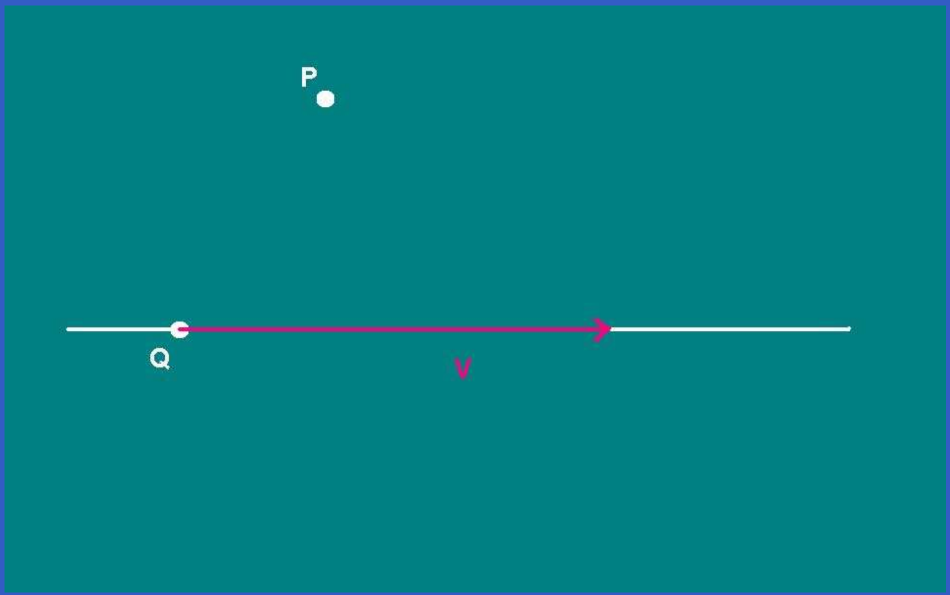


Distancia de un punto a una recta

Dado un punto $P \in \mathbb{R}^3$ y una recta

$$r)X = Q + \lambda V$$

se define la distancia de P a r como:



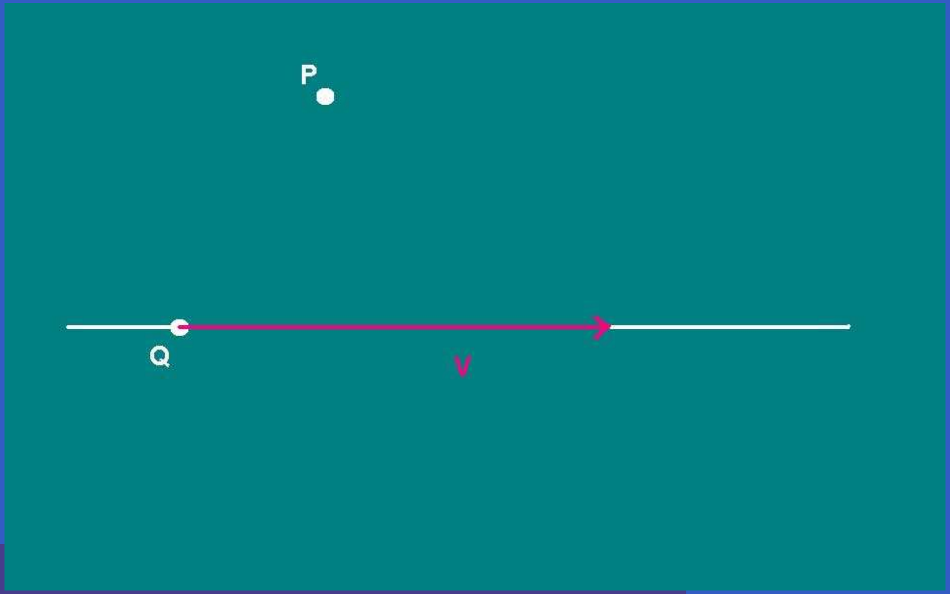
Distancia de un punto a una recta

Dado un punto $P \in \mathbb{R}^3$ y una recta

$$r)X = Q + \lambda V$$

se define la distancia de P a r como:

$$d(P, r) = \min\{d(P, X) : X \in r\}$$



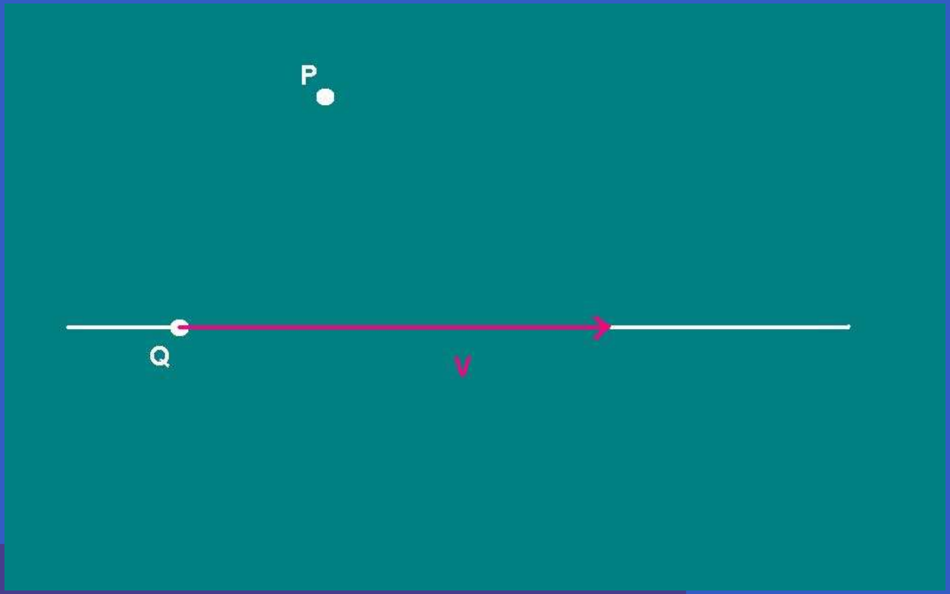
Distancia de un punto a una recta

Dado un punto $P \in \mathbb{R}^3$ y una recta

$$r)X = Q + \lambda V$$

se define la distancia de P a r como:

$$d(P, r) = \min\{|P - X| : X \in r\}$$



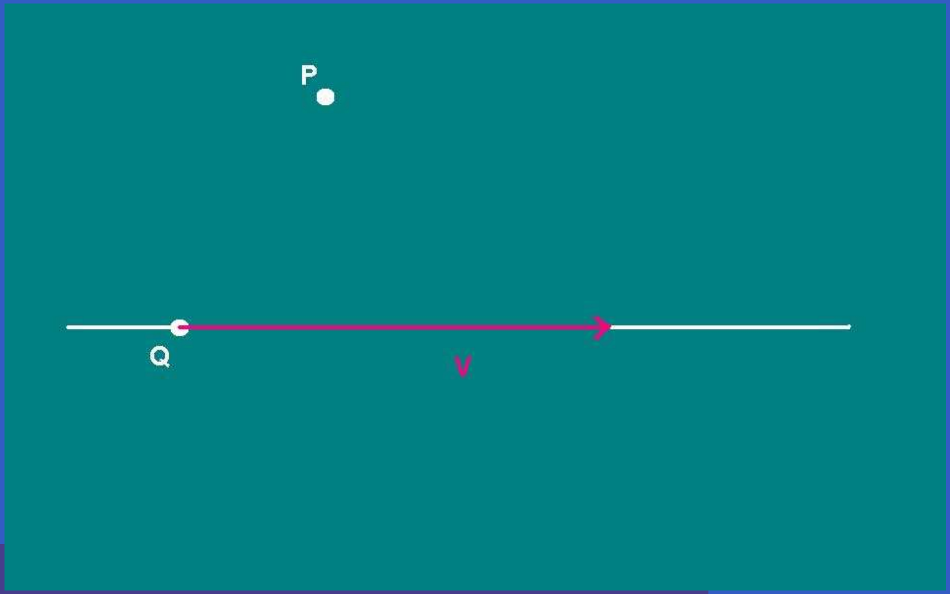
Distancia de un punto a una recta

Dado un punto $P \in \mathbb{R}^3$ y una recta

$$r)X = Q + \lambda V$$

se define la distancia de P a r como:

$$d(P, r) = \min\{|P - Q - \lambda V| : \lambda \in \mathbb{R}\}$$



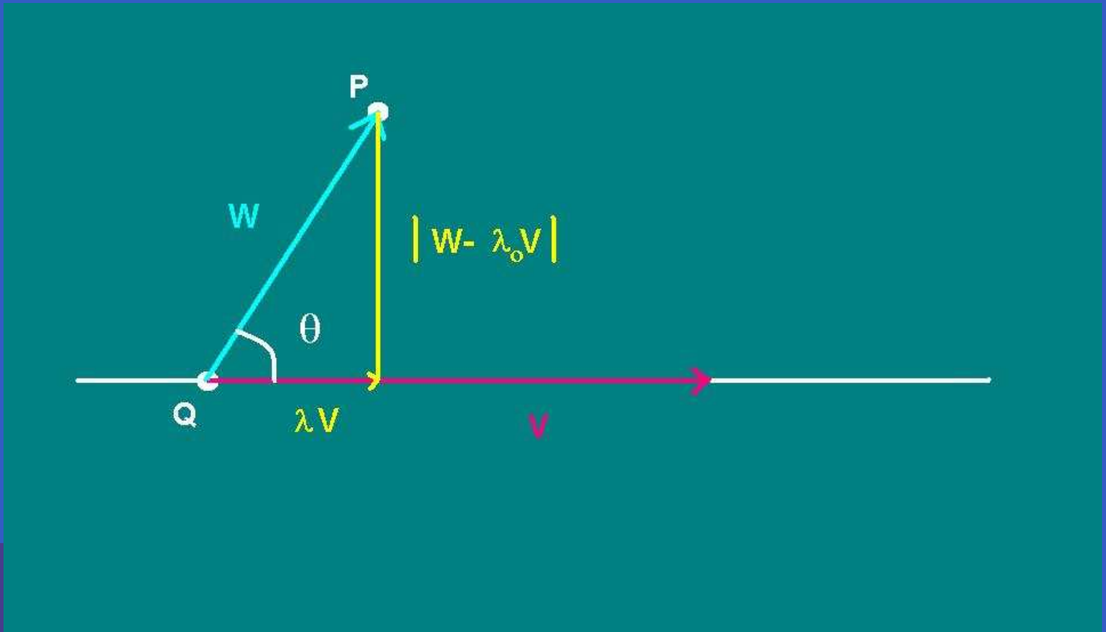
Distancia de un punto a una recta

Dado un punto $P \in \mathbb{R}^3$ y una recta

$$r) X = Q + \lambda V$$

se define la distancia de P a r como:

$$d(P, r) = \min\{|P - Q - \lambda V| : \lambda \in \mathbb{R}\}$$



$$d(P, r) = |W|.\text{sen}\theta$$

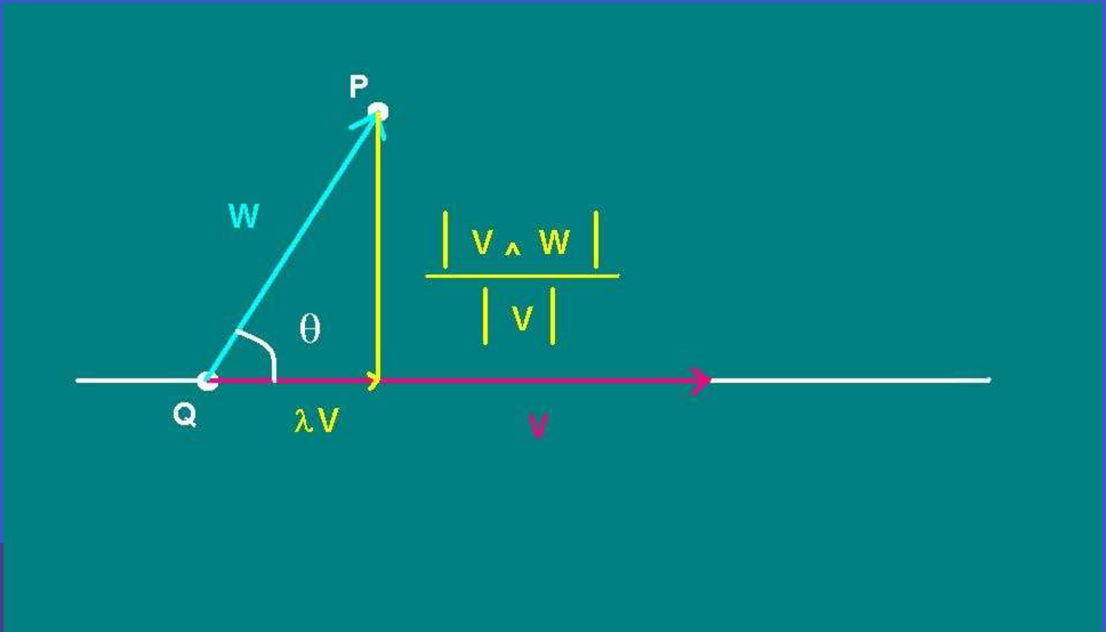
Distancia de un punto a una recta

Dado un punto $P \in \mathbb{R}^3$ y una recta

$$r) X = Q + \lambda V$$

se define la distancia de P a r como:

$$d(P,r) = \min\{|P - Q - \lambda V| : \lambda \in \mathbb{R}\}$$



$$d(P,r) = \frac{|V \wedge W|}{|V|}$$